

### 3.3. Berechnung von Ramsey-Zahlen

**Satz 3.4 (Erdős & Szekeres, 1935)**

Für je 2 natürliche Zahlen  $p, q \geq 2$  gilt

$$R_2(p, q) \leq R_2(p, q-1) + R_2(p-1, q).$$

Sind sowohl  $R_2(p, q-1)$  als auch  $R_2(p-1, q)$  gerade, dann gilt sogar

$$R_2(p, q) < R_2(p, q-1) + R_2(p-1, q).$$

*Beweis:* Wir führen den Beweis durch Induktion nach  $p+q$ .

Leicht verifiziert man  $R_2(1, q) = R_2(p, 1) = 1$  und  $R_2(2, q) = R_2(q, 2) = q$ .

Ist  $p+q \geq 5$ , so existieren nach Induktionsvoraussetzung die Ramsey-Zahlen  $R_2(p, q-1)$  und  $R_2(p-1, q)$ . Ist nun  $G$  ein Graph der Ordnung  $R_2(p, q-1) + R_2(p-1, q)$  und  $v$  ein Knoten von  $G$ , so setzen wir

$$T = N(v) \quad (* \text{ rote Nachbarn } *)$$

$$\text{und } S = V(G) \setminus (\{v\} \cup N(v)) \quad (* \text{ Nichtnachbarn/ blaue Nachbarn } *)$$

Wegen  $|S| + |T| = |V(G)| - 1 = R_2(p, q-1) + R_2(p-1, q) - 1$ , gilt entweder  $|S| \geq R_2(p, q-1)$  oder  $|T| \geq R_2(p-1, q)$ . Ist  $|S| \geq R_2(p, q-1)$ , so enthält  $G[S]$  eine Clique (rot) der Ordnung  $p$  oder eine unabhängige Menge (blau) aus  $q-1$  Knoten. Dann besitzt aber  $G[S \cup \{v\}]$  eine Clique der Ordnung  $p$  oder  $q$  unabhängige Knoten. Den Fall  $|T| \geq R_2(p-1, q)$  behandelt man analog. Seien nun sowohl  $R_2(p-1, q)$  als auch  $R_2(p, q-1)$  gerade, und sei  $G$  ein Graph mit  $R_2(p, q-1) + R_2(p-1, q) - 1$  Knoten. Da  $G$  von ungerader Ordnung ist, existiert ein Knoten  $v$  von geradem Grad (Handschlaglemma), womit  $v$  nicht zu genau  $R_2(p-1, q) - 1$  Knoten adjazent ist. Daher gilt

$$R_2(p, q) \leq R_2(p, q-1) + R_2(p-1, q) - 1.$$

■

**Folgerung:** Für zwei natürliche Zahlen  $p, q \geq 2$  gilt

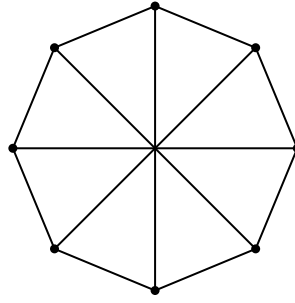
$$R_2(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1} = \binom{p+q-2}{q-1}.$$

**Beispiel:** (i)  $R_2(3, 4) = 9$ :

Satz von Erdős Szekeres:  $R_2(3, 4) \leq 9$ .

Mit Hilfe von Kreisgraphen ( $V(G) = \{0, \dots, 7\}$ ,  $i, j \in E(G) \Leftrightarrow |i-j| \in \{1, 4\}$ ) folgt  $R_2(3, 4) \geq 9$ :

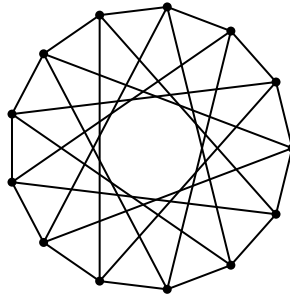
### 3. Ramsey-Theorie



(ii)  $R_2(3, 5) = 14$ :

Satz von Erdős und Szekeres:  $R_2(3, 5) \leq R_2(3, 4) + R_2(2, 5) = 9 + 5 = 14$

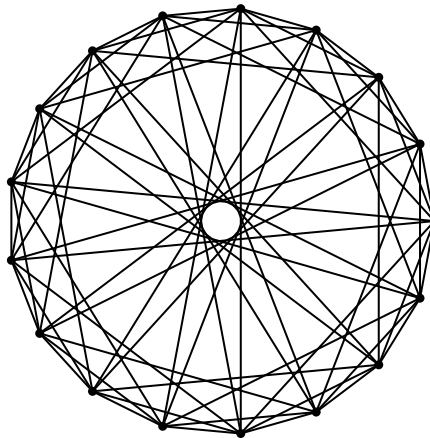
Mit Hilfe von Kreisgraphen ( $V(G) = \{0, \dots, 12\}$ ,  $i, j \in E(G) \Leftrightarrow |i - j| \in \{1, 5\}$ ) folgt  $R_2(3, 5) \geq 14$ :



(iii)  $R_2(4, 4) = 18$ :

Satz von Erdős und Szekeres:  $R_2(4, 4) \leq R_2(4, 3) + R_2(3, 4) = 9 + 9 = 18$

Mit Hilfe von Kreisgraphen ( $V(G) = \{0, \dots, 16\}$ ,  $i, j \in E(G) \Leftrightarrow |i - j| \in \{1, 2, 4, 8\}$ ) folgt  $R_2(4, 4) \geq 18$ :



### 3. Ramsey-Theorie

**Klassische Ramseyzahlen**  $R_2(p, q)$  (exakte Zahlen sowie /obere und untere/ Grenzen)

$p \backslash q$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	6	9	14	18	23	28	36	$40/43$	$46/51$	$52/60$
4		18	25	$35/41$	$49/61$	$55/84$	$69/115$			
5			$43/49$	$58/87$	$80/143$	$95/216$				
6				$102/165$	$109/298$					
7					$205/540$					

### 3.4. Der Satz von van der Waerden

Der folgende berühmte Satz aus der Ramsey-Theorie ist nach dem Mathematiker B.L. van der Waerden benannt.

