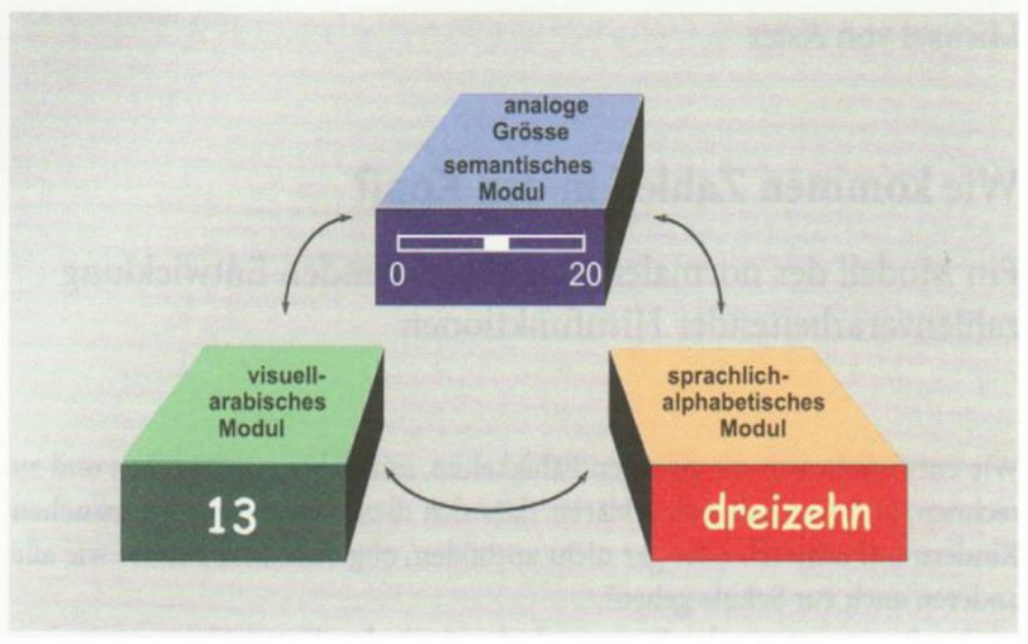
TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Zentrum für Lehrerbildung
Professur Grundschuldidaktik Mathematik

Didaktik der Arithmetik

- Vorlesung Vertiefungsmodul LAGS-GSD-MA-VM1



4. Zahlbegriffsentwicklung/ Anfangsunterricht

Grundschuldidaktik Mathematik
Prof. Dr. phil. Birgit Brandt
Wintersemester 2024/25

Erwerb der Zahlwortreihe

Zählprinzipien

How to count:

- **Eindeutigkeitsprinzip**
  jedes Objekt à ein Zahlwort – jedes Zahlwort à ein Objekt (Bijektion)
- **Prinzip der stabilen Ordnung**
  Zahlwortreihe hat eine feste Ordnung
- **Kardinalzahlprinzip**
  Letztes Zahlwort entspricht der Anzahl

What to count:

- **Abstraktionsprinzip**
  jede beliebige Menge
- **Prinzip der Irrelevanz der Anordnung**
  Reihenfolge der Zuordnung egal

Gelmann & Gallistel, 1978

Zählkonventionen

- von links nach rechts
- Beginn am äußeren Ende, nicht in der Mitte.
- Zählen mit System:
  - Zählen in der Abfolge, wie die Dinge daliegen
  - Zum Abzählen sortieren
  - Beim Abzählen sortieren

© Birgit Brandt

Hilfreich, aber nicht notwendig für richtiges Zählergebnis!

Erwerb der Zahlwortreihe:

- Entwicklung individuell sehr unterschiedlich
  - Beginn im 2. Lebensjahr
  - ab 3 Jahren: Zahlwortfolgen bis 10 ‚rezitieren'
  - 4,5 – 6,5 Jahre: Erkennen der Bildungsgesetze für die Zahlwortfolge 20 bis 100
- beherrschte Zahlwortreihe
  - 1. Teil: korrekte Zahlenfolge (1, 2, 3, 4)
  - 2. Teil: stabile, nicht korrekte Folge weiterer Zahlwörter (5, 6, 9, 11)
  - 3. Teil: nicht stabile Folge weiterer Zahlwörter

Entwicklung der Zählkompetenz

- string level
  undifferenzierte Auffassung der Zahlwortfolge als „string" (einszweidrei…)
- unbreakable chain level
  differenzierte Auffassung der Zahlwortfolge, zerlegt in Einzelwörter; abzählen möglich
- breakable chain level
  Weiterzählen möglich (drei, vier, fünf, …)
- numerable chain level
  Zahlwörter werden zählbare Einheiten; Zählschritte mitzählen – „doppeltes" Zählen
- bidirectional chain level
  Durchlaufen in beide Richtungen möglich, auch Zählen in Sprüngen (zehn, neun, acht, … / eins, drei, fünf, …)

Fuson (1982)

Zahlaspekte

Zahlaspekte

Zahlenbuch 1

„Ein Aspekt der natürlichen Zahlen ist gegeben durch eine Klasse von Anwendungen, in denen die natürlichen Zahlen in gleicher Weise verwendet werden.“

Burscheid & Struve, 2014, S. 4

Zahlaspekte im Kinderalltag

Kinder und Kaufmannsladen: https://www.baumarkt.de/ratgeber/a/bauanleitung-kaufmannsladen-fuer-kinder/
Kind mit Geld: https://www.studis-online.de/Studieren/studieren-mit-kind.php (Nicole Effinger - Fotolia.com (stock.adobe.com))
Restlichen Bilder: © Kerstin Tiedemann

Zählaspekte in Handlungssituationen

Fragen	Beispiele	Zahlaspekt
Wie viele?	Sieben Zwerge	Anzahl (Anzahl von Dingen)
Wie oft? Wie häufig?	Drei Versuche / dreimal versuchen	Häufigkeit (Anzahl von Ereignissen)
Das Wievielfache?	Dreimal so viel verdienen Das Dreifache verdienen	Operatorzahl
Der Wievielte? An welcher Stelle?	Das fünfte Rad am Wagen der 2. Tabellenplatz	Ordnungszahl
Wie groß (lang, …)?	3,5km 3,50€	Maßzahl
Welche Nummer? (Tel., PLZ, …)	602629 33098 PB	Kodierungszahl
Welches Ergebnis?	(56 + 78 =) 134	Rechenzahl

Zahlaspekte	**Beschreibung**	**Beispiele**
Kardinalzahl	Zahlen beschreiben die Mächtigkeit von Mengen, die *Anzahl* von Elementen einer Menge	3 Äpfel, 5 Gongschläge 9 Zahlen Möglichkeiten
Ordinalzahlaspekt	Zählzahl: Folge der nat. Zahlen, die beim Zählen durchlaufen wird	„eins, zwei, drei, vier, …“ „zehn, neun, acht, …“
	Ordnungszahl: Rangplatz in einer geordneten Reihe	„Ich bin der Fünfte im Wohnzimmer.“
Maßzahlaspekt	Maßzahlen für Größen	10 Minuten, 2 Meter, 5 Euro
Operatoraspekt	Bezeichnung der Vielfachheit einer Handlung oder eines Vorgangs	Noch fünfmal schlafen bis zu den Ferien
Rechenzahlaspekt	Algebraischer Aspekt	Kommutativität, Assoziativität
	Algorithmischer Aspekt (Rechnen als „Ziffernmanipulation“ nach bestimmten Regeln)	Päckchenrechnen
Kodierungsaspekt	Bezeichnung von Objekten	Postleitzahl, Telefonnummer, ISBN

