
Mathematik 1 - WS2022/23 Übungsblatt 2

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Weisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen die Äquivalenz der folgenden Aussageverbindungen nach.

Es seien p und q zwei Aussagen. Dann gelten:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \quad (1)$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \quad (2)$$

(Regeln von De Morgan).

Aufgabe 2: Rationale Zahlen sind als gemeine Brüche $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ (von Null verschiedene ganze Zahl) darstellbar.

(a) Stellen Sie die folgenden gemeinen Brüche als Dezimalbrüche dar.

$$\frac{64}{40}, \quad -\frac{7}{125}, \quad \frac{1}{11}, \quad \frac{m!}{(m-1)!} \quad (m > 1)$$

(b) Schreiben Sie als gemeinen Bruch.

$$0.\overline{11}, \quad 0.54\overline{377}, \quad 10^0 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots$$

(c) Gegeben sei die rekursive Bildungsvorschrift einer Folge von Kettenbrüchen durch

$$x_{k+1} = 2 + \frac{3}{x_k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x_1 = 5.$$

Bestimmen Sie die Kettenbrüche für $k = 1, \dots, 5$. Formen Sie in gemeine Brüche um. Berechnen Sie ebenfalls x_{20} .

(d) Stellen Sie als gemeinen Bruch dar.

$$a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{x}}}$$

Aufgabe 3: Die Winkelfunktionen $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$ lassen sich am Einheitskreis definieren: Sei $P(x, y)$ ¹ ein Punkt auf dem Einheitskreis um $O(0, 0)$, so gelten

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y}$$

falls α den Winkel bezeichnet, den \overrightarrow{OP} mit der positiven Richtung der Abszissenachse einschließt.

¹ (x, y) bezeichnet die Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem.

- (a) Rechnen Sie die exakten Winkelfunktionswerte $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ und $\cot \alpha$ für $\alpha = 0^\circ$ ($30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$) nach.

Hinweis: Ergänzen Sie die Punkte O und P zu einem gleichseitigen bzw. gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck.

- (b) Formen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Winkelfunktionen in Terme zum Argument α um.

$$\sin(2\alpha), \quad \cos(2\alpha), \quad \tan(2\alpha) (\cos(2\alpha) \neq 0), \quad \cos(\alpha - 90^\circ), \quad \sin(180^\circ - \alpha)$$

- (c) Berechnen Sie (1) $\sin 1230^\circ$ (2) $\cos -120^\circ$ (3) $\tan 330^\circ$.

Aufgabe 4: Man beweise indirekt, dass folgende reelle Zahlen nicht rational (irrational) sind:

(a) $\sqrt{6}$

(b) $\log_2 5$

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Gegeben sind die nachstehenden Aussageformen.

- $p(x) : \exists x \in \mathbb{R} (x + 1 = x)$
- $q(n) : \forall n \in \mathbb{N} (n^2 + n = n \cdot (n + 1))$
- $r(m) : \exists m \in \mathbb{N} ((m - 1)^2 = m^2 - 3m)$

Bestimmen Sie, für welche Werte der Variable die folgenden Aussagenformen zu wahren bzw. falschen Aussagen führen. Geben Sie jeweils die Lösungsmengen an.

Hinweis: Die mathematischen Symbole \exists und \forall dienen der Beschreibung von Aussagen: Das Symbol \exists bedeutet "es existiert ein", wohingegen \forall "für alle" bedeutet.

Aufgabe 6: Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Schreibweise an:

$$A_1 := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine von 6 verschiedene, gerade Zahl kleiner als } 10\}$$

$$A_2 := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ein natürliches Vielfaches von 2 und kleiner als } 10\}$$

$$A_3 := \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 6x + 8) \cdot (x - 8) = 0\}$$

$$A_4 := \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2)(x^3 - x)(2x^2 - x - 1) = 0\}$$

$$A_5 := \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, n \leq 6 \wedge x = 2^n\}$$