

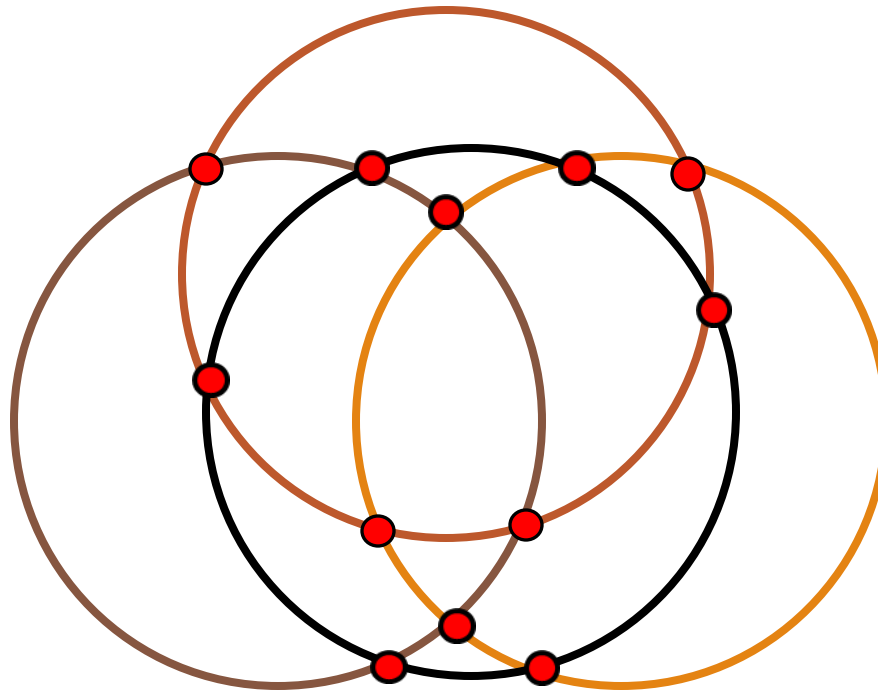
Kreiskonstruktionen aus 4 Kreisen



Fragen zu Kreiskonstruktionen

1. Was ist die maximale Anzahl?
2. Sind ungerade Anzahlen möglich?
3. Was ist die minimale Anzahl an Schnittpunkten, wenn sich alle Kreise tatsächlich paarweise schneiden?
4. ...

1. Was ist die maximale Anzahl?



1. Was ist die maximale Anzahl?

These:

Vier Kreise haben nicht mehr als 12 Schnittpunkte.

Erklärung:

Die ersten 2 Kreise haben maximal 2 Schnittpunkte.

Der 3. Kreis kann mit den ersten beiden höchstens weitere 4 Schnittpunkte haben.

Der vierte hat mit den vorhandenen Kreisen höchstens weitere 6 Schnittpunkte.

Jeder einzelne Kreis kann maximal von den drei anderen geschnitten werden.

→ $2 + 4 + 6 = 12$

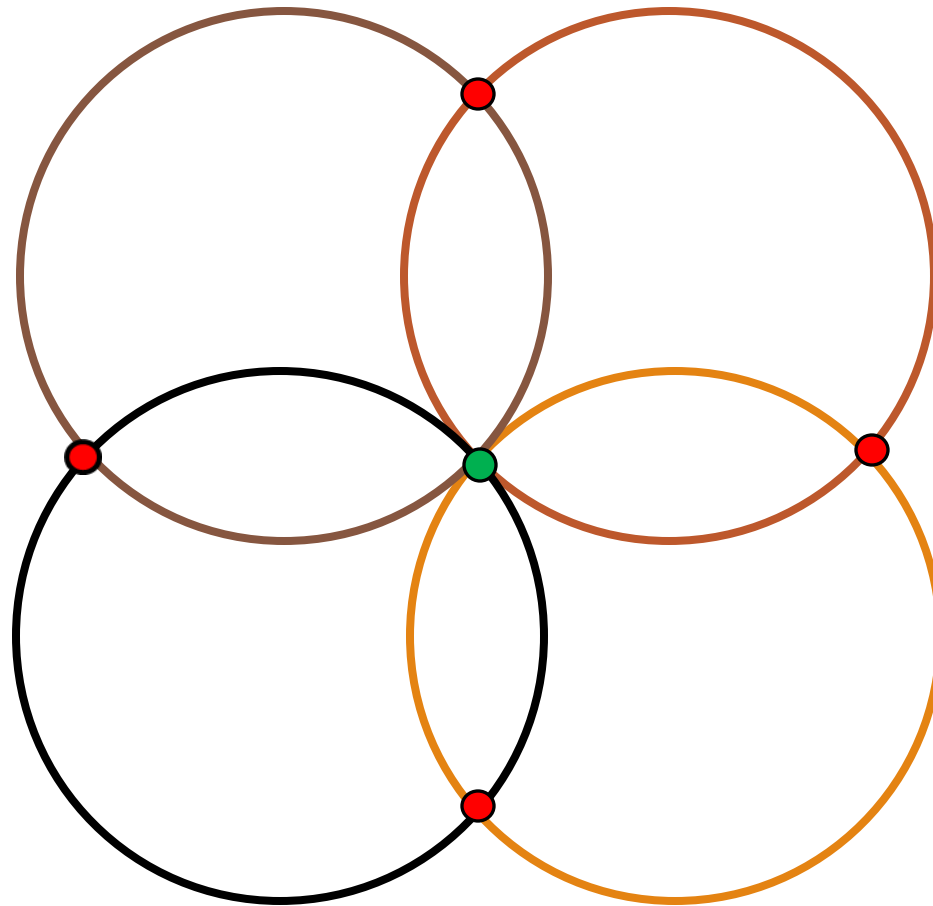
Alternativ:

Wenn sich zwei Kreise schneiden, haben sie genau 2 Schnittpunkte = Paar.

Bei 4 Kreisen gibt es max. 6 unterschiedliche Paarungen.

→ deshalb max. $12 (6 \times 2)$ Schnittpunkte.

2. Sind ungerade Zahlen möglich?



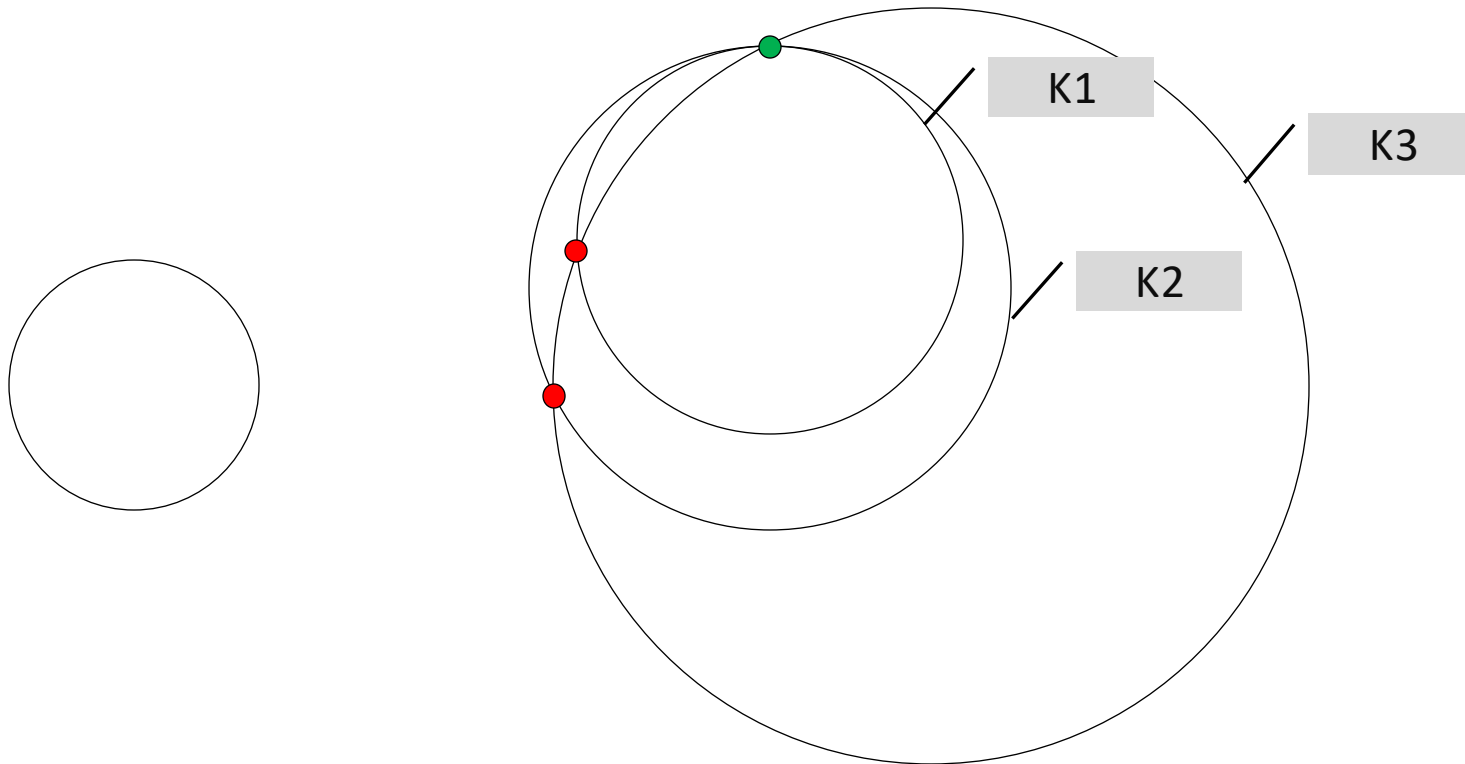
2. Sind ungerade Zahlen möglich?