Relationaler Zahlaspekt (I)

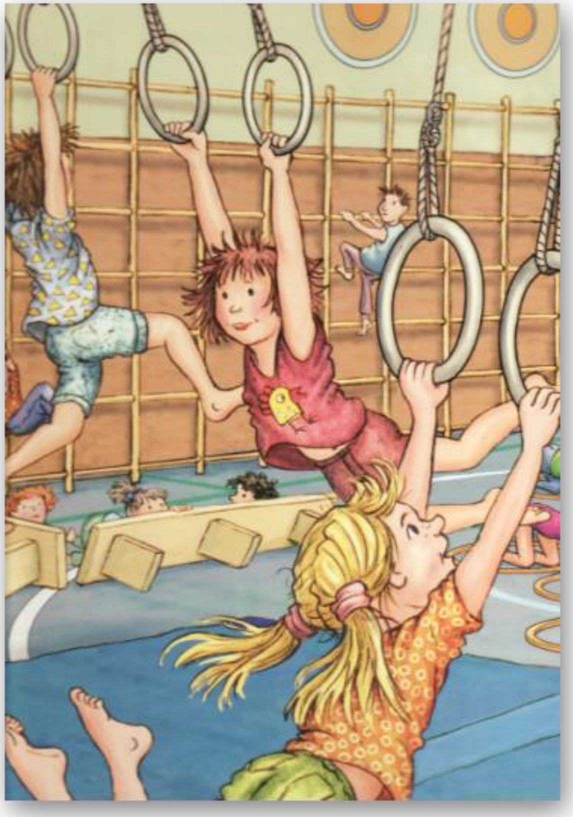
Zahlen werden im Denken nicht durch Mengen repräsentiert, sondern durch räumlich-geometrische Beziehungen. (Lorenz)

Ergo: Basis für arithmetische Kompetenzen

- Raumvorstellung und Raumorientierung
- Visuelle Aspekte

Relationaler Zahlaspekt (II)

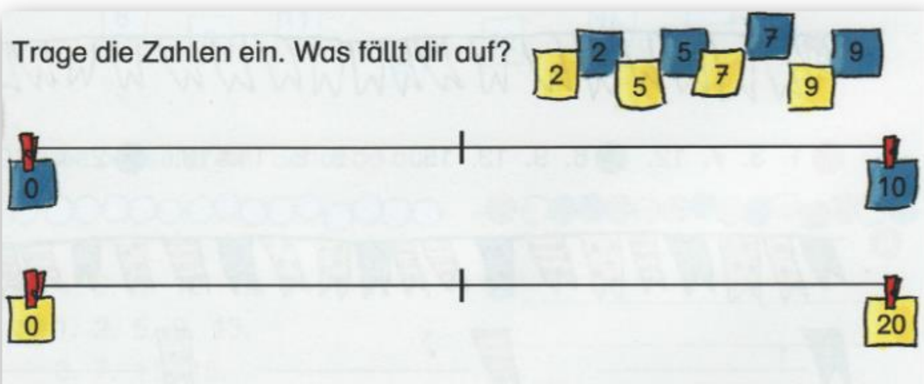
- Lagebeziehungen:
  vor, hinter, über, unter, links von, rechts von, …

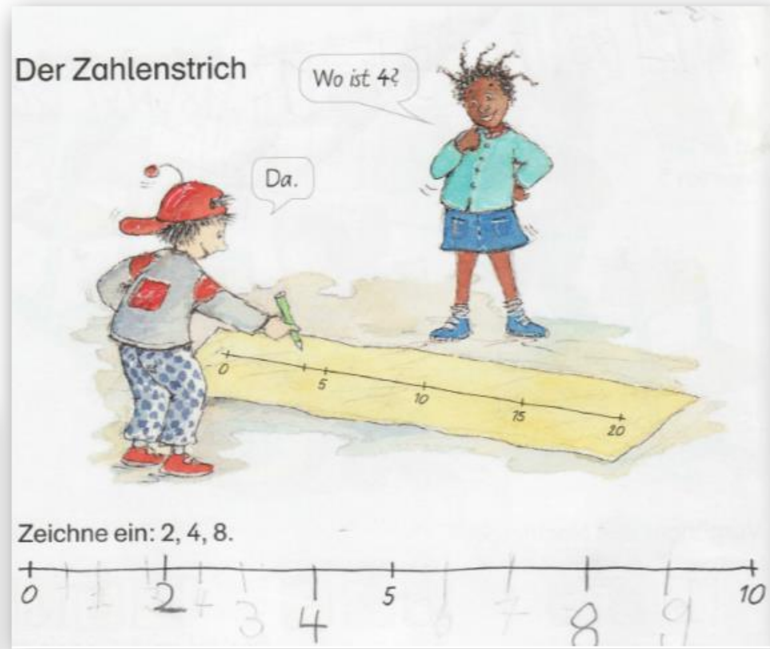


Quelle unbekannt

Relationaler Zahlaspekt (III)

Arbeit am leeren Zahlenstrich





Mathehaus1, S. 32; Spürnasen Mathematik, Themenheft Zahlen und rechnen 1, S. 25

Zahlbegriffsentwicklung

Triple-code Modell (nach Dehaene 1992)

