

Mathematik III (für IF, ET, Ph)
Wintersemester 2023/24

8. Übung: Fourier- und Laplacetransformation (Musterlösung)

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen. Es sei stets $a > 0$.

a) $f_1(x) = \begin{cases} 1, & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ b) $f_2(x) = e^{-a|x|}$ c) $f_3(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$.

Lösung:

Wiederholung: Definition Fouriertransformation, inverse Fouriertransformation und Umkehrsatz.

(a) $f_1(x) = \begin{cases} 1, & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(-i\omega)} e^{-i\omega x} \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{2\pi i\omega} (e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = \frac{\sin(a\omega)}{\pi\omega}. \end{aligned}$$

(b) $f_2(x) = e^{-a|x|} = e^{-|ax|} = g(ax)$, wobei $g(x) = e^{-|x|}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

gilt. Mit der Streckungsregel folgt nun

$$\hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{g}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{1}{\pi(1+(\frac{\omega}{a})^2)} = \frac{a}{\pi(a^2 + \omega^2)}.$$

Alternativ: direkte Berechnung der Fouriertransformation

$$\hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{-i\omega x} dx + \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx \right).$$

Es gilt nun

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi(a+i\omega)},$$

und wir erhalten

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)x} dx = \frac{1}{2\pi(a-i\omega)} e^{(a-i\omega)x} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2\pi(a-i\omega)} (1-0).$$

Es folgt

$$\hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} \right) = \frac{(a-i\omega) + (a+i\omega)}{2\pi(a^2 + \omega^2)} = \frac{a}{\pi(a^2 + \omega^2)}.$$

(c) Wiederholung: Umkehrsatz und inverse Fouriertransformation.

$f_3(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$. Wie wir in Teilaufgabe 1b) gesehen haben gilt

$$\hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\omega x} dx = \frac{a}{\pi(a^2 + \omega^2)} = \frac{a}{\pi} f_3(\omega),$$

d.h. f_3 entspricht bis auf den Faktor $\frac{a}{\pi}$ der Fouriertransformierten von f_2 . Dies nutzen wir im Folgenden mit Hilfe des Umkehrsatzes der Fourtransformation aus:

$$\begin{aligned} \hat{f}_3(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_3(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{a} \hat{f}_2(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(y) e^{i\omega y} dy \\ &= \frac{1}{2a} \frac{\lim_{\omega' \rightarrow \omega-} f_2(\omega') + \lim_{\omega' \rightarrow \omega+} f_2(\omega')}{2} \\ &= \frac{f_2(\omega)}{2a} = \frac{\exp(-a|x|)}{2a}, \end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $y = -x$ und die Eigenschaft $\hat{f}_2(-x) = \frac{a}{\pi(a^2+(-x)^2)} = \hat{f}_2(x)$ angewandt haben.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) - y''(t) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit Hilfe der Fouriertransformation. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Wenden Sie die Fouriertransformation auf beide Seiten der Gleichung an und finden sie eine explizite Formel für die Fouriertransformierte \hat{y} der Lösung y .
- Bestimmen Sie y aus \hat{y} unter Verwendung des Faltungssatzes und den Ergebnissen der vorherigen Aufgaben.

Hinweis: Eine direkte Berechnung der inversen Fouriertransformation zur Bestimmung von y ist nicht notwendig.

Lösung:

$$y - y'' = e^{-|t|}.$$

- Wenden wir die Fouriertransformation auf die linke Seite an, so folgt mittels Linearität und der Ableitungsregel (siehe Sätze 11.13 und 11.15 der Vorlesung)

$$\widehat{y - y''}(\omega) = \hat{y}(\omega) - \widehat{y''}(\omega) = \hat{y}(\omega) - (i\omega)^2 \hat{y}(\omega) = (1 + \omega^2) \hat{y}(\omega).$$

Die Fouriertransformierte der rechte Seite der Differentialgleichung kennen wir aus Aufgabe 1b)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\pi(1^2 + \omega^2)},$$

also

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)} = \pi \left(\frac{1}{\pi(1 + \omega^2)} \right)^2.$$

(b) Mit Hilfe der Funktion f_2 aus Aufgabe 1b und $a = 1$ erkennen wir

$$\hat{y}(\omega) = \pi \hat{f}_2(\omega) \hat{f}_2(\omega).$$

Es folgt aufgrund der Injektivität der Fouriertransformation und des Faltungssatzes, dass

$$y(t) = \pi f_2(t) * f_2(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|} e^{-|s|} ds.$$

