



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Zentrum für Lehrer*innenbildung und Unterrichtsforschung
Professur Grundschuldidaktik Mathematik

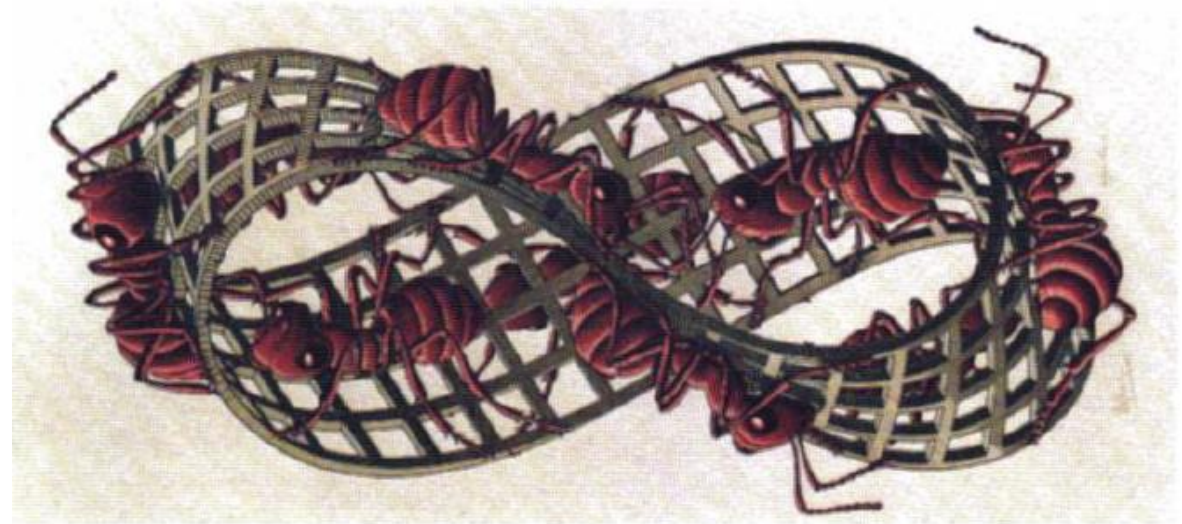


Didaktik der Geometrie

- Vorlesung Basismodul LAGS-GSD-MA-VM2

5.3 Platonische Körper

5.4 3D-Darstellung



Grundschuldidaktik Mathematik
Prof. Dr. phil. Birgit Brandt
Sommersemester 2024/25

Platonische Körper



Platonische Körper (Aufgabe 5.6)

5.6 Mit welchen regelmäßigen Vielecken lassen sich platonische Körper gestalten? Begründen Sie, warum daher nur 5 platonische Körper existieren.

Reguläre Polyeder

- a) alle Begrenzungsflächen sind kongruente, regelmäßige Polygone
- b) an allen Ecken treffen sich die gleiche Anzahl an Kanten.

360°-Regel zur Bestimmung

vgl. Helmerich & Lengnink 2016, S.88f

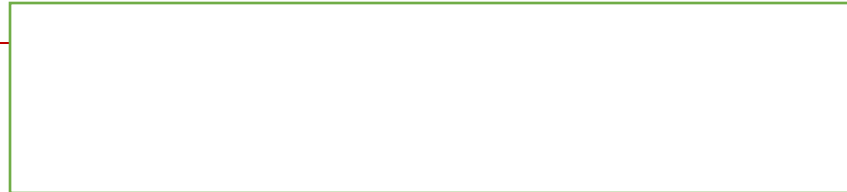
Ist die Summe der Innenwinkel der sich an einer Ecke treffenden Flächenstücke

- ▶ *kleiner als 360° , dann entsteht ein Polyeder.*
- ▶ *gleich 360° , dann entsteht ein Parkett.*

Platonische Körper(Aufgabe 5.6)

5.6 Mit welchen regelmäßigen Vielecken lassen sich platonische Körper gestalten? Begründen Sie, warum daher nur 5 platonische Körper existieren.

Innenwinkelsumme Vieleck:
Innenwinkel reguläres Vieleck:



Platonische Körper

Reguläre Polyeder

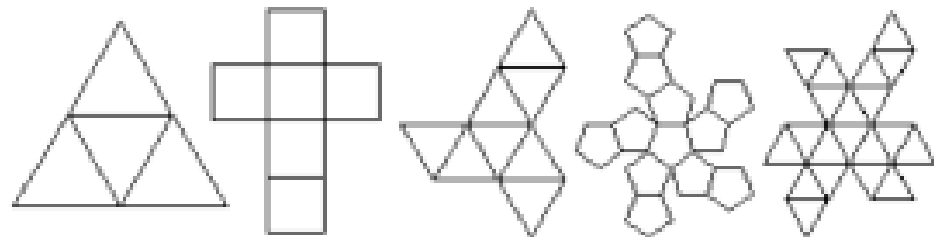
- a) alle Begrenzungsflächen sind kongruente, regelmäßige Polygone
- b) an allen Ecken treffen sich die gleiche Anzahl an Kanten.