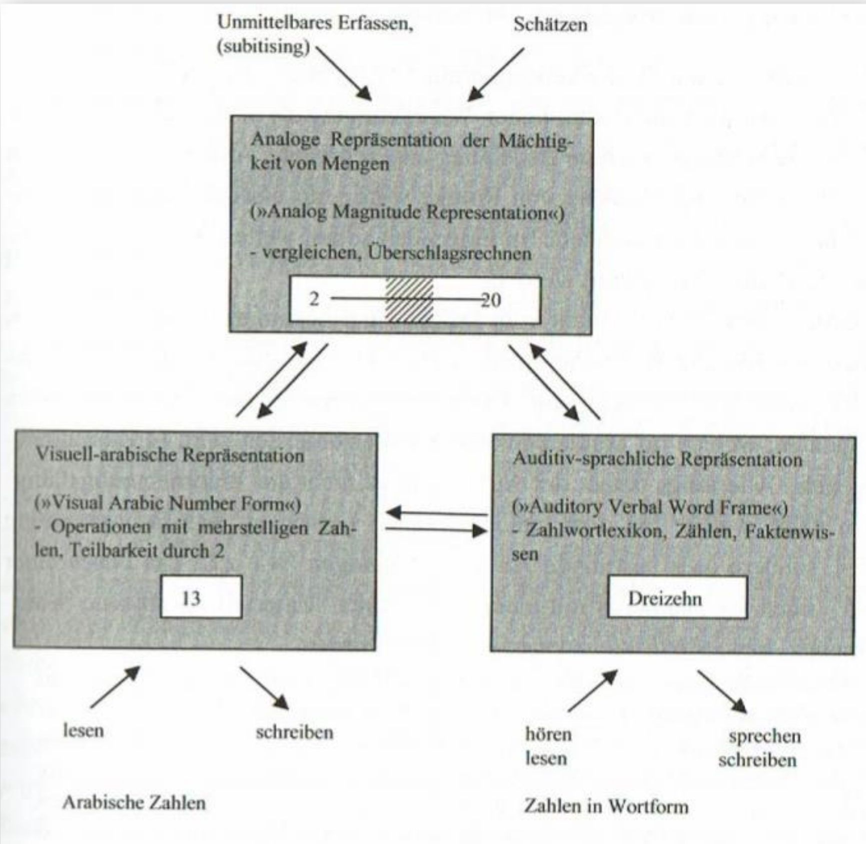


Abb. 1: Triple-Code-Modell nach Dehaene, abgebildet nach von Aster (2003, 168)

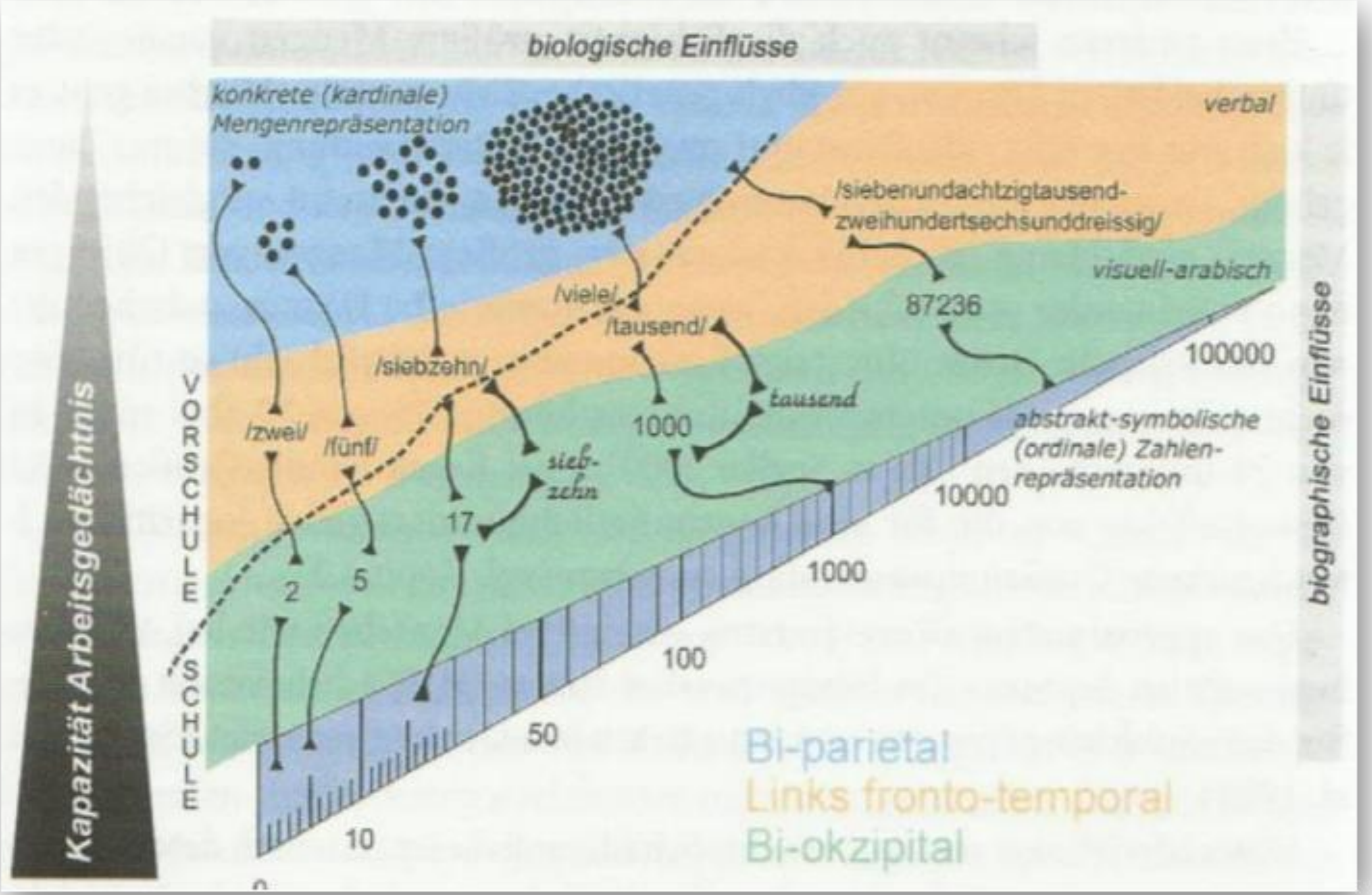
Analoge Repräsentation
Unmittelbares Erfassen von Größen; Schätzen und Vergleichen, räumlich-visuelle, bildhafte Vorstellungen (Zahlenstrahl)

Visuell-arabische Repräsentation
In- und Output in Ziffernform, Verarbeitung mehrstelliger Zahlen, „gerade- ungerade“

Auditiv-Sprachliche Repräsentation
In- und Out gesprochener oder geschriebener Zahlwörter – Verarbeitung von Sprachprozessen

