TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Übungen zur Theoretischen Mechanik, Sommersemester 2021

Dr. A. Astakhova, Prof. Dr. C. Timm Blatt 12

Präsenzübungen

Aufgabe 1:

Lösen Sie die folgenden Bewegungsprobleme mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Geben Sie die Hamiltonsche Wirkungsfunktion S für jeden der Fälle an.

(a) Eindimensionale Bewegung eines freien Teilchens,

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m},$$

mit den Anfangsbedingungen $q(t=0) = q_0$, $p(t=0) = p_0$.

(b) Eindimensionale Bewegung eines Teilchens in einem linearen Potential,

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \gamma q,$$

mit den Anfangsbedingungen $q(t=0) = q_0$, $p(t=0) = p_0$.

(c) Dreidimensionale Bewegung eines Massenpunktes im gleichförmigen Schwerefeld,

$$H(\vec{q},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + mgq_z,$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{q}(t=0) = \vec{q}_0$, $\vec{p}(t=0) = \vec{p}_0$. *Hinweis*: Erraten Sie einen geeigneten Separationsansatz für die Wirkungsfunktion mit Hilfe der Teile (a) und (b).

Hinweis: Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist wichtig!

Hamilton - Jacobi Theorie

Sei $H(\vec{q},\vec{p},t)$ gegeben. Finde kanonische Trafo $\vec{q} \to \vec{Q}$, $\vec{p} \to \vec{P}$ mit Erzeugender $S(\vec{q},\vec{P},t) \equiv F_2(\vec{q},\vec{P},t)$ so, dass die neue Hamilton-Funktion verschwindet:

$$\tilde{H}(\vec{Q},\vec{P},t) = H + \frac{\partial S}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$$

Mit $\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}$ folgt die Hamilton - Jacobi Gleichung

$$\boxed{H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

PDE 1. Ordnung für $S(\vec{q},t)$ $\Rightarrow$ $S + \cancel{1}$ Integrationskonstanten α_j

$\uparrow$ globaler Offset

$\rightarrow$ $\tilde{S}(\vec{q},t;\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ als allg. Lsg.

Wähle neue Impulse so, dass:

$$P_j = \alpha_j = \text{const.} \quad \forall j = 1,\dots,S$$

$$\Rightarrow \quad S(\vec{q},\vec{P},t) \equiv \tilde{S}(\vec{q},t;P_1,\dots,P_s)$$

$\Rightarrow$ neue Koordinaten

$$\vec{Q} = \frac{\partial S}{\partial \vec{P}} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \vec{\alpha}} =: \vec{\beta} = \text{const.}$$

(a) $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2m}$, $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$

Hamilton-Jacobi:

$$0 = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Da keine gemischten Ableitungen auftauchen: Separationsansatz

$$S(q,t) = W(q) + V(t)$$

Einsetzen:

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2}_{\text{unabh. von } t} = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{unabh. von } q} \stackrel{!}{=} \text{const} \equiv \alpha$$

beliebige Integrationskonstante

Damit:

$$V(t) = -\alpha t + \cancel{V_0}$$

keine globalen Konstanten

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{2m\alpha} \Rightarrow W(q) = \pm\sqrt{2m\alpha}\, q + \cancel{W_0}$$

$\Rightarrow$ allg. Lsg:

$$\tilde{S}(q,t;\alpha) = \pm\sqrt{2m\alpha}\, q - \alpha t$$

Wir fordern $\alpha \stackrel{!}{=} P$: neue Impulse:

$$S(q,P,t) = \tilde{S}(q,t;P) = \pm\sqrt{2mP}\, q - Pt$$

$\Rightarrow$ neue Koordinaten

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \pm q \frac{m}{\sqrt{2mP}} - t \qquad = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad q = \pm\sqrt{\frac{2P}{m}}\,(Q+t)$$

Impuls: $\quad p = \frac{\partial S}{\partial q} = \pm\sqrt{2mP}$

Vorzeichen sind über AB festgelegt:

$$P_0 = p(0) \overset{!}{=} \pm\underbrace{\sqrt{2mP}}_{\geq 0} \quad \Rightarrow \text{Wähle } + \text{ für } P_0 > 0$$

$$- \text{ für } P_0 < 0$$

$$\Rightarrow \quad p = \operatorname{sgn}(P_0)\sqrt{2mP}$$

$$q = \underbrace{\operatorname{sgn}(P_0)}_{\text{gleiches VZ wie } p}\sqrt{\frac{2P}{m}}\,(Q+t)$$