Dreieck: Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder

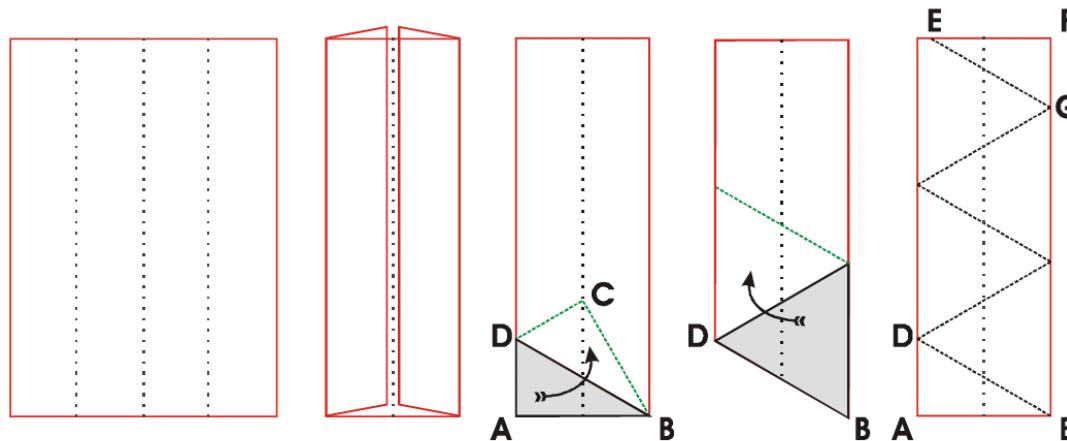
Viereck: Würfel

Fünfeck: Dodekaeder



<http://www.mathematische-basteleien.de/platonisch.html>

TETRAEDER FALTEN: Kurzanleitung



1. DIN-A4 Blatt: „Schrank“ falten
2. Eckpunkt A auf die Mittellinie falten, so dass die Faltnie durch Punkt B geht
3. Das „gleichseitige“ Dreieck wiederholt umklappen, bis das Ende erreicht ist
4. Aufklappen und die entstandenen Dreiecke zum Tetraeder formen
5. Ecklasche ABD in die Tasche EFG stecken

Platonische Körper

Kennzahlen der Platonischen Körper

Name	Fläche	Anzahl Flächen	Anzahl Kanten	Anzahl Ecken
Tetraeder	Dreieck	4	6	4
Hexaeder (Würfel)	Viereck	6	12	8
Oktaeder	Dreieck	8	12	6
Dodekaeder	Fünfeck	12	30	20
Ikosaeder	Dreieck	20	30	12

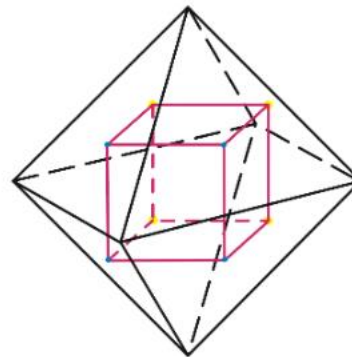
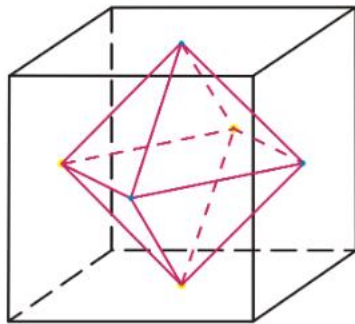
Siehe Krauter & Bescherer 2013: Erlebnis Elementargeometrie (S. 86)

Platonische Körper

Dualkörper

Konstruktion: Mittelpunkte der Begrenzungsfläche als neue Eckpunkte

→ Eckenanzahl und Flächenanzahl wird vertauscht, Kantenanzahl bleibt identisch



Duales Verhältnis:
Würfel – Oktaeder

Rösler 2008: Die Symmetrien der regulären Polyeder. (https://math.uni-paderborn.de/fileadmin/mathematik/AG_Harmonische_Analysis/Publications_Roesler/polyedervortrag.pdf)

Siehe auch Krauter & Bescherer 2013: Erlebnis Elementargeometrie (S. 86)

Platonische Körper

Dualkörper: Paarungen

Name	Flächen	Ecken	Kanten	Dualkörper
Tetraeder	4	4	6	Tetraeder
Hexaeder	6	8	12	Oktaeder
Oktaeder	8	6		Hexaeder
Dodekaeder	12	20	30	Ikosaeder
Ikosaeder	20	12		Dodekaeder

Siehe Krauter & Bescherer 2013: Erlebnis Elementargeometrie (S. 88f)

Schulbuchbeispiel

- ② Aus einem gleichseitigen Sechseck kannst du verschiedene Ecken herstellen, für 3, 4 oder auch 5 Kanten. Das geht ganz einfach. Du faltest ein Sechseck dreimal und schneidest eine Faltnie bis zur Mitte ein.



- b) Für eine Ecke mit 4 Kanten schneidest du nur ein Dreieck ab. Der Körper, der entsteht, heißt Oktaeder. Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat er?



- a) Für eine Ecke mit 3 Kanten schneidest du 2 Dreiecke ab. Ein Dreieck benutzt du als Klebefläche. Nimm gleich lange Streifen und klebe sie an die Ecken. Baue immer weiter. Welcher Körper entsteht auf diese Weise?

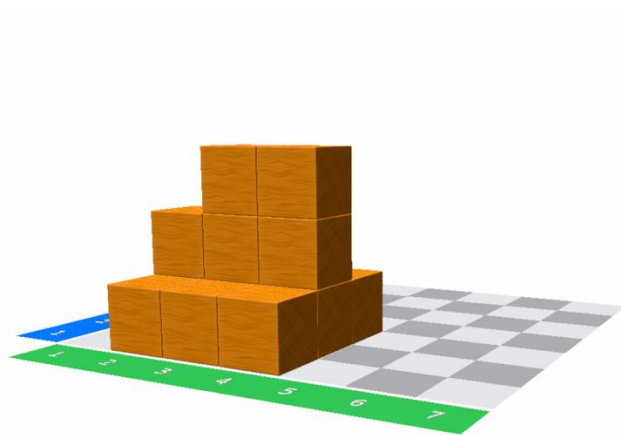


- c) Eine Ecke für 5 Kanten kannst du jetzt sicher selbst herstellen. Aber Vorsicht: Für einen solchen Körper braucht man viel Geduld. Er hat 12 Ecken und 30 Kanten!