von Astern, 2009

Zahlenverarbeitende Hirnareale



von Astern, 2009

Aufbau des Zahlenbegriffs

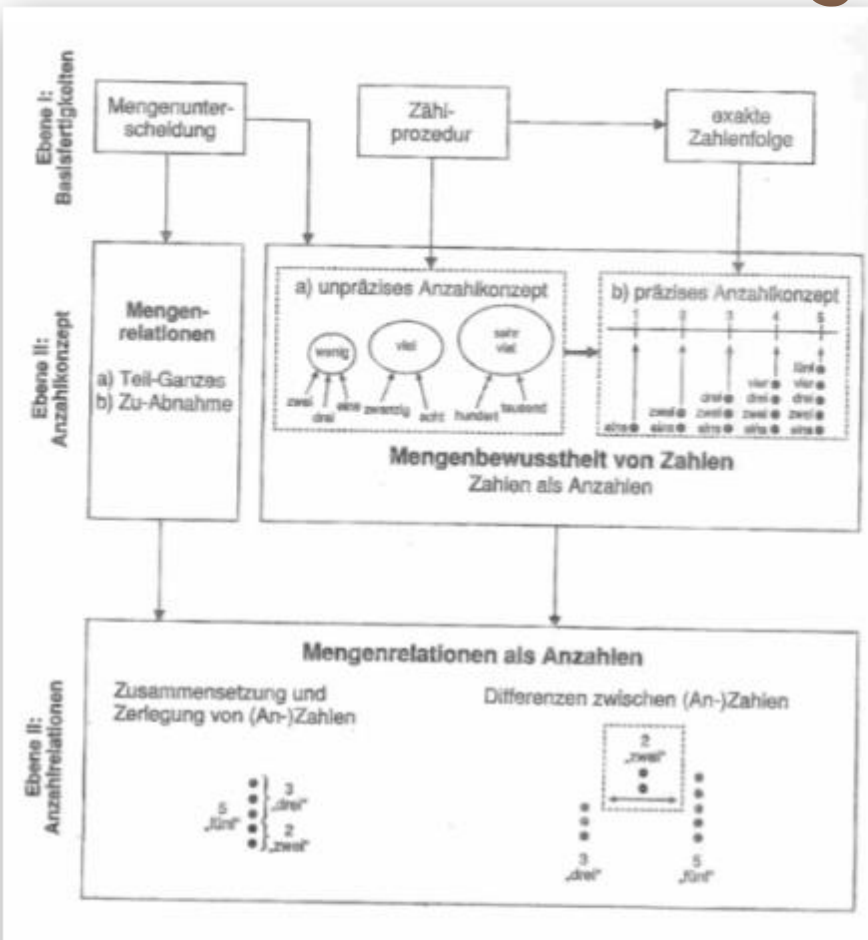


Abbildung 6.1 Modell zum Aufbau des Zahlbegriffs (Krajewski 2007, 276)

Lesetext zur Erklärung: Scherer & Opitz, S. 103 – 105 (E-Book, Universitätsbibliothek)

Scherer & Opitz, 2010, S. 104

Zahlbegriff als subjektive Erfahrung

"Es gibt keine allgemeinen Begriffe. Zwar können wir in einer gegebenen Situation Begriffe mit jedem Allgemeinheitsgrad formulieren, aber sie werden damit nicht in gleicher Allgemeinheit im Gedächtnis abrufbar.
Sie bleiben durch das Mitgelernte kontextgebunden, bereichsspezifisch."

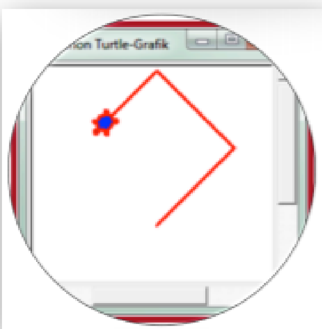
Bauersfeld, H., 1987 (zitiert nach Burscheid & Struve)

Zahlbegriff – Miriams Mikrowelten

(Lawler 1980)

Zähl-Welt
Fingerzählen und zählendes Rechnen (17 – 6)

Geld-Welt: Umgang mit Taschengeld (75 Cent und 26 Cent: drei Quarter, vier und eins)



Dekaden-Welt
Turtle-Grafik (Computerspiel)
90+90=180

Papiersummen-Welt
schriftliches Addition; (spaltenweite über Zählwelt)

Bauersfeld, H., 1983

Zahlbegriff als subjektive Erfahrung:

Beispiel: Gregor (3. Klasse)

Gregor berechnet die Aufgabe 14-5 schriftlich wie nebenstehend.

$$\begin{array}{rrr} & 1 & 4 \\ - & & 5 \\ \hline & 1 & 1 \end{array}$$

I	Kannst du die Rechnung mit Heftklammern legen?
G	*nimmt 5 Heftklammer, legt 4 zur Seite, nimmt eine weitere dazu*

- Heftklammer werden behandelt als Objekte der „Spaltenrechnung“
- Heftklammern als Objekte der „Zählwelt“ werden somit nicht zur Neukonstruktion einer Lösung für die „Spaltenrechnung“ genutzt

Bauersfeld, H., 1983

Zahlbegriff: subjektive Erfahrungsbereiche

- **Instrumentale Welten:** Zählzahlen und Spezialisierungen
  - „Objekte“ (Perspektiven) der Microwelt und ihre Operationen
  - empirische Erfahrungen: „task-rooted microworlds“
- **Serienwelten:** „Zusammenwirken von Lösungswegen“
  - schafft als mentales Modell Verknüpfung zwischen IW
- **Konforme Welten:**
  - „Metaperspektive“: Zahl als abstrakter Begriff, der die Integration der instrumentellen Welten ermöglicht
  - IW werden als „äquivalent“ betrachtet (natürliche Zahlen)

subjektive Erfahrungsbereiche: Konsequenz

Wissenskonstruktion von Kindern erfolgt über **„Alltagstheorien“** , die sich im Umgang mit der WELT entwickeln und bewähren.

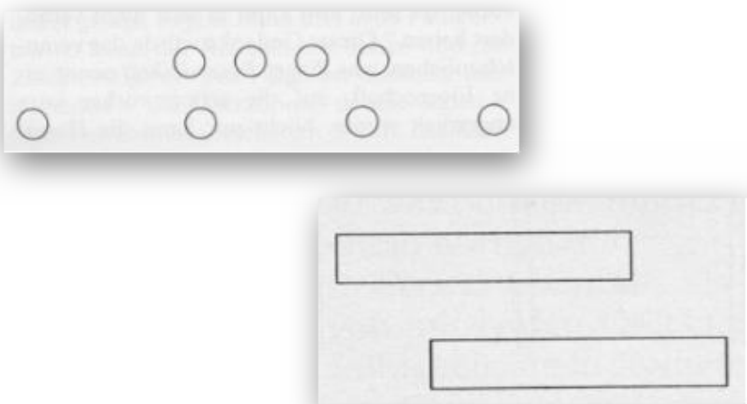
(vgl. Burscheid & Struve, 2014)

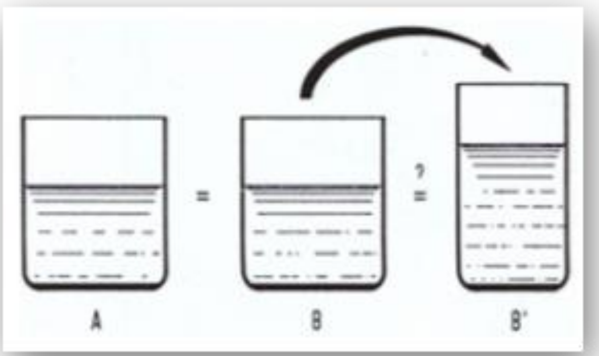
„Damit ist eine Didaktik in Frage gestellt, die sich auf eine allgemeingültige Sachstruktur, eine gesetzmäßig ablaufende Entwicklung, eine bei allen Schülern anzunehmende gleiche kognitive Struktur bezieht!“

