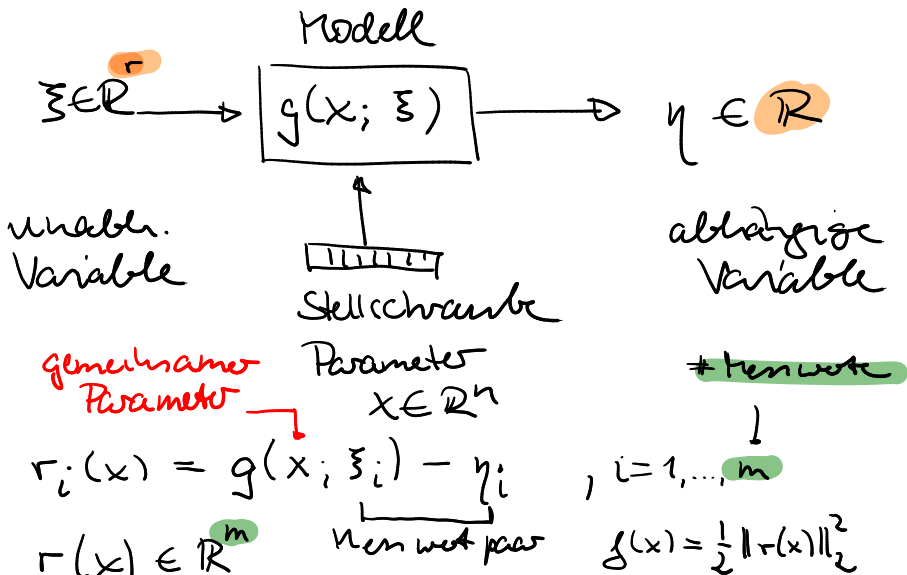


06 Parameteridentifikation:
Verfahren hinter `lsqcurvefit`
Optimierung für Nichtmathematiker
WS 2020/21

Wiederholung: KQ-Aufgaben



Quizfrage

Was ist die Dimension des Residuenvektors $r(x)$?

→ Umfrage

5 A $\dim r(x) =$ Dimension der abhängigen Variablen

4 B $\dim r(x) =$ Dimension der unabhängigen Variablen

1 C $\dim r(x) =$ Anzahl Parameter

13 D $\dim r(x) =$ Anzahl Messpaare

Quizfrage

Modellfunktion $g(x; \xi)$
Messwertpaare ξ, y
Startschätzung x_0

$$\left. \begin{array}{l} \text{Modellfunktion } g(x; \xi) \\ \text{Messwertpaare } \xi, y \\ \text{Startschätzung } x_0 \end{array} \right\} r_i(x) = g(x; \xi_i) - y_i$$

Was ist der Unterschied zwischen `lsqcurvefit` und `lsqnonlin`?

beide minimieren
 $f(x) = \frac{1}{2} \|r(x)\|_2^2$

→ Umfrage

Residuenfunktion $r(x) \in \mathbb{R}^m$
Startschätzung x_0

10 **A** Bei `lsqnonlin` programmieren wir die Residuenfunktion.

4 **B** `lsqcurvefit` löst allgemeinere KQ-Aufgaben.

7 **C** Bei `lsqcurvefit` programmieren wir die Modellfunktion.

4 **D** `lsqnonlin` benötigt keine Messwerte.

lsqcurvefit ist nur ein anderes Interface zu lsqnonlin

Quizfrage

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Komponenten-} \\ \text{funktionen} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}} \right\} m$$

Es sei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Welche Dimension hat die Jacobimatrix $J(x)$?

→ Umfrage

1 A $J(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$

2 B $J(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

13 C $J(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

2 D $J(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$J(x) = g'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_m(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_m(x) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow g_1 \\ \vdots \\ \leftarrow g_m \end{array} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_m(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_m(x) \end{bmatrix}} \right\} m$$

Quizfrage

Welche Aussage trifft auf die Jacobimatrix der Residuenfunktion $r(x)$ zu?

$$r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

← Anzahl Messwerte

→ Umfrage

5 A Jede Spalte gehört zu einem Messwert.

3 B Jede Zeile gehört zu einem Messwert.

5 C Jede Spalte gehört zu einem Parameter.

4 D Jede Zeile gehört zu einem Parameter.

$$J(x) = \begin{matrix} \boxed{} \\ \downarrow \text{Messungen} \\ \hline \\ \rightarrow \text{Parameter} \end{matrix}$$

Quizfrage

Welche Darstellung hat die 1. Ableitung (Gradient) der Zielfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2} \|r(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} r(x)^T r(x) ? \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i(x)^2$$