Baupläne zu mehrdeutigen Ansichten

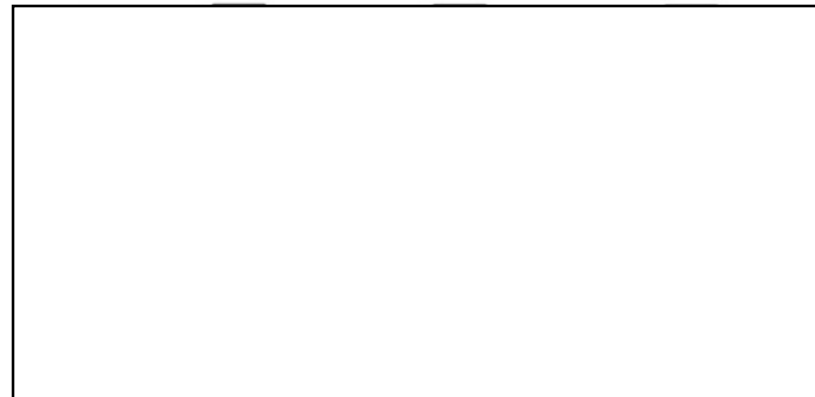
5.9 Stellen Sie das nachfolgende durch Parallelprojektion visualisierte Würfelgebäude als Bauplan dar. Wie viele verschiedene Baupläne gibt es?



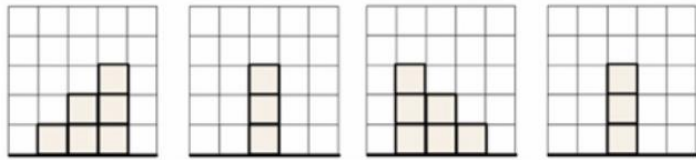
		1
2	3	3
1	1	1



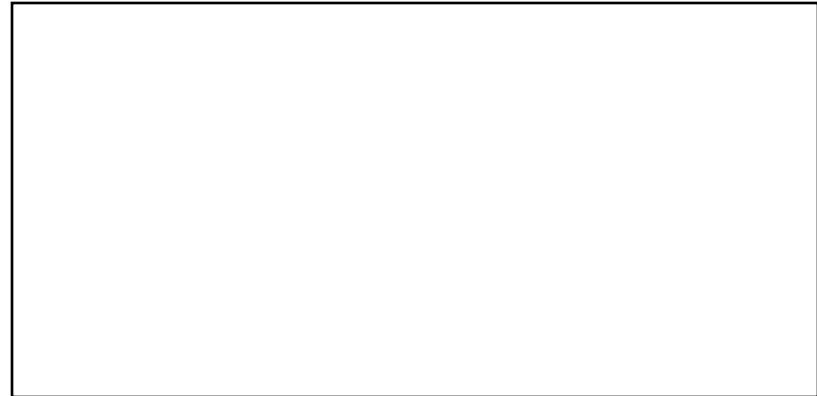
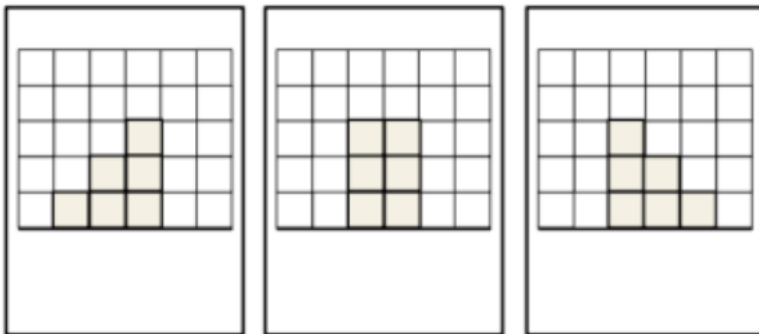
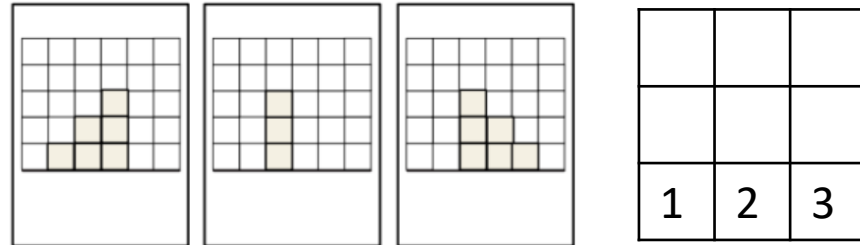
Zwei Seitenansichten



Mehrdeutige Ansichten – Mehrdeutige Baupläne



Vier Seitenansichten zu einem Würfelgebäude



Projektionen

Zentralprojektion: Strahlen gehen von einem Punkt aus

(OH-Projektor, Sehvorgang, Schattenwurf punktförmiger Lichtquellen)