Begemann, E., 1984

Conserver versus Non-Conserver

- Piaget (Invarianz): Anzahl, Länge, Fläche, Volumen

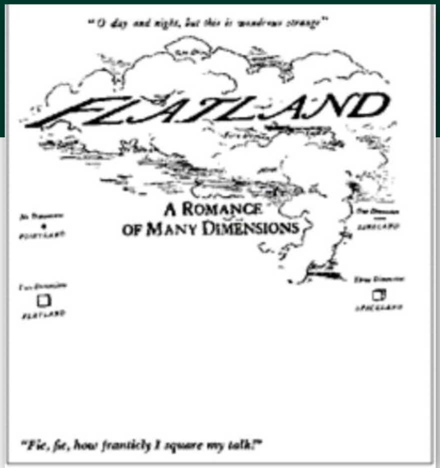




- Und beim Gewicht?
  Eine mit einer Federwaage gewogene Masse von 80 Kilogramm „Erdgewicht" wiegt auf dem Mond nur 13 Kilogramm „Mondgewicht".

http://www.lern-psychologie.de/kognitiv/piaget.htm
http://ddi.cs.uni-potsdam.de/Lehre/Unterrichtshilfen/aufgabe_2/texte/stadientheorie_psych_d_lebens.htm

Längeninvarianz im Flatland



- Carnap (1891 – 1970) und die „Schattenwesen“:

Können Schattenwesen durch Messungen entscheiden, ob sie auf einer Kugel leben oder auf einer Ebene?

Statt achtmal ein Maß auf einer Kugeloberfläche (von a´ bis h´) abgetragen
zu haben, könnte man ihn auch achtmal (von a bis h) in der Ebene aneinandergelegt haben, wobei Kräfte im Laufe der Messung seine Länge verändert haben (Fig. 13).

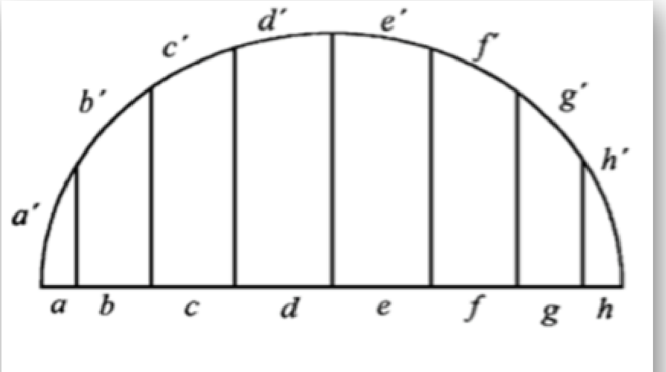


Fig. 13

vgl. Struve, H., 2015

Invarianz als soziale Aushandlung

„Das Durchführen der inversen Transformation hat keinen Einfluß auf die „Varianz“-Urteile. – Nur nach der von den Conservern vertretenen Theorie bleibt die betrachtete Eigenschaft bei der inversen Transformation invariant. Ein Non-Conserver kann dagegen die These vertreten, daß die Effekte der bei dem Invarianzversuch durchgeführten Transformation und die Effekte der inversen Transformation sich gegenseitig aufheben.
(im Perlenbeispiel: das Umstecken der Perlen von einem Brett auf ein anderes verändert die Menge, Das Zurückstecken macht diese Veränderung aber wieder rückgängig).“

Struve, H., 2015
Bild: https://de.ubergizmo.com/2012/08/31/sonnensystem-waage-das-eigene-gewicht-auf-jedem-planeten-des-sonnensystems.html

Empirische Erfahrungen (I)

„37. Lege 2 Äpfel auf die leere Tischplatte, schau daß niemand in ihre Nähe kommt und der Tisch nicht erschüttert wird; nun lege noch 2 Äpfel auf die Tischplatte; nun zähle die Äpfel, die da liegen. Du hast ein Experiment gemacht; das Ergebnis der Zählung ist wahrscheinlich 4. (Wir würden das Ergebnis so darstellen: wenn man unter den und den Umständen erst 2, dann noch 2 Äpfel auf einen Tisch legt, verschwindet zumeist keiner, noch kommt einer dazu.) Und analoge Experimente kann man, mit dem gleichen Ergebnis, mit allerlei festen Körpern ausführen.“

Wittgenstein, L., 1984, I.37, S.51 f.




Pixabild: maja7777 (frei)

Empirische Erfahrungen (II)

„... So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man läßt sie 3 Bohnen hinlegen und noch 3 Bohnen und dann zählen, was da liegt. Käme dabei einmal 5, einmal 7 heraus, (etwa darum weil, wie wir jetzt sagen würden, einmal von selbst eine dazu-, einmal eine wegkäme), so würden wir zunächst Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschehe das Gleiche aber Stäben, Fingern, Strichen und den meisten anderen Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende.

»Aber wäre dann nicht doch 2 + 2 = 4 ?« – Dieses Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden.–“

Wittgenstein, L., 1984, I.37, S.51 f.

Kenntnisstand Schulanfang

Einige Fakten zur „Normalerwartung“

Zählen (I)

Kurz vor Schulbeginn können

- 90% die Zahlwortreihe bis 20 aufsagen.
- 75% Mengen mit mindestens 20 Elementen zählen.
- 40% der Kinder von verschiedenen Startzahlen aus in Einerschritten vorwärts und rückwärts zählen.

Clarke, Clarke, Grüßing & Peter-Koop, 2008

Zählen (II)

Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung,
Studie mit 300 Kindern unmittelbar vor Schulbeginn.
(Hasemann & Gasteiger, 2014, S. 83 f.)

- Zählen (Aufsagen der Zahlwortreihe) bis 20 — 77%
- Weiterzählen von 9 bis 15 — 72%
- In Zweierschritten von 2 bis 14 zählen — 50%
- 20 geordnete Klötze abzählen — 58%
- 20 ungeordnete Klötze abzählen — 49%
- Ohne sie zu sehen wissen, dass 13 Bonbons mehr sind als 9 — 69%

Zählen (III)

Leistungsheterogenität bei Schulanfängern ...

- 96 % zählen bis 10 oder weiter,
  also können 4 % noch nicht bis 10 zählen
- 75 % (oder mehr) erreichen die 20
  (danach hohe Abbruchrate)
- 15 % erreichen die 100
  (typische fehlerhafte Fortsetzung 100, 200, ...)
- 5 % kommen korrekt über die 100 hinaus

... als Große Herausforderung für den Schulalltag!

