

MT

Modul Geoelektrik und EM

19.12.2023

Institut für Geophysik und Geoinformatik

Gliederung

Gliederung

- Maxwell-Gleichungen
- PDE und ihre Lösung
 - Homogener Halbraum: Skintiefe
- Impedanz
- Mehrschichtfall
- 2-D MT
 - E- und H-Polarisation

Grundlagen

Zeitbereich:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_E$$

Kopplung durch Materialgleichungen:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

und Ohmsches Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

liefert System gekoppelter Differentialgleichungen.

Annahme: Materialparameter σ , μ und ε sind *homogen, stationär* und *linear*.

Herleitung der Induktionsgleichung (Rot-Rot)

Lösung der Induktionsgleichung (Rot-Rot)

Warum ist $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$?

Telegrafengleichung

Gleichungen im Frequenzbereich

Definition der Fouriertransformation:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{Analyse}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{+i\omega t} d\omega \quad \text{Synthese}$$

Helmholtzgleichung

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

mit

$$k^2 = -i\omega\mu\sigma \text{ Wellenzahl.}$$

Lösung

Anregung Magnetfeld. Leitfähigkeit in $z \geq 0$ sei $\sigma > 0$. Magnetfeld sei $\mathbf{H} = [0, H_y, 0]^\top$.

Transversalwelle $\mathbf{H} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{k}$.

Dazu passt $\mathbf{E} = [E_x, 0, 0]^\top$.

Wie lautet $E_x(z)$ im Halbraum $z \geq 0$?

$$E_x(z) = E_x(0) e^{-ikz} = E_x(0) e^{-i\alpha z} e^{-\beta z}$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

$z \geq 0$ im leitf. Halbraum

Amplitudenverhältnis $\frac{E_x(z)}{E_x(0)} = e^{-\beta z}$ exponentiell mit Tiefe gegen \emptyset .



Interessant: In welcher Tiefe gilt $\frac{E_x(z)}{E_x(0)} = e^{-1}$?

$$e^{-1} = e^{-\beta z} \rightarrow z = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} !$$

Wie groß ist τ ?

$$\sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot f \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \sigma}} = 503 \sqrt{\frac{1}{f \sigma}} = 503 \sqrt{\frac{\rho}{f}} = 503 \sqrt{\rho T} = \tau$$

↑ spec. el. Leit.
↓ Periodendauer

$$[\tau] = \text{m} \quad [\rho] = \Omega \cdot \text{m} \quad [T] = \text{s}$$

τ wird elektromagn. Eindringtiefe genannt. (Th. Phys. 2: Skintiefe)

Skalenlänge

MT: $T = 1000 \text{ s}$ $\tau = 503 \sqrt{10^5}$
 $\rho = 100 \Omega \cdot \text{m}$ $= 159 \text{ km}$
 $T = 1 \text{ s} \rightarrow \tau = 5.03 \text{ km}$

$f = 10^4 \text{ Hz} : \tau = 10^5 \text{ s} : \left(\frac{50 \text{ m}}{10^5 \text{ s}} \right)$

Impedanz

Impedanzkonzept der Magnetotellurik

$$\epsilon = \frac{\Phi}{\#I} = \frac{r}{\epsilon} \frac{u}{A} = \frac{V}{A} = R$$

$$Z(\omega) = \frac{e_h \cdot E}{(e_h \times e_z) \cdot B} = \frac{E_x}{B_y} = -\frac{E_y}{B_x}$$

↗ Messung
↖

mit e_h : horizontaler Einheitsvektor, z.B. e_x oder e_y .

Wie kommen wir von $Z(\omega)$ zu
 $\rho(a)$ im Halbraum?

Impedanz ausrechnen aus $E_x(z)$ von Herleitung (oben) für homogenen Halbraum?