Wenn der Berührungspunkt von zwei Kreisen gleichzeitig der gemeinsame Schnittpunkt für mit einem dritten Kreis ist, entsteht eine ungerade Anzahl an Schnittpunkten: Die Kreislinie vom dritten schneidet die beiden sich berührenden Kreise im Berührungspunkt und jeweils in einem weiteren Schnittpunkt.

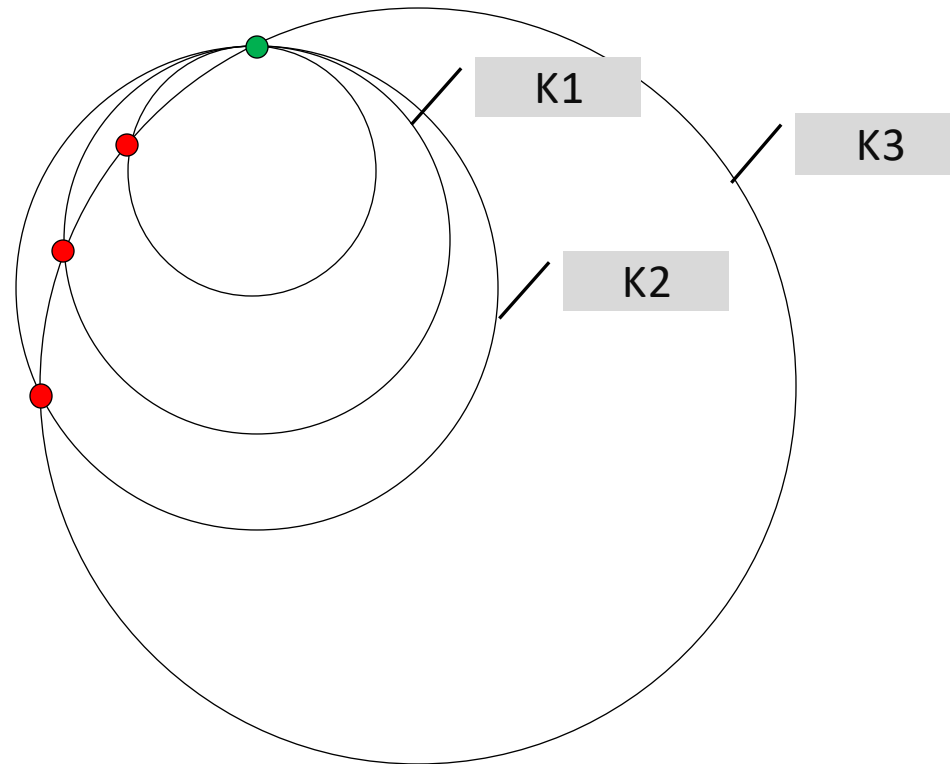
(Auf dem ersten Bild ist dies mit K1, K2 und K3 gekennzeichnet: K1 und K2 berühren sich (grün). K3 schneidet dann K1 und K2 noch in einem weiteren Punkt (rot).

Auch bei den weiteren Beispielen sind die Berührungspunkte jeweils grün eingezeichnet.