**Satz 3.5 (van der Waerden)**

Für alle natürliche Zahlen  $r$  und  $l$  existiert eine natürliche Zahl  $N = W(r, l)$ , so dass gilt:  
Färbt man die Zahlen  $1, 2, \dots, N$  mit  $r$  Farben, so existiert eine **arithmetische Progression** der Länge  $l$  in den  $1, 2, \dots, N$ , die gleich gefärbt (monochrom) sind.

**Beispiel:** Für  $l = 2$  wählen wir  $N = r + 1$ . Dann kommt nach dem Schubfachprinzip stets eine Farbe doppelt vor. Hier sei „Schwarz“ eine beliebige Farbe aus „Blau“, „Grün“, „Rot“ oder „Gelb“:

12345

Für  $l = 3$  und  $r = 3$ :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

Egal, welche Farbe man wählt bei der 17. Stelle, erhält man eine arithmetische Progression der Länge  $l = 3$ :

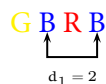
11-14-17  $d = 3$   
 9-13-17  $d = 4$   
 3-10-17  $d = 7$

*Beweis (Skizze):* Vollständige Induktion nach  $l$  und gleichzeitig für alle  $r$ :  
Wir versuchen den Satz von van der Waerden für 3 Farben „Rot“, „Blau“ und „Gelb“ und die Länge  $l = 3$  zu beweisen.

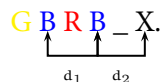
**Schritt 1:** An einer Stelle ist eine Farbe ausgeschlossen.

Bei drei Farben kommt in jedem Muster der Länge 4 eine Farbe doppelt vor, z.B.

### 3. Ramsey-Theorie



Wir betrachten nun etwas längere Muster, nämlich der Länge 7, so dass die Stelle 6 auch noch im Muster liegt:



Falls  $X=B$ , so liegt eine blaue arithmetische Progression der Länge 3 vor. Es gibt  $m = 3^7 = 2187$  Muster der Länge 7.

**Schritt 2:** An einer Stelle wird eine weitere Farbe ausgeschlossen.

Färbt man nun die Zahlen von 1 bis  $2187+1+6=2194$  mit 3 Farben und betrachtet die bei  $1 \dots 1288$  beginnenden Muster der Länge 7, so sind wenigstens zwei davon gleich. Wir nehmen an, es sei das Muster  $G \ B \ R \ B \ \_ \ X$  an den Stellen 100 und 600, also  $d_2 = 500$ . Unsere Färbung sieht dann so aus

1	...	100	101	102	103	104	105	106	...	600	601	602	603	604	605	606	...	2194
		G	B	R	B	_	X	_	...	G	B	R	B	_	X	_	...	

Wieder betrachten wir längere Muster, wir nehmen etwa das Doppelte, färben also die Zahlen 1 bis  $2 \cdot 2194 = 4388$ . Dann ist im Intervall  $1, \dots, 4388$ , unabhängig von  $d_2$ , auf jeden Fall der um  $d_2$  verschobene Bereich enthalten.

1	100	600	1100	4388
	G B R B _ X	G B R B _ X	_____Y	

X darf nicht Blau sein (wie oben bemerkt). Wären X und Y Rot, dann sind 105, 605 und 1105 Rot mit Abstand  $d_2 = 500$ . Wenn Y Blau ist, dann sind 101, 603 und 1105 Blau mit Abstand  $d_1 + d_2 = 502$ . Somit verbleibt für Y nur Gelb (für X Gelb gilt die gleiche Argumentation).

**Schritt 3:** Die letzte mögliche Farbe wird an einer Stelle ausgeschlossen.

Das Argument wird wiederholt, jetzt mit Mustern der Länge 4388. Wir färben diesmal  $N = 3^{4388} + 4388$  Zahlen. Angenommen, unser oben genanntes Muster der Länge 4388 kommt an den Stellen 10000 und 20000 mit Abstand  $d_3 = 10000$  vor.

10100 ...	10600 ...	11100 ...	20100 ...	20600 ...	21100 ...	30100 ...
G B R B _ R	G B R B _ R	_____G	G B R B _ R	G B R B _ R	_____G	_____
30600 ...	31100					
_____	_____Z					

### 3. Ramsey-Theorie

Welche Wahl verbleibt nun für Z (Stelle 31105)?

Wählt man  $Z=G$ , hat man  $G$  an den Stellen 11105, 21105 und 31105 mit Abstand  $d_3 = 10000$ . Wählt man  $Z=R$ , dann hat man  $R$  an den Stellen 10105, 20605 und 31105 mit Abstand  $d_2 + d_3 = 10500$ . Wählt man  $Z=B$ , hat man  $B$  an den Stellen 10101, 20603 und 31105 mit Abstand  $d_1 + d_2 + d_3 = 10502$ .

Der oben angegebene Induktionsschritt lässt sich nun verallgemeinern. Die Zahl der Iterationen ist gleich der Zahl der Farben.

■

#### Van der Waerden Zahlen und Abschätzungen $W(r, l)$ :

$r \backslash l$	3	4	5	6	7	8	9
2	9	35	178	>1131	>3703	>7484	>27113
3	27	>292	>965				
4	76	>1048					
5	>125	2254					
6	>207	>9778					