- Entspricht der Anschauung, ist aber konstruktiv aufwendig

Parallelprojektion: Strahlen verlaufen parallel

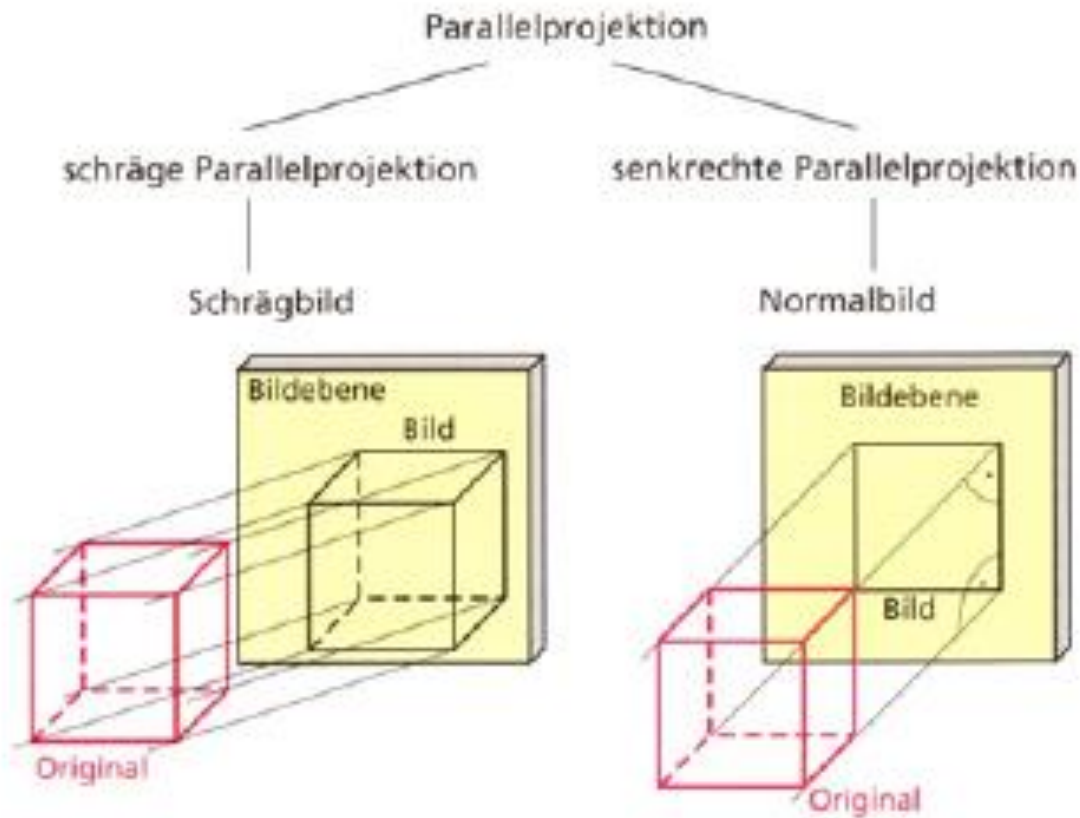
(Schattenwurf Sonnenstrahlen – idealisiert)

- Relativ anschaulich, konstruktiv einfacher
- Parallelentreu und teilverhältnistreu

Beide Projektionsarten sind **nicht-injektive Abbildungen** vom dreidimensionalen Raum auf die zweidimensionale Ebene:

Jedem Originalpunkt wird genau ein Bildpunkt zugeordnet – aber mehrere Originalpunkte fallen auf denselben Bildpunkt.

Parallelprojektion

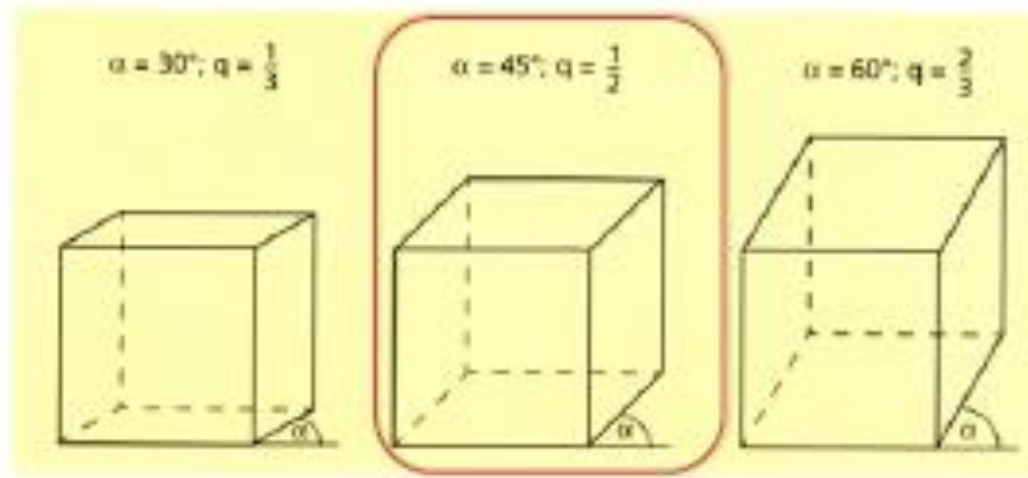


Senkrechte
Parallelprojektion:

aus: Basiswissen Mathematik, S. 268

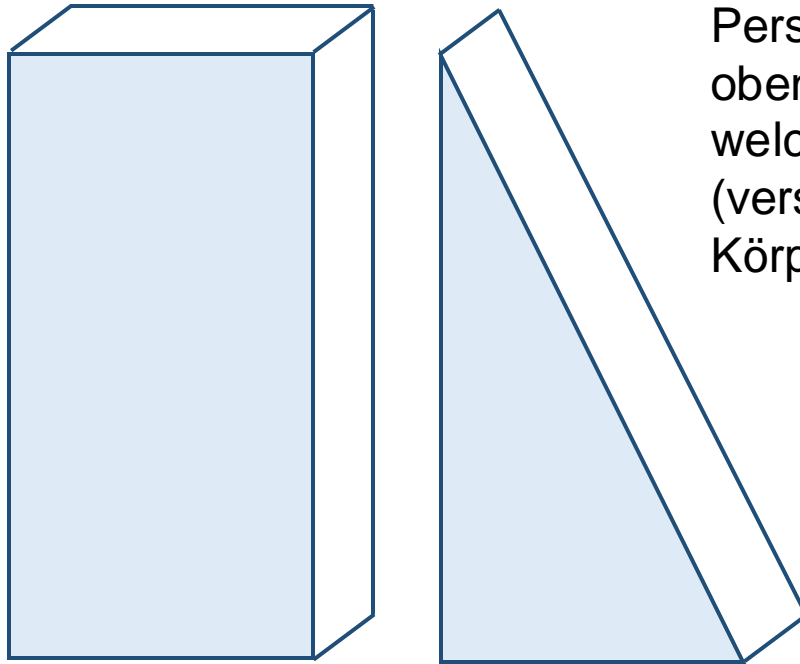
Parallellprojektion – Kavalierprojektion

- Größe des Winkels der Projektion (Winkel zwischen Breitenlinie und Tiefenlinie)
- Längenverhältnis zur Originallänge entlang der Tiefenlinien



aus: Basiswissen Mathematik, S. 268

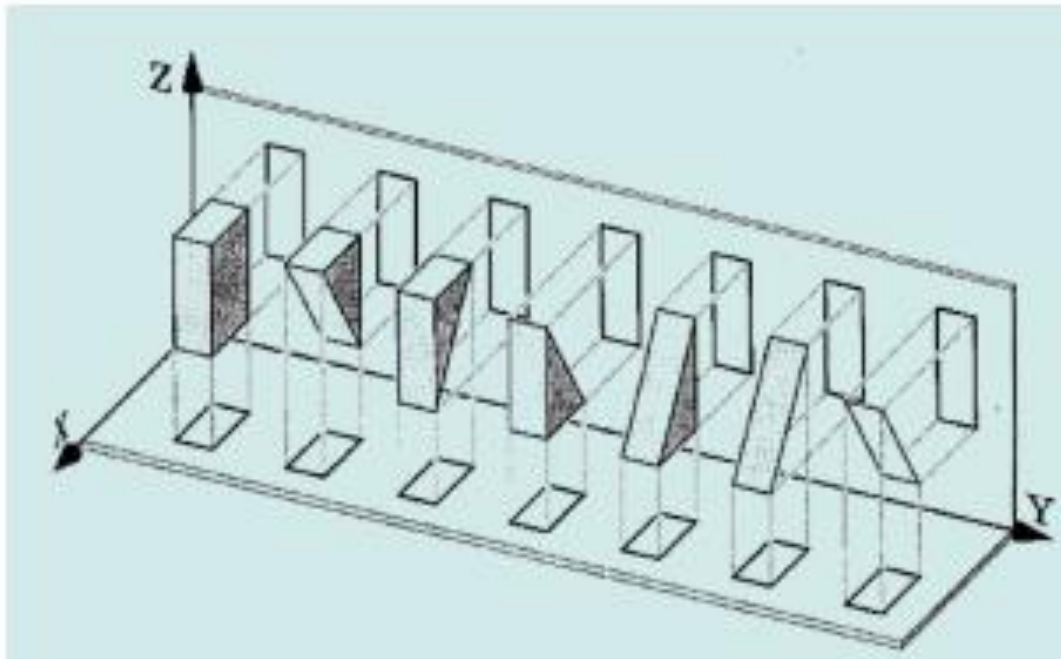
Mehrtafelprojektion – Frontalansichten aus verschiedenen Perspektiven



5.8 Skizzieren Sie zu den nachfolgenden durch Parallelprojektion visualisierten Körpern Frontalansichten aus allen Perspektiven (rechts, vorne, links, hinten, oben, unten) und vergleichen Sie. Bei welchen Kombinationen aus zwei oder drei (verschiedenen) Perspektiven sind beide Körper unterscheidbar, bei welchen nicht?

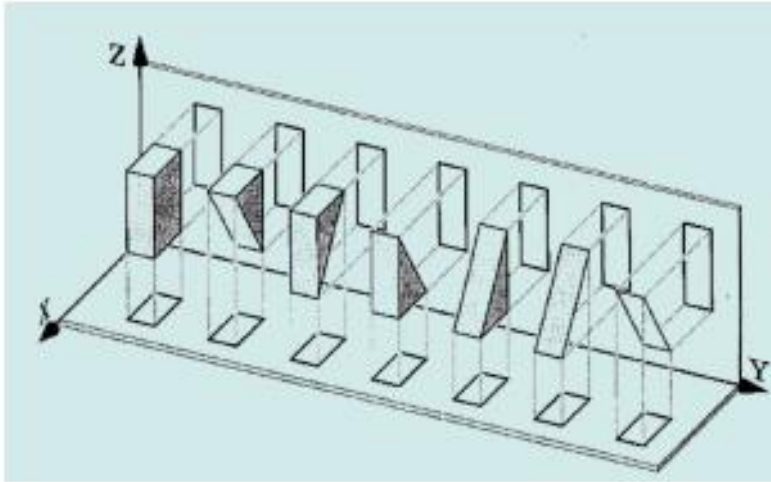
ZWEITAFELPROJEKTION

- Grundriss (Vogelperspektive)
- Aufriss (Vorderansicht)

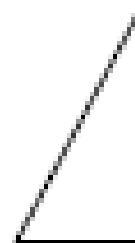
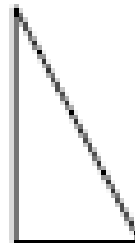
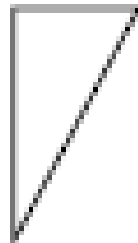
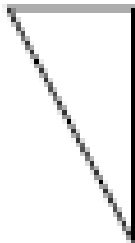
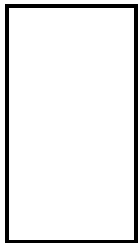


Ohne Bezeichnung der Punkte ist die Zweifafelprojektion mehrdeutig.