3 Schnittpunkte

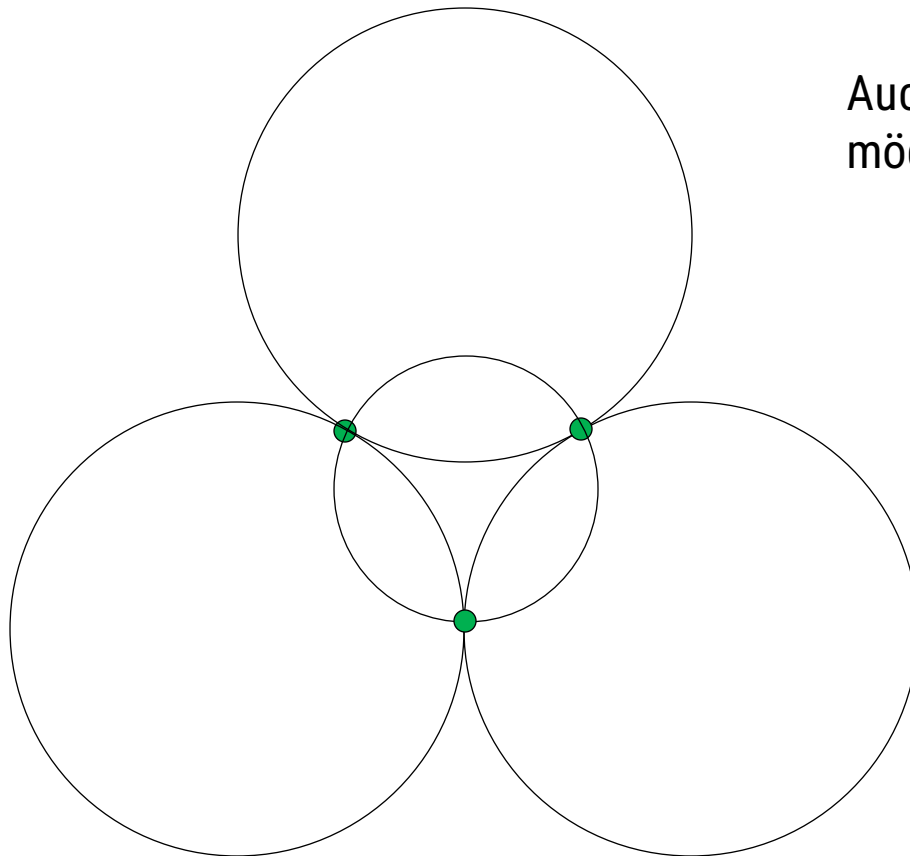


4 Schnittpunkte



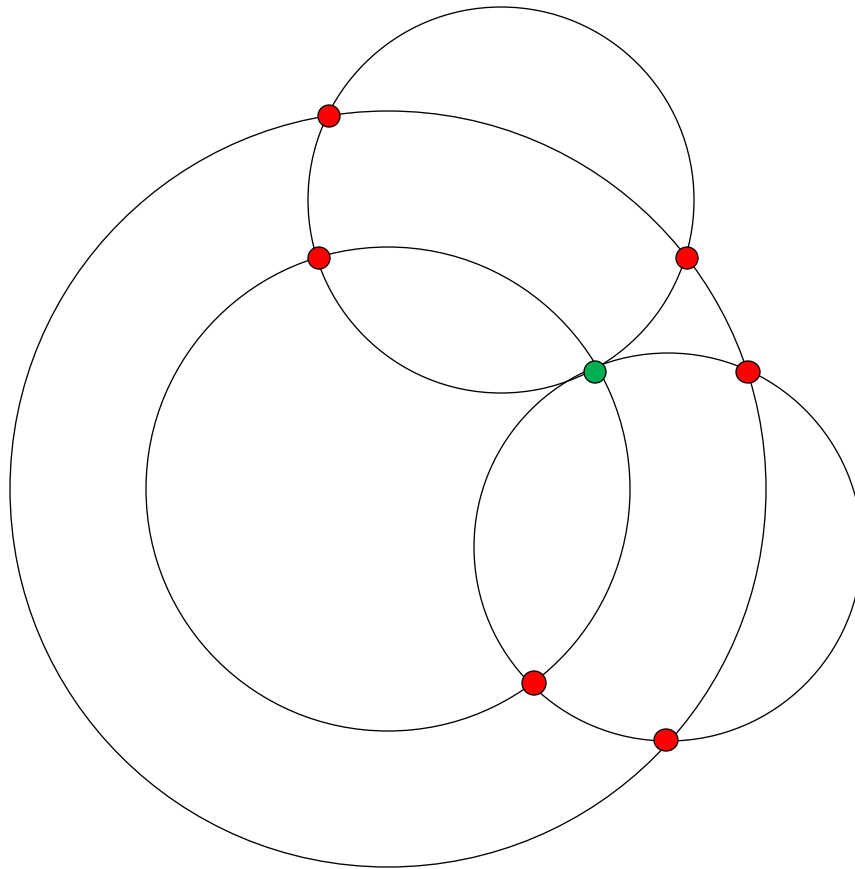
Haben drei Kreise einen gemeinsamen Berührungspunkt, erhält man wieder eine gerade Anzahl, wenn der vierte Kreis auch durch den Berührungspunkt läuft.