Zählen (IV)

- Flexible Zerlegung einer natürlichen Zahl auf möglichst viele verschiedene Arten
- Zeige 6 Finger
  - 1 Art 99%
  - 2 Arten 56%
  - 3 Arten 26%

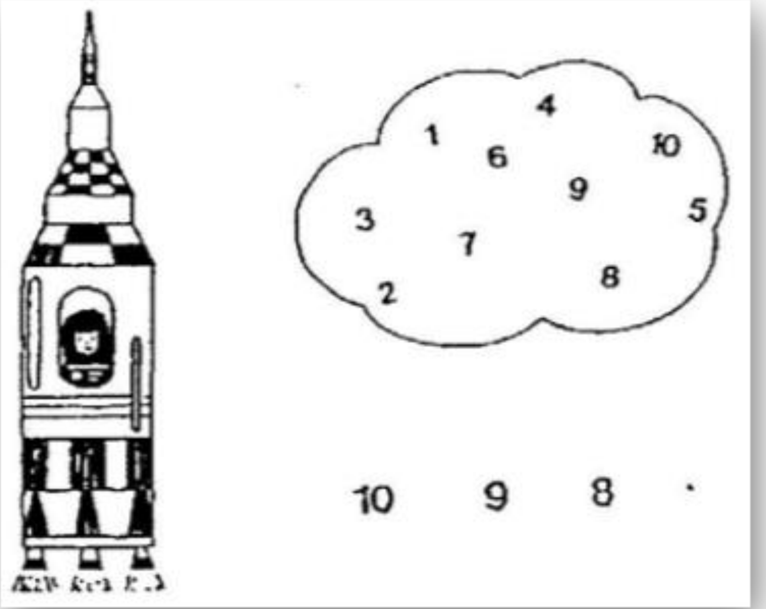
© Birgit Brandt

Rückwärts Zählen - Ziffernkenntnis

Auf diesem Bild ist eine Rakete abgebildet. Bevor diese von der Erde in den Weltraum abhebt, zählt man einen Countdown. Auf dem Bild hat jemand angefangen zu zählen.
10 – 9 – 8 …, welche Zahl kommt jetzt? Kreuze sie an.

- 60% der Kinder lösen die Aufgabe richtig.
- Starke Leistungsheterogenität zwischen Klassen (95% in der besten Klasse, 20% in der schlechtesten, auch innerhalb einer Schule!)

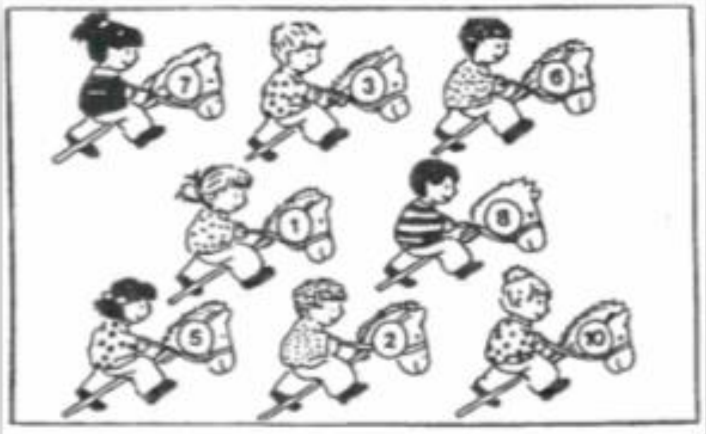
z.B. Padberg & Benz, 2011, S. 19



Grassmann, 2000

Ziffernkenntnis

- Ziffern erkennen (Grassmann, 2000)
  - Einstellig (5): 95 %
  - zweistellig (13): 60%



Ziffern ordnen (Clarke, Clarke, Grüßing & Peter-Koop, 2008)

- 80 % der Kinder ordnen Ziffernkarten richtig (1 bis 9)
- Hoher Anstieg im letzten Kindergartenjahr, insbesondere mit Berücksichtigung der Null
  47% → 79%

Vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 20

Ziffern schreiben (Schmidt 1982)

Ziffer	richtig (%)	lesbar (%)	spiegelbildlich (%)	falsch/nicht bearbeitet (%)
0	87	4	0	9
1	67	3	26	5
2	50	12	13	25
3	56	5	23	16
4	55	8	15	22
5	48	6	15	31
6	48	6	18	27
7	40	10	18	33
8	62	14	0	24
9	34	9	20	38

Vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 20

Vorkenntnisse – was nun?

- Indikator für die Notwendigkeit von Differenzierung
- Orientierung (insbes. für Berufsanfänger)
- Ansatzpunkte für eigene Erhebung zur Lernausgangslage / Diagnostik

Aber

- Die meisten Studien erfassen keine Strategien.
- Fehler werden als falsche Antworten gewertet, nicht als Potenzial für den Lernprozess (logische Eigenkonstrukte).
- Testbatterien können die Beobachtungen im Unterricht (Eigenproduktionen, Einzelgespräche) nicht ersetzen.

Anfangsunterricht

Arithmetik in den ersten Schulwochen

Der arithmetische Anfangsunterricht

- Ziel: Sicherheit und Flexibilität beim Rechnen im Zahlenraum bis 20
- Weg: strittig
- Einflussfaktoren der Konzeption:
  - bildungspolitisch
  - pädagogisch
  - psychologisch

Vgl. Hasemann & Gasteiger, 2010, S. 77 ff.

Die ersten Wochen - Zahlenraum

- Zahl für Zahl:

  Synthetische Methode. Verbindung kardinaler und ordinaler Aspekte.
- bis 4, 5, oder 6

  Prinzip der kleinen Schritte. Kardinaler Aspekt, Kleiner-Relation.
- bis 10, bis 20, darüber hinaus?

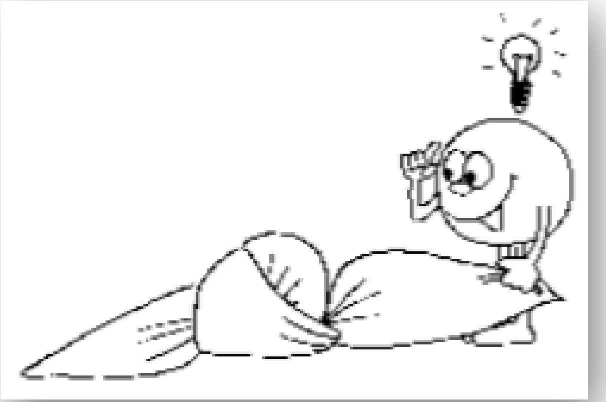
  Ganzheitliche Einführung des Zahlenraums.

  Systematisierung der Vorkenntnisse, aktiv-entdeckendes Lernen.

… Erwartungshaltung der Kinder …
… großes Vorwissen …
… hohe Heterogenität…
… Motivation…

Die ersten Wochen – Inhalte

- Zählkompetenzen festigen und vertiefen
- Vorerfahrungen mit Zahlen vertiefen und verknüpfen (Zahlaspekte)
- Zahlen unterschiedlich darstellen
- Zahlen zerlegen
- Zahlen vergleichen und ordnen
- Zahlen schreiben und lesen



Quelle unbekannt

Verfestigen und Vertiefen: Zählen

- Vorwärts von 1 aus
- Vorwärts von einer festen Zahl >1
- Weiterzählen von 7 um 3 Zahlen
- Um wie viel muss man von 7 bis 13 weiterzählen?
- Welche Zahlen kennst du zwischen 7 und 13?
- Rückwärtszählen von einer festen Zahl aus
- Rückwärtszählen von 13 bis 7
- Rückwärtszählen von 13 um 4 Zahlen
- Einsatz des Zählens beim Größenvergleich
- Einsatz des Zählens bei der Addition und Subtraktion
- Zählen in größeren Schritte