Sei $t \geq 0$, dann folgt mit Fallunterscheidung

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|} e^{-|s|} ds &= \int_{-\infty}^0 e^{-(t-s)} e^s ds + \int_0^t e^{-(t-s)} e^{-s} ds + \int_t^{\infty} e^{-(s-t)} e^{-s} ds \\ &= e^{-t} \int_{-\infty}^0 e^{2s} ds + e^{-t} \int_0^t 1 ds + e^t \int_t^{\infty} e^{-2s} ds \\ &= e^{-t} \left(\frac{1}{2} e^{2s} \Big|_{-\infty}^0 + t \right) + e^t \left(-\frac{1}{2} e^{-2s} \Big|_t^{\infty} \right) \\ &= e^{-t} \left(\frac{1}{2} + t \right) + \frac{1}{2} e^{-t} = (1+t) e^{-t}. \end{aligned}$$

Ist $t < 0$, so folgt analog

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|} e^{-|s|} ds &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)} e^s ds + \int_t^0 e^{-(s-t)} e^s ds + \int_0^{\infty} e^{-(s-t)} e^{-s} ds \\ &= e^{-t} \left(\frac{1}{2} e^{2s} \Big|_{-\infty}^t \right) + e^t \left(-t - \frac{1}{2} e^{-2s} \Big|_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^t + e^t \left(-t + \frac{1}{2} \right) = e^t (1-t). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$y(t) = \frac{1}{2} (1 + |t|) e^{-|t|}.$$

Aufgabe 3

(a) Stellen Sie folgende Funktion mit Hilfe der Heaviside-Funktion ohne Fallunterscheidung dar und bestimmen Sie ihre Laplacetransformierte:

$$f(t) = \begin{cases} t-1, & 1 \leq t \leq 3, \\ 8-2t, & 3 \leq t \leq 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $(t-a)H(t-a)$, $a > 0$.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Laplace-Transformierte $F(z)$ von $\sin(t)$ und $\cos(t)$ definiert und wie lautet sie?

Hinweis: Erinnern Sie sich an $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

(c) Was passiert mit der Laplace-Transformierten, wenn wir im Originalbereich eine positive Verschiebung um $a > 0$ haben? D.h., wie verhält sich $\mathcal{L}f(t+a)$ zu $\mathcal{L}f(t)$ für $a > 0$?

Lösung:

Wiederholung: Definition Heaviside-Funktion, Laplacetransformation.

(a) Ab $t - 1$ beginnt

$$f(t) = t - 1 = (t - 1)H(t - 1)$$

und endet ab $t - 3$, also

$$f(t) = t - 1 = (t - 1)[H(t - 1) - H(t - 3)]$$

für $1 \leq t \leq 3$. Analoges Vorgehen für den Fall $8 - 2t$ liefert

$$\begin{aligned} f(t) &= (t - 1)H(t - 1) - (t + 1)H(t - 3) + (8 - 2t)H(t - 3) - (8 - 2t)H(t - 4) \\ &= (t - 1)H(t - 1) + (9 - 3t)H(t - 3) - (8 - 2t)H(t - 4) \\ &= (t - 1)H(t - 1) - 3(t - 3)H(t - 3) + 2(t - 4)H(t - 4). \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die Laplacetransformierte von $(t - a)H(t - a)$ für $a > 0$ über partielle Integration:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}(t - a)H(t - a)dt = \int_a^\infty e^{-zt}(t - a)dt = \int_0^\infty e^{-z(s+a)}sds \\ &= e^{-az} \left[-\frac{s}{z}e^{-sz} \Big|_0^\infty + \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-sz}ds \right] = e^{-az} \left[-\frac{1}{z^2}e^{-sz} \Big|_0^\infty \right] \\ &= \frac{1}{z^2}e^{-az}. \end{aligned}$$

Daraus folgt bzgl. f :

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2} - 3\frac{e^{-3z}}{z^2} + 2\frac{e^{-4z}}{z^2}.$$

(b) (Wiederholung:

- $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist von exponentieller Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$, falls $\exists M > 0 : |f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \forall t \geq 0$.
- Für $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ existiert die Laplacetransformierte für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) > \gamma$.