3 Schnittpunkte

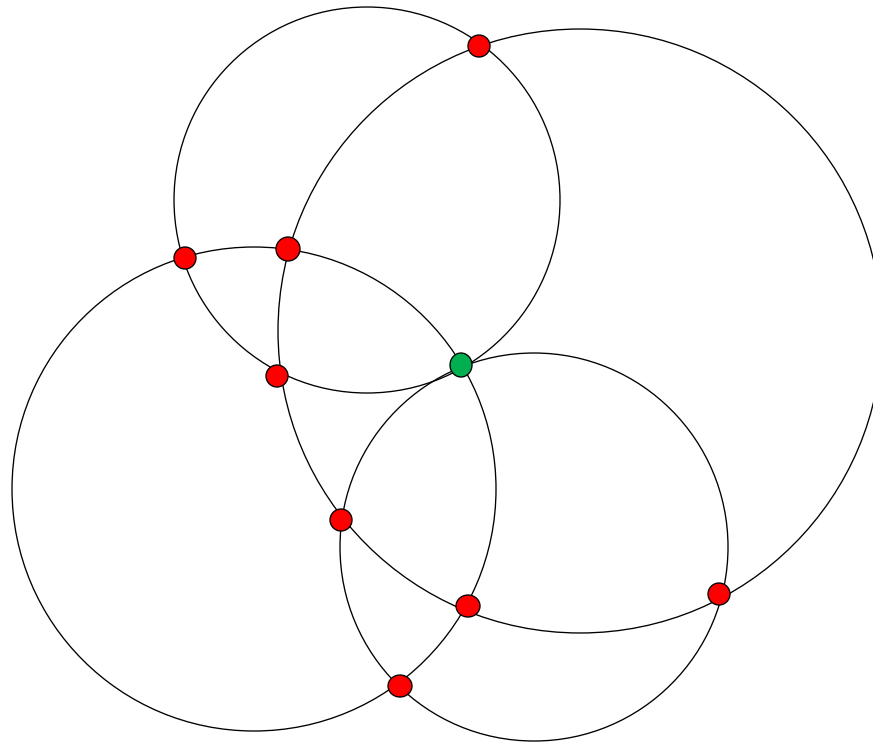


Auch so sind 3 Schnittpunkte möglich!