DREITAFELPROJEKTION



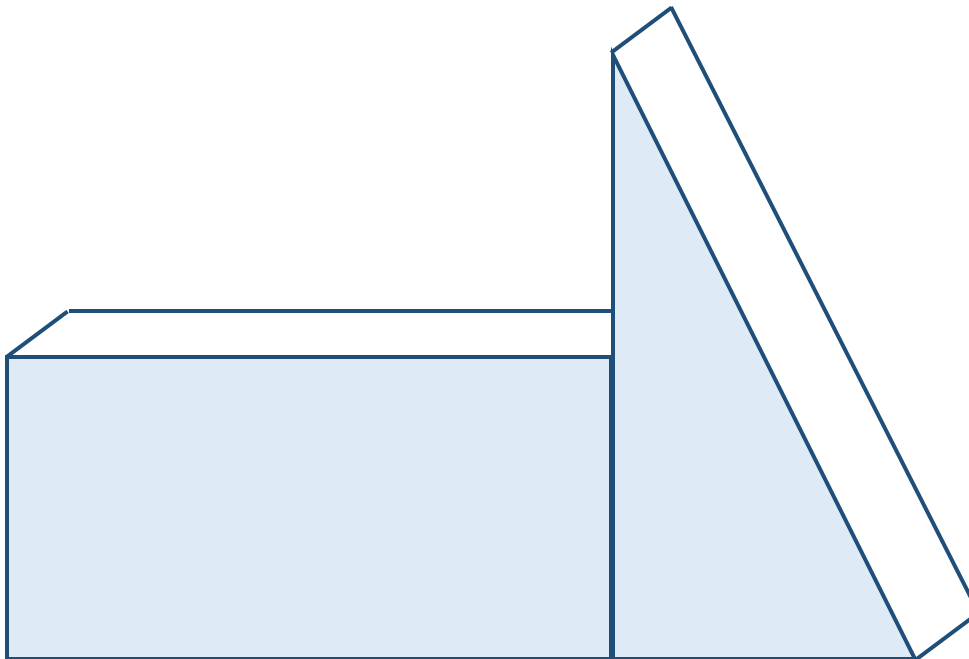
- Grundriss
- Aufriss



- Seitenriss
(Seitenansicht)

Aufriss und Seitenriss sind jeweils orthogonale Parallelprojektionen auf eine senkrecht zur Grundrissebene stehende Zeichenebene, die nur im Kontext als Auf- bzw. Seitenriss unterschieden werden können.

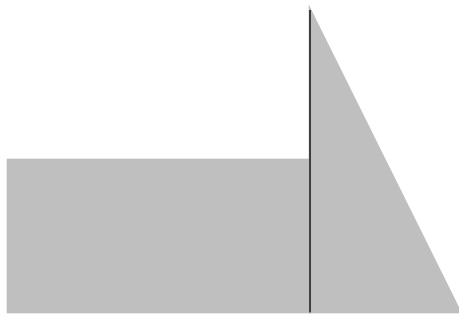
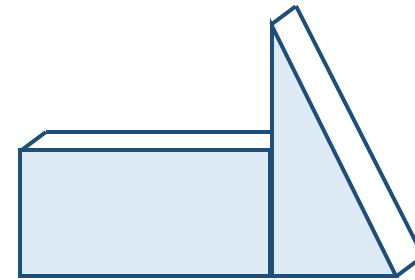
Dreitafelprojektion – Frontalansichten aus drei Perspektiven



Skizzieren Sie dieses Bauwerk von vorne, von rechts und von unten!

Dreitafelprojektion – Frontalansichten aus drei Perspektiven

Skizzieren Sie dieses Bauwerk von vorne, von rechts und von unten!



