**Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden**
Fakultät Informatik/Mathematik
Prof. Dr. E. Klimova

Dresden, 04. Mai 2022

# Prüfungsklausur „Algebra und höhere Mathematik 1 [I-380]“

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| **Name, Vorname** | **Matrikelnummer** | **Unterschrift** |

**Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie...**

1. **sich gesundheitlich dazu in der Lage fühlen, an der Prüfung teilzunehmen,**
2. **insbesondere keine SARS-CoV-2-Symptome haben.**

---

## Hinweise

- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt **90 Minuten**.
- Nutzen Sie ausschließlich DIN-A4 Blätter. Lösen Sie bitte **jede** Aufgabe auf einem **neuen** Blatt! Schreiben Sie auf **jedes** neue Blatt **Ihren Namen** und **Ihre Matrikelnummer**.
- Mit **Bleistift** oder in **rot** geschriebene Klausuren werden als **nicht bestanden** gewertet.
- Wenn nicht anders angegeben, sind die Lösungswege zu den Aufgaben **vollständig und nachvollziehbar** anzugeben und alle Aussagen zu begründen.
- Es gibt insgesamt 79 Punkte ✓, 12 davon sind Zusatzpunkte, d.h. **67 Punkte entsprechen 100%**.
- Es ist jede Art von Hilfsmittel erlaubt, das keine Kommunikation nach außen ermöglicht.

---

| **Aufgabe** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **Σ** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Mögliche Punkte** | **10** | **5** | **16** | **15** | **8** | **8** | **17** | **$67 + 12$** |
| **Erreichte Punkte** | | | | | | | | |

**Note:** ..................................................................

**Viel Erfolg!**

# Aufgaben

**Aufgabe 1 (10 Punkte)** ***Wahr oder Falsch?***
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind!
*Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt ✓. Nicht oder falsch beantwortete Teilaufgaben ergeben null Punkte.*

| **Frage Nr.** | **Aussage** | **wahr** | **falsch** |
|---|---|---|---|
| **1** | Von einer mathematischen Aussage kann man immer entscheiden, ob sie wahr oder falsch ist. | | |
| **2** | Es seien die quadratischen Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gegeben. Dann gilt $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{B}^\top$. | | |
| **3** | Es sei $S$ die Menge der Studierenden an der HTW Dresden, $C \subseteq S$ die Menge derjenigen, die Chemie studieren und $M \subseteq S$ die Menge derjenigen, die Medieninformatik studieren. Dann beschreibt $C \cup M$ die Menge derjenigen Studierenden der HTW Dresden, die Medieninformatik oder Chemie studieren. | | |
| **4** | Ein homogenes lineares Gleichungssystem kann eine leere Lösungsmenge besitzen. | | |
| **5** | Für beliebige quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist die Gleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ lösbar. | | |
| **6** | Für zwei quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt die binomische Formel $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$. | | |
| **7** | Die Zahl $2^4 \cdot 3^9 \cdot 41$ hat 101 Teiler in $\mathbb{N}$. | | |
| **8** | Es gilt $(AD)_{16} < (1010\,1110)_2$. | | |
| **9** | Für Binomialkoeffizienten gilt $\binom{12}{2} = \binom{12}{10}$. | | |
| **10** | Für positive reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. | | |

**Aufgabe 2 (5 Punkte)** ***Zahlentheorie***

(a) ✓✓✓ Stellen Sie die Zahl $(\mathbf{37,85})_{\mathbf{10}}$ als Binärzahl dar.

(b) ✓✓ Stellen Sie die Zahl $(\mathbf{110\,1011\,0110,1111\,101})_{\mathbf{2}}$ als Hexadezimalzahl dar.

**Aufgabe 3 (16 Punkte)** ***Lineare Algebra: Matrizen und Determinanten***
Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} \mu & 1 & -\mu \\ 0 & 1+\mu & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) ✓✓✓ Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen **A**, **B** und **C**.

(b) ✓✓✓✓✓ Entscheiden Sie, ob die Matrizen **A** und **B** invertierbar sind und berechnen Sie, falls möglich, die jeweiligen Inversen.

(c) ✓✓✓ Für welche $\mu \in \mathbb{R}$ ist die Matrix **C** invertierbar?

(d) ✓✓✓✓✓ Lösen Sie die Matrizengleichung $\mathbf{X} \cdot \mathbf{B} - 2\mathbf{E} = 0$, wobei die Matrix **B** wie oben gegeben ist und **E** die Einheitsmatrix sowei O die Nullmatrix eintsprechender Ordnung bezeichnen.

---

**Aufgabe 4 (15 Punkte)** ***Lineare Algebra: Lineare Gleichungssysteme***
Es sei das von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & \alpha x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \alpha x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

gegeben.

(a) ✓✓✓✓✓✓ Lösen Sie das LGS mit dem Gauß-Algorithmus. Geben Sie dabei alle Elementarumformungen an!

(b) Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das LGS. . .

(i) ✓ genau eine Lösung? (ii) ✓ unendlich viele Lösungen? (iii) ✓ keine Lösung?

✓✓✓✓✓✓ Geben Sie für jeden der drei Fälle die Lösungsmenge an!

---

**Aufgabe 5 (8 Punkte)** ***Vollständige Induktion***
✓✓✓✓✓✓✓✓ Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

---

**Aufgabe 6 (8 Punkte)** ***Lineare Algebra: Eigenwerte und Eigenvektoren***

Es seien die von zwei Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & b & -2 \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

✓✓✓✓✓✓ Bestimmen Sie die Werte von $a$ und $b$ so, dass $\mathbf{v}$ Eigenvektor von $\mathbf{A}$ ist.
✓✓ Wie lautet der zugehörige Eigenwert $\lambda$?

---

**Aufgabe 7 (17 Punkte)** ***Kombinatorik & Binomischer Lehrsatz***

(a) ✓✓ Berechnen Sie mit dem Binomischen Lehrsatz die $n$-te Summe im Pascalischen Dreieck:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} =$$

(b) Bernd lauscht außerhalb des Raumes einem Fest. Als alle anstoßen, zählt er die Anzahl der Kling mit und kommt auf 25.

(b1) ✓✓ Warum muss er sich verzählt haben?

(b2) ✓✓✓ Angenommen er hat zu wenig gezählt. Was ist dann die untere Grenze für die Anzahl der Leute, die an dem Fest teilnehmen?

(c) Sie haben die fünf Ziffern 1, 2, 2, 3, 4 und sollen aus diesen alle möglichen fünfstelligen Zahlen bilden. Die Zahlen denken Sie sich der Größe nach geordnet in einer Liste. Folglich ist die erste Zahl der Liste 12234 und die letzte Zahl der Liste 43221.

(c1) ✓✓ Wie viele Zahlen stehen in der Liste?

(c2) ✓✓ Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 2?

(c3) ✓✓ Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 3?

(c4) ✓✓ An welcher Stelle der Liste steht 13242?

(c5) ✓✓ Welche Zahl steht an der 50. Stelle?

---