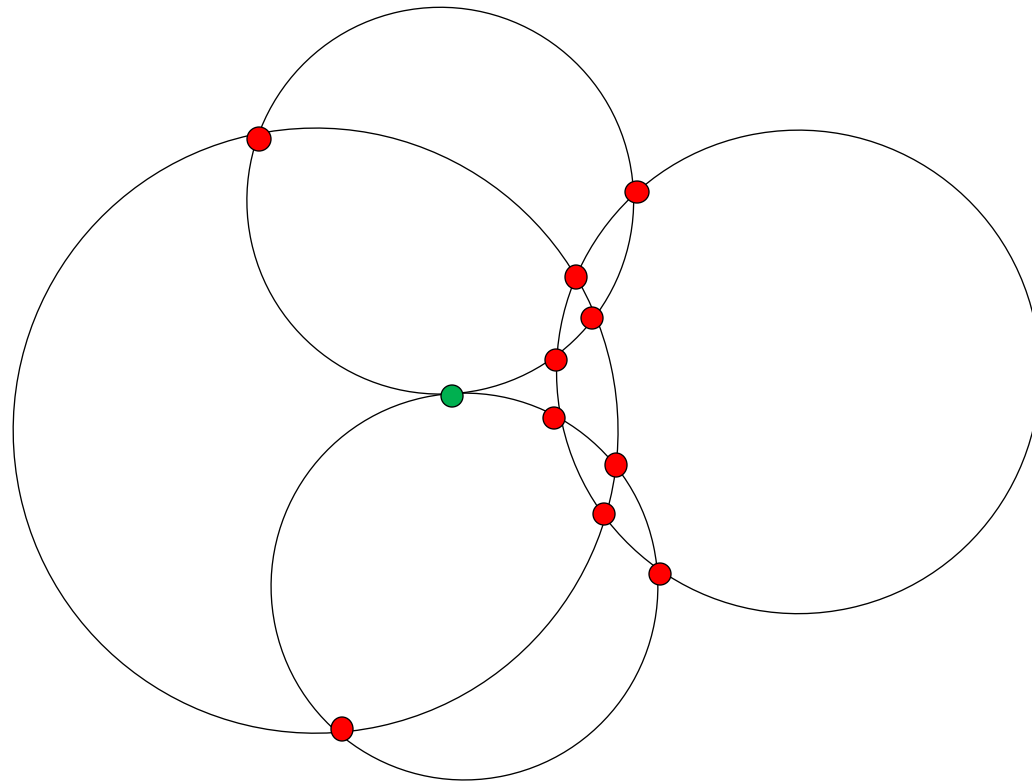
7 Schnittpunkte



9 Schnittpunkte



11 Punkte



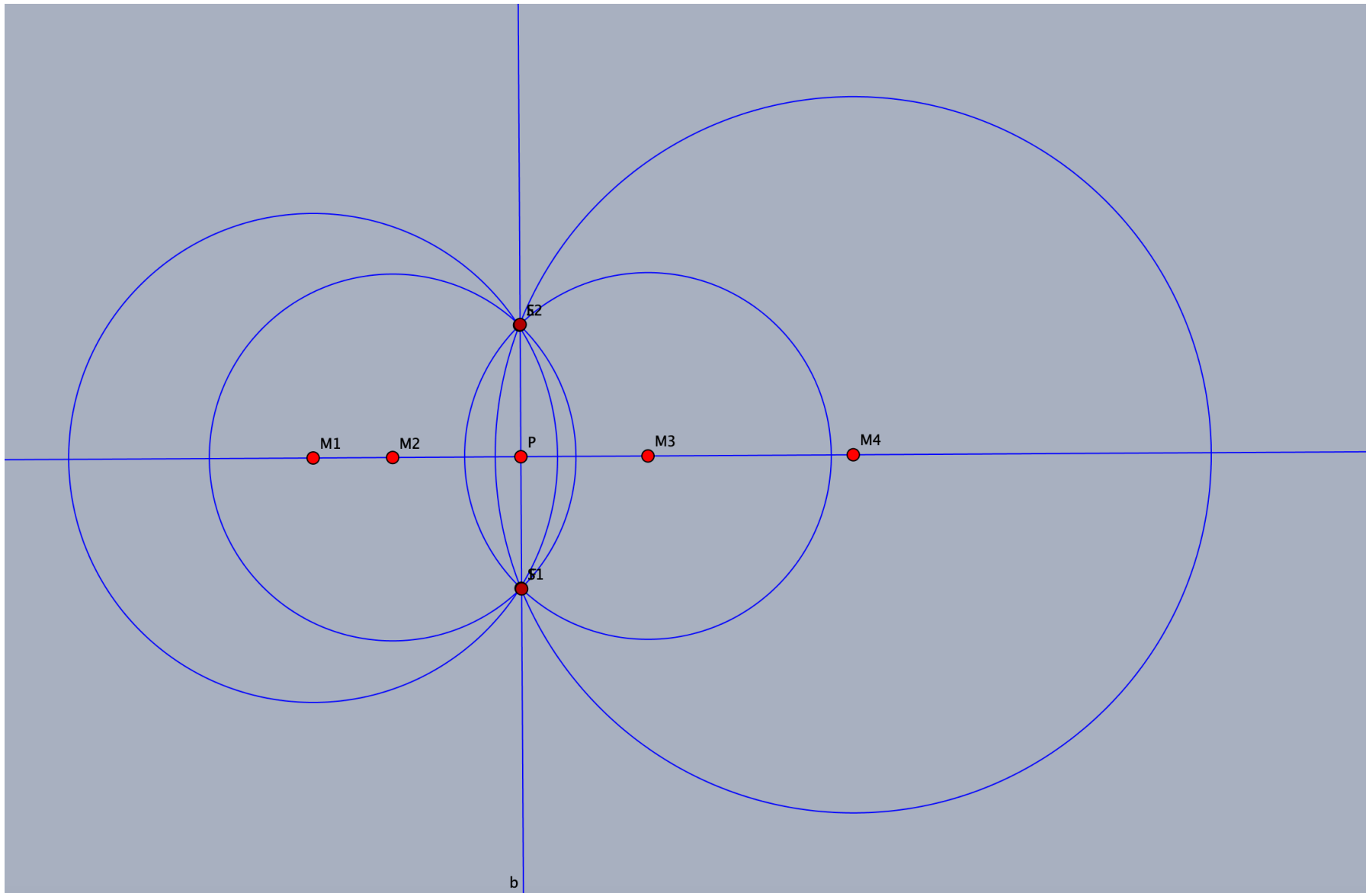
3. Was ist die minimale Anzahl an Schnittpunkten, wenn sich alle Kreise tatsächlich paarweise schneiden?

