Aufgabe 3.5

In dieser Aufgabe geht es um aussagenlogische Formeln $\phi \in AL(P)$, in denen ausschließlich Aussagenvariablen
und Junktoren aus der Menge $\{\vee, \wedge\}$ vorkommen.

a. Definieren Sie die Menge $AL\{\vee,\wedge\}(P)$ dieser eingeschränkten Formeln induktiv. (Diese Menge ist für jede nichtleere Menge P unendlich.)

Die Menge $AL\{\vee,\wedge\}(P)$ besteht aus allen aussagenlogischen Formeln, die nur die Aussagenvariablen P und die Junktoren Disjunktion und Konjunktion verwenden.

Die Definition erfolgt induktiv:

Jede Aussagenvariable $p \in P$ ist in $AL\{\vee,\wedge\}(P)$

b. Geben Sie drei Formeln $\phi, \psi, \eta \in AL\{\vee,\wedge\}(\{p, q, r\})$ an mit $size(\phi) = 1$, $size(\psi) = 5$ und $size(\eta) = 11$.

$\phi = p$

$\psi = (p\vee(q\wedge r))$

$\eta = ((p\wedge q)\vee((p\vee q)\wedge(r\vee p)))$

c. Geben Sie zu jeder Menge P von Aussagenvariablen eine Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ an, die jede Formel $\phi \in AL\{\vee,\wedge\}(P)$ erfüllt.

Für $P = \{x, y, z\}$:

$W(x) = 1$

$W(y) = 0$

$W(z) = 1$

d. Weisen Sie mit Hilfe dieser Belegung W durch strukturelle Induktion nach, dass jede Formel in $\phi \in AL\{\vee,\wedge\}(P)$ erfüllbar ist.

Jede Aussagenvariable $p \in P$ wird durch die Belegung $W(p) \in \{0,1\}$ erfüllt.

Da wir jede Aussagenvariable erfüllen können und jede Formel durch die Induktionsregeln auf verschiedene Kombinationen von erfüllten Formeln reduziert werden können, ist jede Formel in $AL\{\vee,\wedge\}(P)$ erfüllbar.