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega \vec{B} = -i\omega \mu \vec{H} \quad (\vec{H} = (0, H_y, 0)^T)$$

$$(\nabla \times \vec{E})_y \rightarrow H_y, \quad E_x \rightarrow z$$

$$E_0 := E_x(0)$$

$$\psi: \quad \partial_z E_x - \cancel{\partial_x E_z} = -i\omega \mu H_y \quad H_y(z) = -\frac{1}{i\omega \mu} \partial_z E_x(z) = -\frac{1}{i\omega \mu} \partial_z [E_x(0) e^{-ikz}]$$

$$= -\frac{1}{i\omega \mu} (-ik) E_0 e^{-ikz}$$

$$H_y(z) = \frac{k}{\omega \mu} E_x(z)$$

$E(z)$ in $z=0$:

$$Z_S := \frac{E_x(0)}{H_y(0)} = \frac{\omega \mu}{k} = Z_1$$

Z_1 : Intr. Impedanz der 1. Schicht eines geschichteten Halbraums
hier hat 1. Schicht unendliche Mächtigkeit

Z_S : Oberflächenimpedanz (Messgröße)

Z_1 : Intrinsische Impedanz des Halbraums.

⇒ Im Falle des hom. Halbraums stimmen Z_S und Z_1 überein!

$$Z_1 = \frac{\mu \omega}{k_1}, \quad Z_1^2 = -i\omega \mu \epsilon_1$$

Beispiel:

1. Z für $\sigma = 0$? $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \cancel{i\omega\mu\sigma} \rightarrow 0$

$$Z = \frac{\omega \mu}{k} \quad k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$= \frac{\omega \mu}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376 \Omega$$

Wellenwiderst. des Vakuums $\sqrt{\frac{\cancel{\mu_0} \cancel{\mu_0}}{\cancel{\epsilon_0} \cancel{\epsilon_0}}} = \Omega$

2. Erde, $\sigma > 0$, $Z = ?$

$$Z = \frac{\omega \mu}{k} = \sqrt{\frac{\omega \mu \epsilon}{-i\omega \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{i\omega^2 \mu \epsilon}{\cancel{\omega \mu \sigma}}} = \sqrt{i} \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$$

$$|Z| = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}}, \quad \arg(Z) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$



komplex!

ausgewählte Größergleichung: $\sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi f \mu \epsilon \cdot 10^9}{2}} = 0.002 \sqrt{f \mu}$

$$Z = 0.002 (1+i) \sqrt{f \mu}$$

$$T = 100 \mu\text{s} \quad \tau = 50.3 \text{ km}, \quad |Z| = 0.002 \Omega, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \cdot \tau = 310 \text{ km}$$

Impedanzkonzept der Magnetotellurik

$$Z(\omega) = \frac{\mathbf{e}_h \cdot \mathbf{E}}{(\mathbf{e}_h \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{B}} = \frac{E_x}{B_y} = -\frac{E_y}{B_x}$$

mit \mathbf{e}_h : horizontaler Einheitsvektor, z.B. \mathbf{e}_x oder \mathbf{e}_y .

Impedanzkonzept der Magnetotellurik

Begriffe:

- Oberflächenimpedanz des homogenen Halbraums Z_s
- Intrinsische Impedanz des homogenen Halbraumes Z_1

Beide stimmen im Falle des homogenen Halbraums überein!

Beispiele

Darstellungsgrößen

Kom. Halbwertzeit: $z_s = z_1 = \frac{\omega_k}{k_1} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\sigma}} (1+i)$ in $z=0$

$$z_s^2 = \frac{i\omega_k}{\sigma} \rightarrow \rho = \frac{1}{i\omega_k} z_s^2 \quad (\text{leider komplex, daher folgende Definition:})$$

1. $\rho_s := \frac{1}{\omega_k} |z_s|^2$ (reell)

SCHEINBARE SPEZ. WIDERSTAND der HT

2. Phasenwinkel $\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im}(z_s)}{\operatorname{Re}(z_s)}$

Im kom. HR ist wegen

$$z_s \sim (1+i)$$

$\operatorname{Im} = \operatorname{Re}(z_s)$, daher

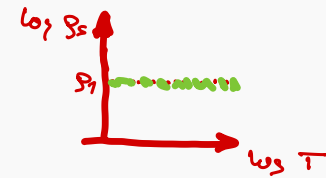
$$\varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \text{ oder } 45^\circ$$

Beide Größen (β_s und φ) werden Darstellungsgrößen genannt.