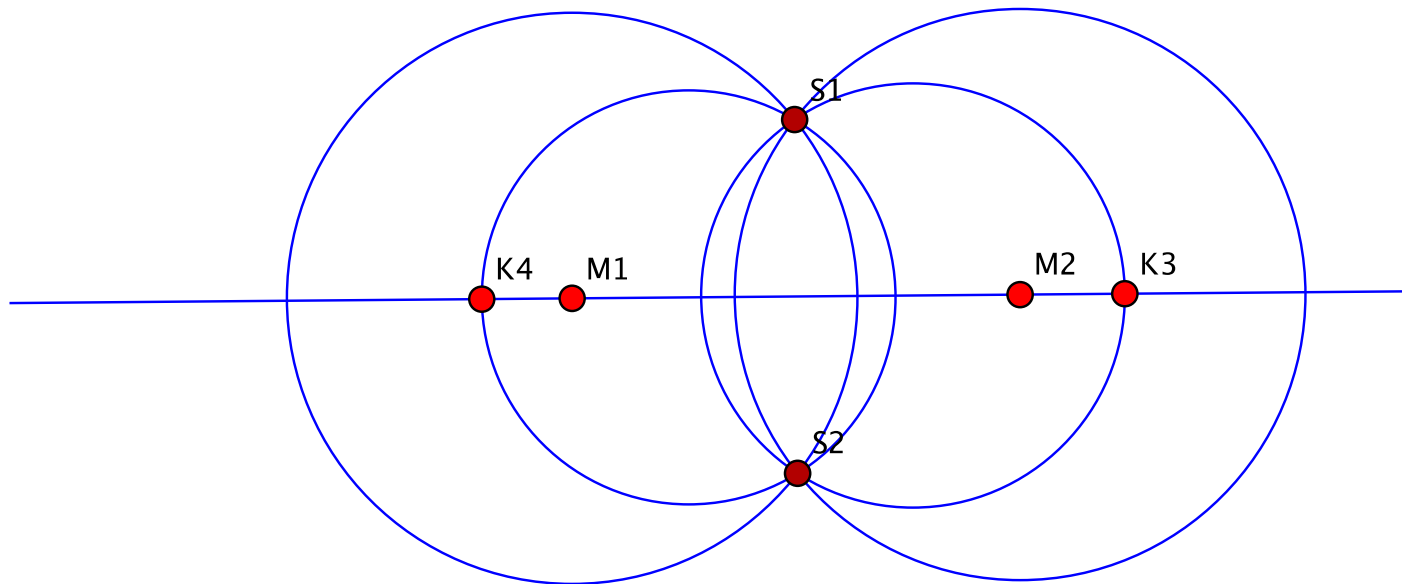
Es genügen 2 Schnittpunkte.

Alle Kreismittelpunkte liegen auf einer Geraden a . Die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 sind von dieser Geraden gleichweit entfernt (liegen also auf einer zu a senkrechten Gerade b).