(b) $\quad H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \gamma q$

$$0 = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \gamma q + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Separationsansatz: $\quad S(q,t) = W(q) + V(t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2m}(W')^2 + \gamma q = -V' \overset{!}{=} \alpha = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad V(t) = -\alpha t$$

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{2m(\alpha - \gamma q)}$$

$$\Rightarrow \quad W(q) = \pm \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2m\gamma}\right)\left[2m(\alpha-\gamma q)\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$= \mp \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2m}}{\gamma}\left[\alpha - \gamma q\right]^{\frac{3}{2}}$$

allg. Lsg.

$$\tilde{S}(q, t; \alpha) = \mp \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2m}}{\gamma}\left[\alpha - \gamma q\right]^{\frac{3}{2}} - \alpha t$$

Erzeugende: $(\alpha \to P)$

$$S(q, P, t) = \mp \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2m}}{\gamma}\left[P - \gamma q\right]^{\frac{3}{2}} - Pt$$

Neue Koordinaten

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \mp \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}\left[P - \gamma q\right]^{\frac{1}{2}} - t = \text{const.}$$

Nach q auflösen:

$$q = -\frac{\gamma}{2m}(Q+t)^2 + \frac{P}{\gamma} \quad (*)$$

Impuls:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \pm\sqrt{2m}\left[P - \gamma q\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{(*)}{=} \pm\sqrt{2m}\left[\frac{\gamma^2}{2m}(Q+t)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \pm\gamma\,|Q+t|$$

Mit AB folgt:

$$P_0 \overset{!}{=} \pm \gamma |Q| \Rightarrow \pm \overset{!}{=} \operatorname{sgn} P_0$$

$$\Rightarrow \quad p = \operatorname{sgn} P_0 \; \gamma \, |Q + t|$$

(c) $$H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + m g q_z$$

$$\Rightarrow 0 \overset{!}{=} H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{p}}\right) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial p_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial p_y}\right)^2\right] + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial p_z}\right)^2 + m g q_z + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Separationsansatz: $$S(\vec{p}, t) = \sum_{i=x,y,z} W_i(p_i) + V_i(t)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_x}{\partial p_x}\right)^2 + \frac{\partial V_x}{\partial t}}_{\overset{!}{=}0} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_y}{\partial p_y}\right)^2 + \frac{\partial V_y}{\partial t}}_{\overset{!}{=}0} \quad \text{vgl. (a)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_z}{\partial p_z}\right)^2 + m g q_z + \frac{\partial V_z}{\partial t}}_{\overset{!}{=}0} \quad \text{vgl. (b)}$$

$\Rightarrow$ Wirkungsfunktion:

$$S(\vec{q},\vec{P},t) = \mathrm{sgn}\, p_{0,x}\sqrt{2mP_x}\, q_x + \mathrm{sgn}(p_{0,y})\sqrt{2mP_y}\, q_y$$
$$- \mathrm{sgn}(p_{0,z})\,\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{2m}}{mg}\,(\alpha_z - mg\,q_z)^{3/2} - (P_x + P_y + P_z)t$$

Mit $\vec{Q} = \frac{\partial S}{\partial \vec{P}}$ und mit (a) u. (b) folgen Koordinaten

$$q_x = \mathrm{sgn}(p_{0,x})\sqrt{\frac{2P_x}{m}}\,(Q_x + t)$$

$$q_y = \mathrm{sgn}(p_{0,y})\sqrt{\frac{2P_y}{m}}\,(Q_y + t)$$

$$q_z = -\frac{g}{2}\,(Q_z + t)^2 + \frac{P_z}{mg}$$

Impulse mit $\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}$:

$$p_x = \mathrm{sgn}(p_{0,x})\sqrt{2mP_x}$$

$$p_y = \mathrm{sgn}(p_{0,y})\sqrt{2mP_y}$$

$$p_z = \mathrm{sgn}(p_{0,z})\, mg\,|Q_z + t|$$