Üblich sind Darstellungen in Form von SONDIERUNGSKURVEN, d.h.

$$\beta_s = \beta_s(\tau) , \varphi = \varphi(\tau)$$

1. Sondierungskurve für β_s **doppelt logarithmisch**



β_s \log
 τ \log

2. Sondierungskurve für φ : **halb logarithmisch**



φ linear
 τ \log

Mehrschichtfall

Verhalten der Felder an Grenzflächen

Informationsgehalt der Messgrößen E und B

Z_S an der Oberfläche des geschichteten Halbraums

Der WAIT-Algorithmus

Asymptotisches Verhalten von ρ_s im Zweischichtfall

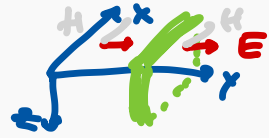
Ausgehendes Feld: Magnetfeld



INDUCTIVER EFFEKT

E-Polarisation

E \parallel Strichrichtung

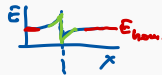


GALVANISCHER EFFEKT

H-Polarisation

H \parallel Strichrichtung

$\nabla_t \cdot \mathbf{D}_2$ Qu. N. $\nabla \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \nabla$
 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$
 $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \nabla \epsilon \cdot \mathbf{E} + \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E}$
 $= \nabla \epsilon \cdot \mathbf{E} + \epsilon \frac{\rho}{\epsilon_0}$
 $\rho \mathbf{E} = -\epsilon \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$



 Ladungskummulation an Grenzflächen

2-D MT

E- und H-Polarisation

- 2.D: Leitfähigkeit ist konstant (uniform) in x-Richtung.

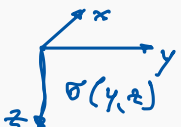
- Für senkrecht zur x-Achse verlaufende homogene Magnetfeld-
erregung entkoppeln die beobachteten
felder in E-Pol. und H-Pol.

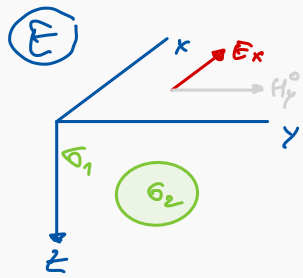
Zwei „Moden“: TE mode
TM mode

unabhängig voneinander

$$\partial_x \sigma = 0$$

x: STREICHRICHTUNG

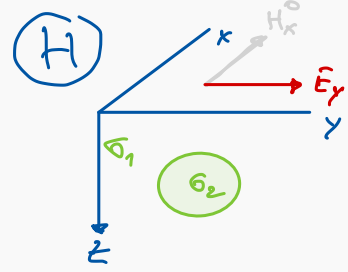




$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z E_x \\ -\partial_y E_x \end{pmatrix} \quad \nabla \times \nabla \times \vec{E} :$$

$$-\nabla \cdot (\mu^{-1} \nabla E_x) + i\omega \sigma E_x = 0 \quad \text{Numerische Lösung!}$$



$$\vec{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z H_x \\ -\partial_y H_x \end{pmatrix} \quad \nabla \times \nabla \times \vec{H} :$$

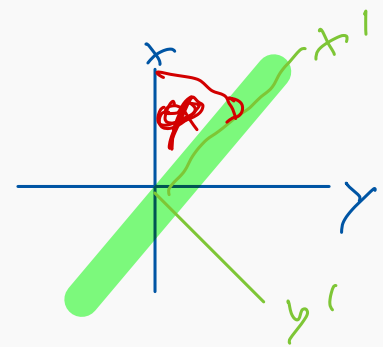
PDE:

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) + bu = 0 \quad \nabla \cdot (\sigma^{-1} \nabla H_x) + i\omega \mu H_x = 0$$

E-Pol:
 $u := E_x$
 $k := \mu^{-1}$
 $b := i\omega \sigma$

H-Pol:
 $u := H_x$
 $k := \sigma^{-1}$
 $b := i\omega \mu$

PDE gilt für beide Polarisierungen!