Rhythmisch und mit Bewegungen

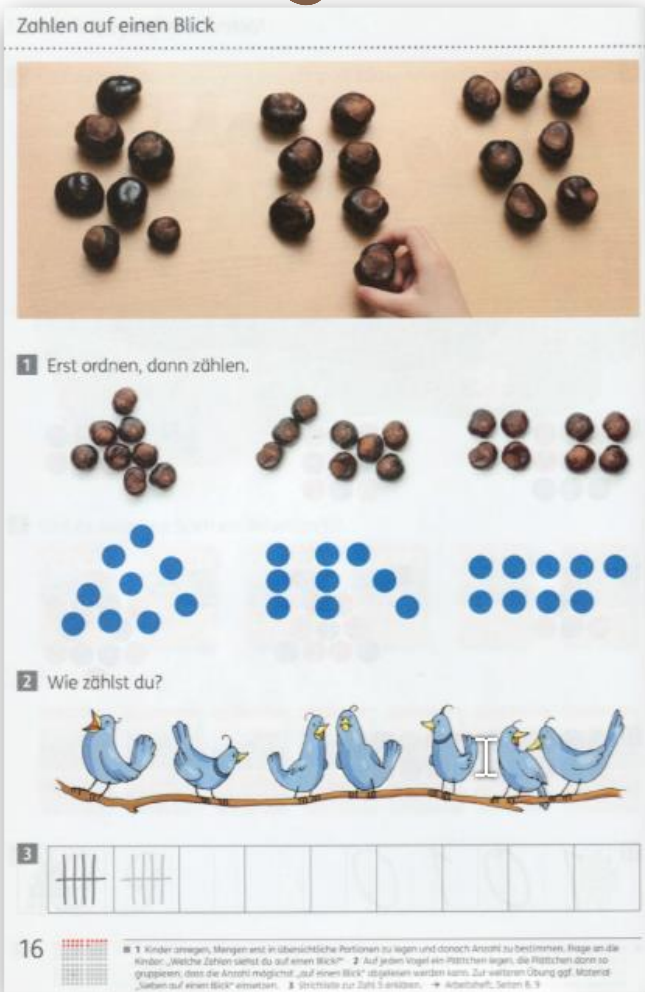
Vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 32 ff.

Orientierung im ABC

Typische Zählaufgaben aus dem Anfangsunterricht sind hier auf das ABC übertragen. Versuchen Sie, diese Aufgaben zu lösen und reflexieren Sie dabei Ihr Vorgehen und Ihre Schwierigkeiten!

- Vorwärts, starte mit J
- Von T aus fünf Schritte weiterzählen
- Wie viele Schritte muss man von E bis L weiterzählen?
- Von V aus fünf Schritte Rückwärts
- Vorwärts in Dreierschritten von A
- Und rückwärts von Z im Doppelschritt?

Verfestigen und Vertiefen - Zählen

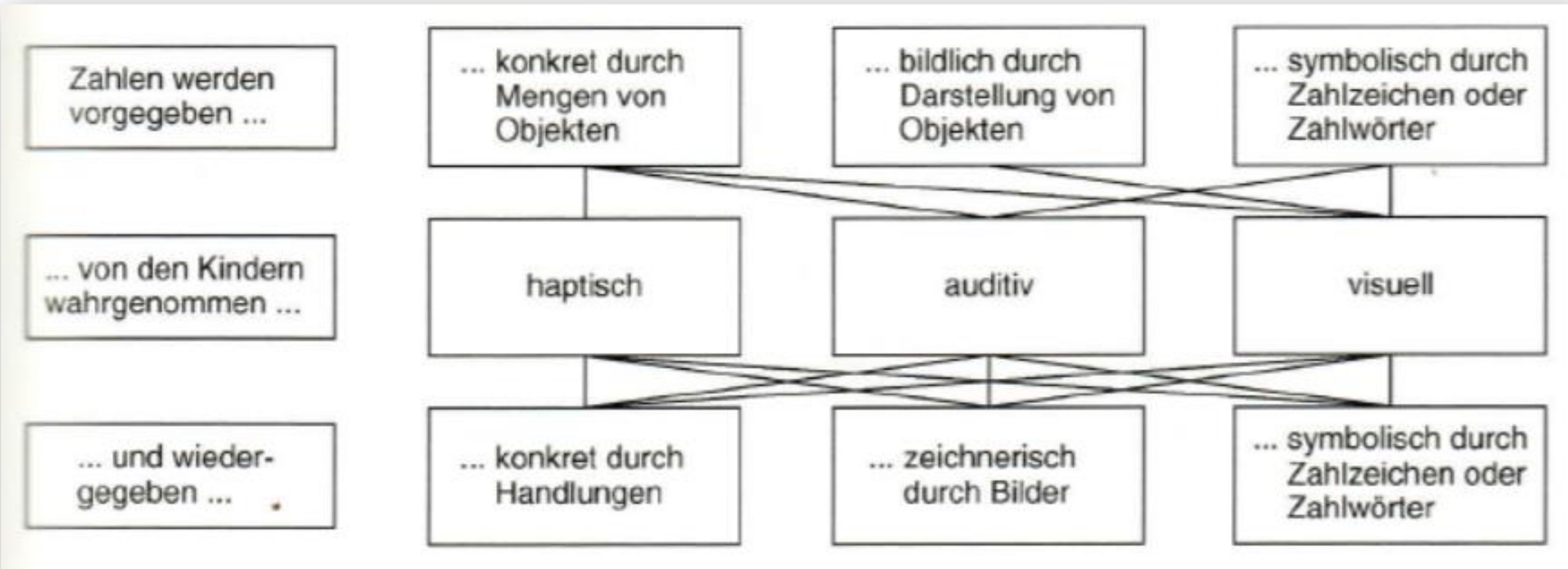


Sicher und fehlerfrei durch:

- Zeigen, Antippen, Wegnehmen
- Repräsentation der zu zählenden Objekte durch Finger oder Strichlisten
- Ordnen und/oder Bündeln

Zahlenbuch Klasse 1, S. 16

Zahlen darstellen und erfassen (I)



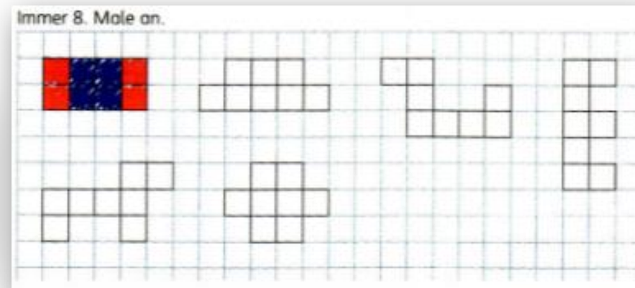
Radatz, Schipper, Dröge & Ebeling, 1996, S. 62

Zahlen darstellen und erfassen (II)

- Strukturierungsfähigkeit und strukturierte Mengendarstellungen
  - Förderung nicht-zählender Zahlauffassung
  - quasi-simultane Zahlauffassung
  - Auffassung von Mengen als Summe kleinerer Mengen (Teil-Ganzes Beziehung)
  - verschiedene Strukturierungen herstellen

Zahlen darstellen und erfassen (III)

Immer 8!