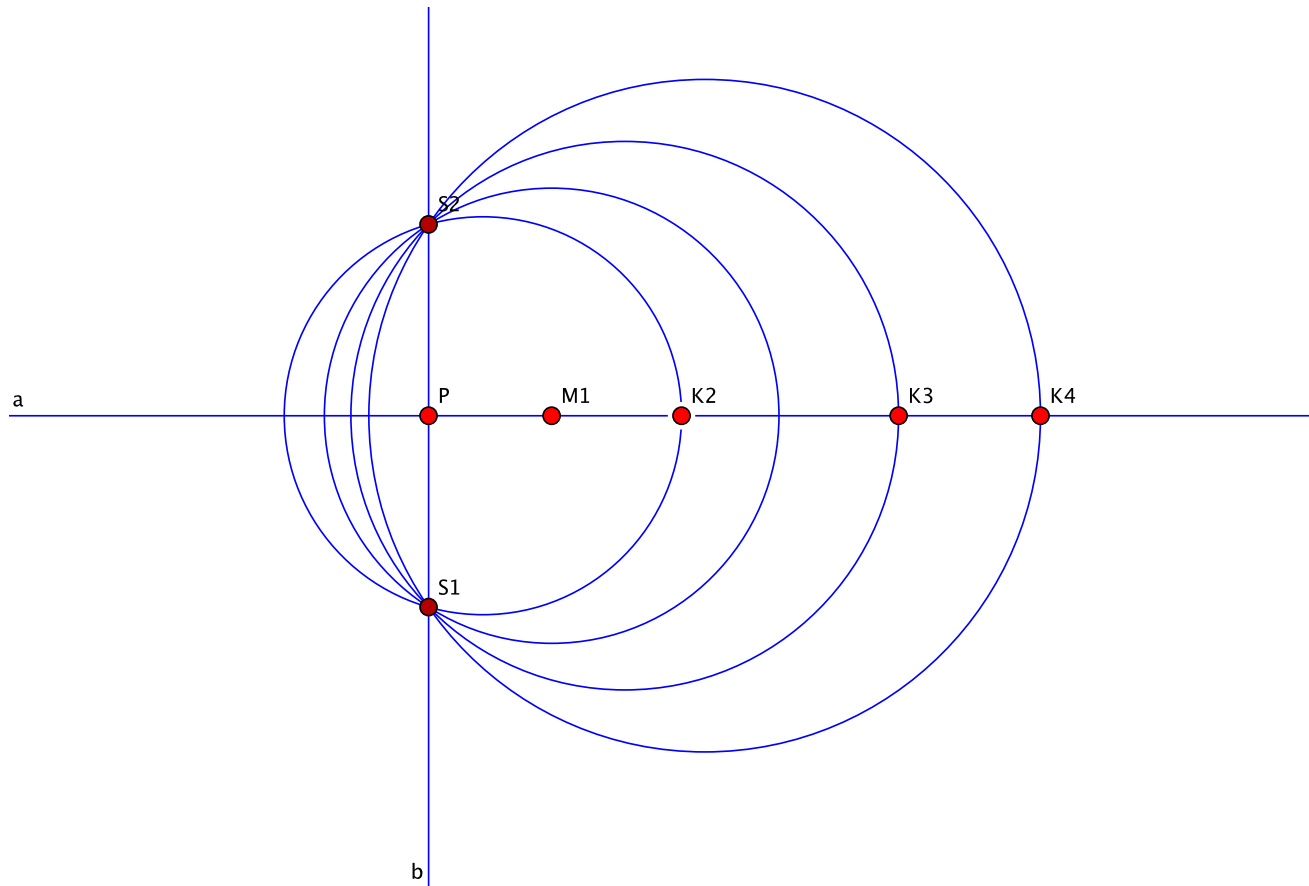
Nun kann man auf der Geraden a einen Punkt beliebig als Mittelpunkt M für einen Kreis wählen. Man zeichnet einen Kreis um diesen Punkt M , der durch S_1 und S_2 geht.

Die folgenden Konstruktionen sind mit Cinderella 2.3 erstellt: https://cinderella.de/tiki-index.php?page_id=4





Hier sind K_3 und K_4 nicht die Mittelpunkte. Hier habe ich die Schnittpunkte S_1 und S_2 durch die beiden ersten (gleichgroßen) Kreise bestimmt und kann mit einem weiteren Radius zwei weitere Kreise konstruiert, die durch die beiden Schnittpunkt gehen. Die Mittelpunkte liegen auch auf der Geraden a , sind aber nicht eingezeichnet.



Hier sind K_2 , K_3 und K_4 nicht die Mittelpunkte. Die Schnittpunkte S_1 und S_2 werden durch den ersten Kreis um M_1 bestimmt. Die Punkt K_2 , K_3 und K_4 sind beliebig gewählt, aber jeweils als dritter Punkt für die Kreise. Die Mittelpunkte liegen auch auf der Geraden a , sind aber nicht markiert.