Sowohl Sinus- als auch Kosinusfunktion sind beschränkt. Damit sind sie von exponentieller Ordnung $\gamma = 0$ und die Laplace-Transformierte ist für alle $i \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) > 0$ definiert.

Wir erinnern uns an $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$, bzw. $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ und $\sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$.
Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin(t))(z) &= \int_0^\infty \sin(t) e^{-zt} dt = \frac{1}{2i} \int_0^\infty (e^{it} - e^{-it}) e^{-zt} dt \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{(i-z)t} - e^{-(i+z)t} dt = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{i-z} e^{(i-z)t} \Big|_0^\infty \right] + \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{i+z} e^{-(i+z)t} \Big|_0^\infty \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[-\frac{1}{i-z} - \frac{1}{i+z} \right] = -\frac{1}{2i} \frac{2i}{-z^2 - 1} = \frac{1}{z^2 + 1} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos(t))(z) &= \int_0^{\infty} \cos(t) e^{-zt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{it} + e^{-it}) e^{-zt} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{(i-z)t} + e^{-(i+z)t} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i-z} e^{(i-z)t} \Big|_0^{\infty} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i+z} e^{-(i+z)t} \Big|_0^{\infty} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{i-z} + \frac{1}{i+z} \right] = \frac{-2z}{-2(z^2+1)} = \frac{z}{z^2+1}\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t+a))(z) &:= \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t+a) dt = \int_a^{\infty} e^{-z(s-a)} f(s) ds = e^{az} \int_a^{\infty} e^{-zs} f(s) ds \\ &= e^{az} \mathcal{L}(f(t)H(t-a)).\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie Lösung folgender Anfangswertprobleme mittels der Laplace-Transformation:

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, (b) $y'' + y' = e^{-2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Lösung:

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Wir benutzen die Gleichung

$$\mathcal{L}y'(z) = z\mathcal{L}y(z) - y(0).$$

Anwendung der Laplace-Transformation auf die linke Seite liefert

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y'' - 2y' - 3y)(z) &= \mathcal{L}(y'') - 2\mathcal{L}(y') - 3\mathcal{L}(y) \\ &= z\mathcal{L}(y') - y'(0) - 2(z\mathcal{L}(y) - y(0)) - 3\mathcal{L}(y) \\ &= z(z\mathcal{L}(y) - y(0)) - 1 - 2z\mathcal{L}(y) - 3\mathcal{L}(y) \\ &= (z^2 - 2z - 3)\mathcal{L}(y) - 1\end{aligned}$$

Ergo mit $F := \mathcal{L}(y)$ erhalten wir

$$(z^2 - 2z - 3)F(z) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(z) = \frac{1}{z^2 - 2z - 3}.$$

Mittels Nullstellen erhalten wir $z^2 - 2z - 3 = (z+1)(z-3)$ ergo

$$F(z) = \frac{1}{z^2 - 2z - 3} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-3},$$

wobei sich A und B ergeben aus

$$1 = A(z-3) + B(z+1) = (A+B)z + (B-3A),$$

also $A = -B$ und $4B = 1$. Damit gilt

$$F(z) = -\frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{4(z-3)}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\mathcal{L}(e^{at}) = (z-a)^{-1}$. Somit erhalten wir als Lösung

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}.$$

Probe!

(b) $y'' + y' = e^{-2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Analog zu (a) erhalten wir durch Anwendung der Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} z(z\mathcal{L}(y) - y(0)) - y'(0) + z(\mathcal{L}(y) - y(0)) &= z(z\mathcal{L}(y) - 1) + z\mathcal{L}(y) - 1 \\ &= z(z+1)\mathcal{L}(y) - (z+1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{z+2}. \end{aligned}$$

Ergo für $F(z) = \mathcal{L}(y)(z)$

$$F(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1}{z}.$$

Es folgt

$$F(z) = \frac{A+1}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z+2}$$

mit

$$\begin{aligned} 1 &= A(z+1)(z+2) + Bz(z+2) + Cz(z+1) = A(z^2 + 3z + 2) + B(z^2 + 2z) + C(z^2 + z) \\ &= (A+B+C)z^2 + (C+3A+2B)z + (2A), \end{aligned}$$

also $A = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{2} - 2B$ und $-B = 1$. Ergo

$$F(z) = \frac{3}{2z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2(z+2)}, \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{3}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Probe!