Die zur Berechnung der Impedanz können Feldkomponenten erhalten wir aus der Anwendung der entsprechenden Maxwell-Gleichung.

E: ges. E_x : $\nabla \times \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}$
 H_y, H_z

H: ges. H_x : $\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E}$

Post-Processing

Impedanz Z : Ansatz:

$$\begin{matrix} E_x & = & z_{xx} H_x + z_{xy} H_y \\ E_y & = & z_{yx} H_x + z_{yy} H_y \end{matrix}$$

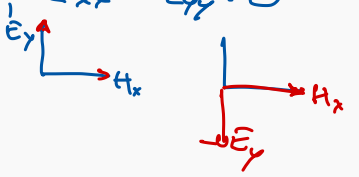
$$\vec{E} = \tilde{Z} \vec{H} \quad \tilde{Z}(\omega) : \text{Impedanztensor}$$

Beobachtung: $\begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix}$

1-D: $z_{xy} = -z_{yx}, z_{xx} = z_{yy} = 0$

2-D: $z_{xy} \neq z_{yx}, z_{xx} = z_{yy} = 0$

3-D: $z_{xy} \neq z_{yx}, z_{xx} \neq z_{yy}$



Rotation in die Strichrichtung:

x, y : Mess-KS (Koord.-system)

x', y' : Geol. KS

$$\begin{bmatrix} E_x' \\ E_y' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}$$

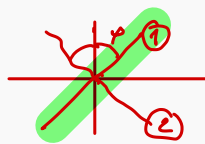
$$R^{-1} \begin{pmatrix} E_x' \\ E_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} H_x' \\ H_y' \end{pmatrix} \quad (\cdot R)$$

$$\begin{pmatrix} E_x' \\ E_y' \end{pmatrix} = \underbrace{R \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix} R^{-1}}_{\text{Matrix}} \begin{pmatrix} H_x' \\ H_y' \end{pmatrix}$$

Wohin
kann wir
den Winkel φ ?

Idee: Finde den Winkel φ , für den
die Komponenten z_{xx} und z_{yy} klein werden.

Swiift-Winkel ✓ ABER! mehrdeutig



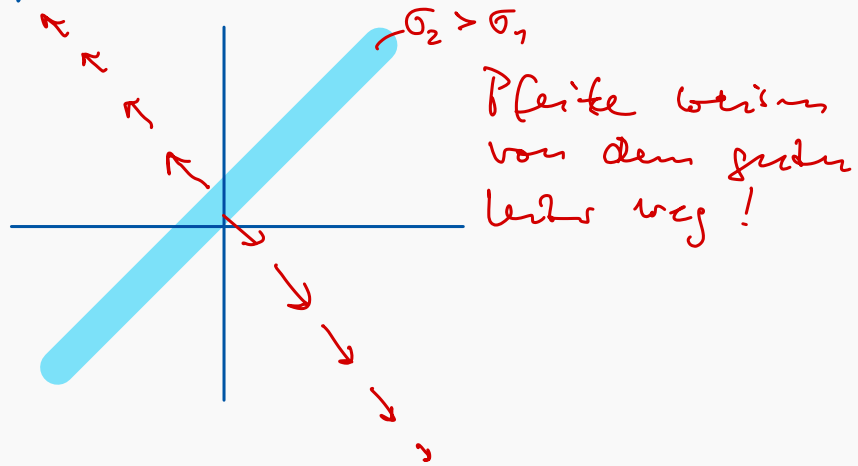
Hier hilft H_z !

Idee: Analyse zur Linearcomb. $\vec{E} = \hat{z} H_z$ gibt es

$$H_z = T_x H_x + T_y H_y$$

sogenannte Maxwell'sche Übertragungsfunktion T
 T_x und T_y werden als
"Induktionsspezifität"
dargestellt.

Induktionspfeile (Induction arrows) :



$\sigma_2 > \sigma_1$

Pfeile weisen
von dem gelben
links weg!