Frontal von vorne

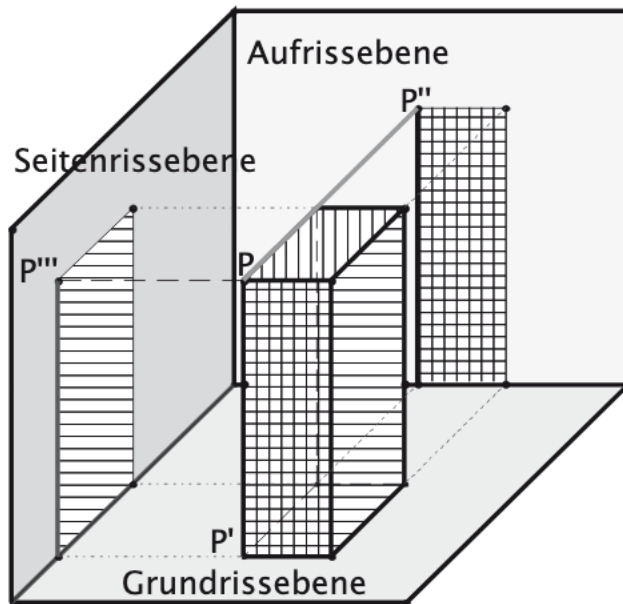


Frontal von rechts

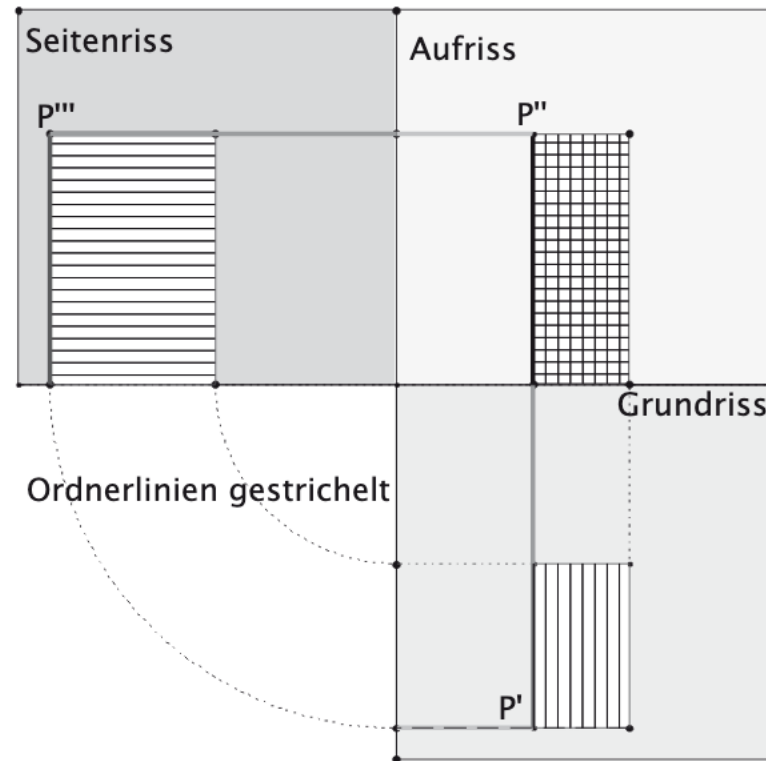


von unten

DREITAFELPROJEKTION



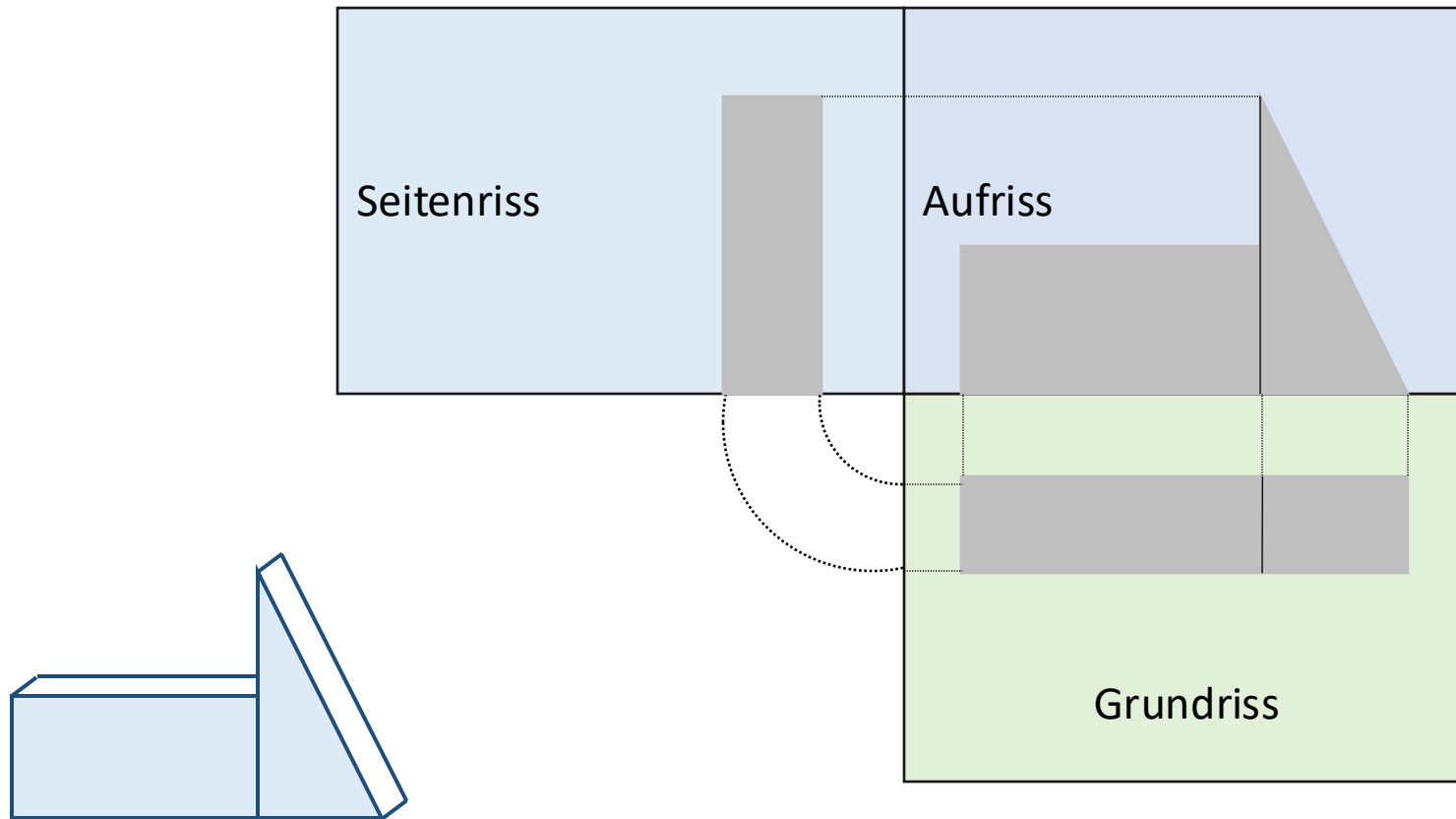
Räumliche Anordnung



Zugeordnete Rissebenen

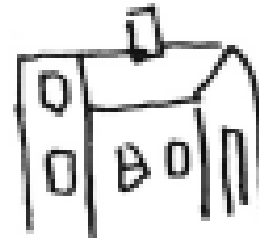
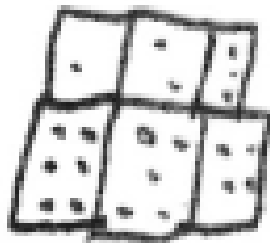
Krauter, Bescherer 2013: Erlebnis Elementargeometrie

Dreitafelprojektion

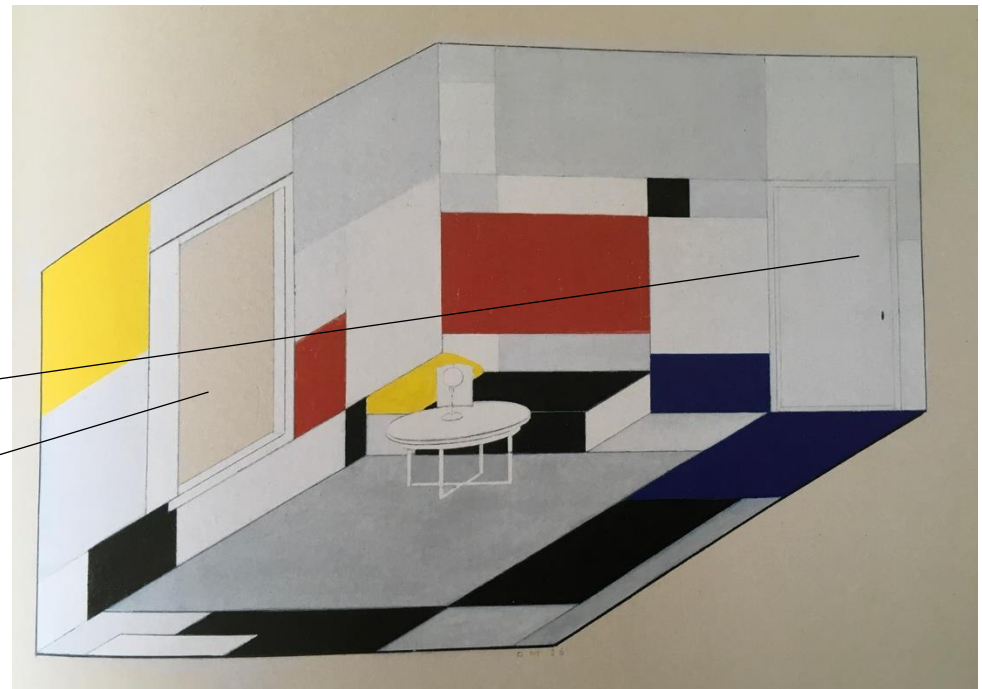