→ Umfrage *Jacobimatrix der Residuenfkt. r(x)*

1 **A** $\nabla f(x) = J(x)$

2 **B** $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m \nabla r_i(x)$

16 **C** $\nabla f(x) = J(x)^T r(x)$

2 **D** $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x) \nabla r_i(x)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} r_1(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1} r_m(x) \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1(x) \\ \vdots \\ r_m(x) \end{pmatrix}$$

Quizfrage

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= J(x)^T r(x) \quad \text{oder} \quad J(x)^T J(x) \\ &= \sum_{i=1}^m r_i(x) \nabla r_i(x) \quad +\end{aligned}$$

Welche Darstellung hat die 2. Ableitung (Hessematrix) der Zielfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2} \|r(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} r(x)^T r(x) ?$$

→ Umfrage

- 4 A $\nabla^2 f(x) = J(x)^T J(x)$ 12 B $\nabla^2 f(x) = \square$
1 C $\nabla^2 f(x) = J(x) J(x)^T$ $J(x)^T J(x) + \sum_{i=1}^m r_i(x) \nabla^2 r_i(x)$
2 D $\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x) \nabla^2 r_i(x)$

Quizfrage

Warum vermeiden die meisten Verfahren für KQ-Aufgaben die Verwendung der Hessematrix

$$\nabla^2 f(x) = \underbrace{J(x)^T J(x)}_{\text{Schmidtschritt}} + \sum_{i=1}^m r_i(x) \underbrace{\nabla^2 r_i(x)}_{\text{2. Ableitung der Residuenfunktion}}$$

der Zielfunktion?

bereits bekannt aus 1. Ableitung

2. Ableitung der Residuenfunktion

→ Umfrage

12 A Die Berechnung ist aufwändig.

7 C Die Hessematrix ist nicht immer positiv definit.

0 B Die Hessematrix ist nicht immer symmetrisch. *deh!*

2 D Doch, die meisten Verfahren verwenden die Hessematrix.

Quizfrage

Welche Hessematrizen B_{LM} verwendet das Levenberg-Marquardt-Verfahren in seinen Modellen

$$q_{LM}(d) := f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T B_{LM} d ?$$

λ klein $\cup \lambda$ groß

→ Umfrage

Einheitsmatrix $n \times n$

für positive Definitheit

A $B_{LM} = I$

B $B_{LM} = J(x)^T J(x) + \lambda I$

C B_{LM} wie bei BFGS

D $B_{LM} = J(x)^T J(x)$

Quizfrage

Welche Rolle spielt der Parameter λ in den Modellen des LM-Verfahrens?

→ Umfrage

7 **A** garantiert die positive Definitheit von B_{LM}

5 **C** Dämpfungsparameter

$$(\nabla^T \nabla + \lambda \mathbf{I}) d = -\nabla^T r$$

↑

$$s = \frac{f(x) - f(x+d)}{f(0) - f(d)}$$

2 **B** Fortschrittsquotient

6 **D** bestimmt indirekt die Schrittlänge
von $x^{(k)}$ zu $x^{(k+1)}$

Wahl

Matlab-Demonstration

Preisabsatzfunktion.m

Quizfrage konvex, keine lokalen Minima (zusätzlich zu den globalen)

Wann spricht man von einer **linearen**
Kleinste-Quadrate-Aufgabe?

$$f(x) = \frac{1}{2} \|r(x)\|^2$$

→ Umfrage

A wenn die Zielfunktion linear
in x ist: $f(x) = c_0 + c_1^T x$

C wenn die Modellfunktion
linear in x ist:
 $g(x; \xi) = g_0(\xi) + g_1(\xi)^T x$

B wenn die Modellfunktion
linear in ξ ist:
 $g(x; \xi) = g_0(x) + g_1(x)^T \xi$

D wenn die Residuenfunktion
linear in x ist

$$r_i(x) = g(x; \xi_i) - y_i$$

Quizfrage



In einer Aufgabe seien $(a, z) \in \mathbb{R}^2$ die unabhängigen Variablen und $x \in \mathbb{R}$ der Parameter. Im welchem Fall der Modellfunktion haben wir eine lineare KQ-Aufgabe?

→ Umfrage

- A $\sin(a) + \cos(z) x$
- C $\sin(x) + \cos(a) z$

- B $\sin(z) + \cos(x) a$
- D $\sin(z) + x a$

Zeit für Ihre Fragen

Was sind Ihre Fragen zu den Themen der Woche?

→ Benutzen Sie den **Chat**.

Fragen und Antworten 1

Fragen und Antworten 2