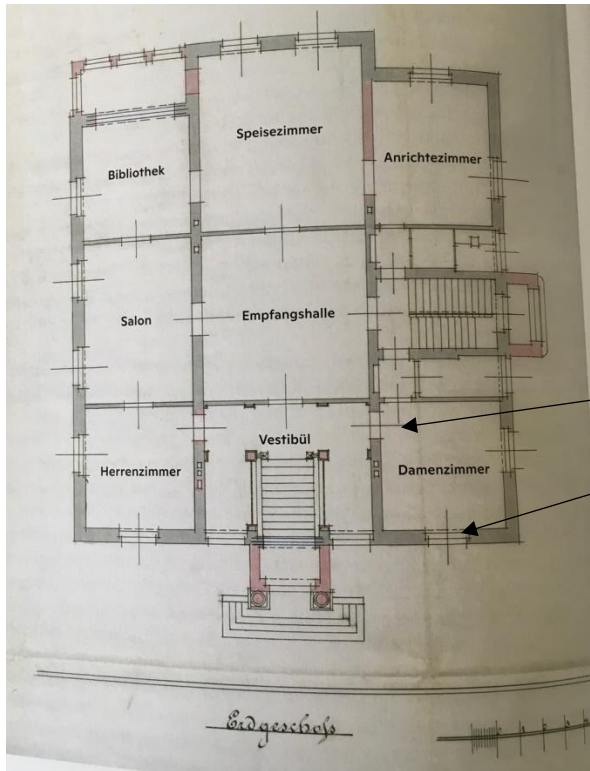


„Klappbilder“ bei Kindern – Mehrtafelprojektionen

- **Parallelprojektion aus verschiedenen Perspektiven**



Mehrtafelprojektion in der Kunst



Farbentwurf Piet Mondrian für das Damenzimmer
in der Villa von Ida Bienert

Mehrtafelprojektion in der Kunst



Farbentwurf Piet Mondrian für das Damenzimmer
in der Villa von Ida Bienert



VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT



Escher: Möbiusband