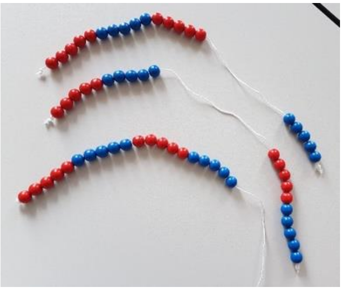


- nicht-zählende Zahlauffassung
- Menge als Komposition aus Teilmenge (→ Zahlen zerlegen)

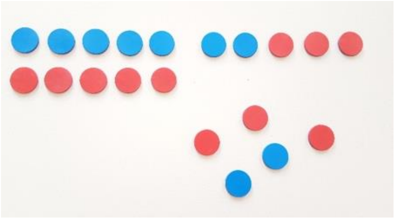
Padberg & Benz, 2011, S. 36; Zahlenbuch 1, S. 16

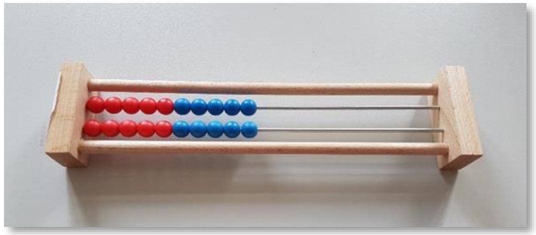
Zahlen darstellen und erfassen (IV)

- Strukturen in Arbeitsmittel und Materialien erkennen und nutzen
  - Kannst du die Eier so einsortieren, dass man schnell sieht, wie viele es sind?
  - Geht es auch ohne Zählen?
  - Warum kann man das jetzt besser sehen?
  - Geht es auch anders?



- Didaktische Materialien mit 5er- und 10er-Strukturierung
  - Warum wechselt immer nach fünf Kugeln die Farbe?
  - Konntest du schnell erkennen, welche Zahl du gesehen hast? Warum?
- Strukturen beschreiben

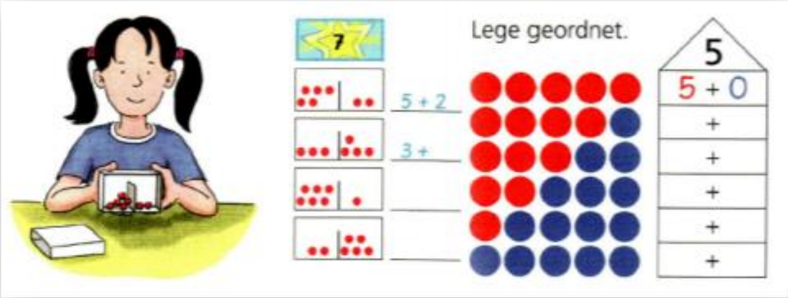




Quelle: Eigene Aufnahmen

Zahlen zerlegen (I)

- EIS-Prinzip:
  Enaktiv – ikonisch – symbolisch
  - Konkrete Handlungen
  - Bilder
  - Symbolische Notation

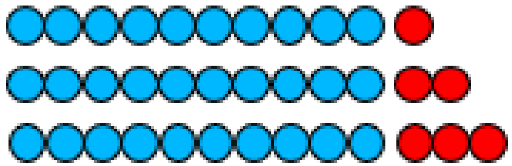


- Thematisierung der verschiedenen Darstellungsformen

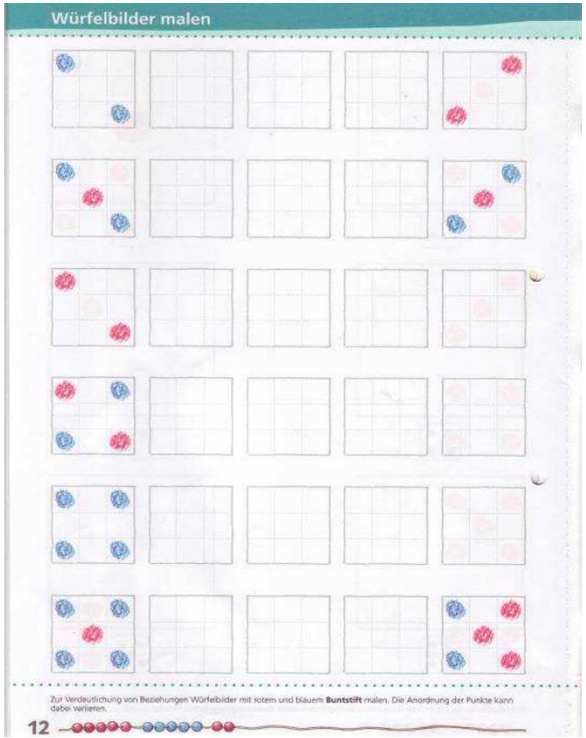
Welt der Zahl 1, S. 24, 26

Zahlen zerlegen (II)

- Zentral für kardinales Zahlenverständnis und die Teil-Ganzes-Beziehung
- Vorbereitung von Addition und Subtraktion
- Grundlage für Zahlwortbildung
- Grundlage für Einsicht in Stellenwertsystem



11=10+1
12=10+2
13=10+3

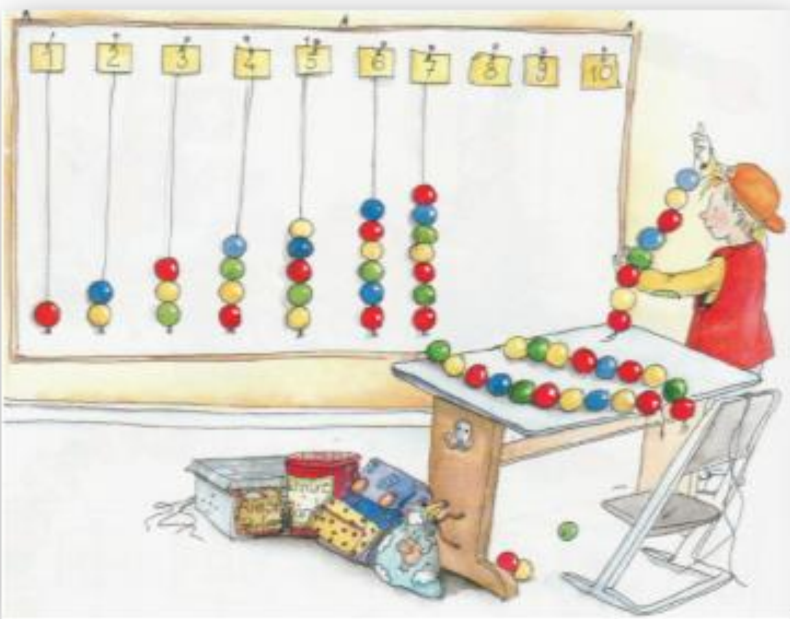


5=4+1 oder 5=2+3

Wittmann & Müller, 2009; Malheft zur Frühförderung 1

Zahlen vergleichen (I)

- Zahlen – Mengenvergleich
    - Paarweises Zuordnen
    - Zählen



Quelle unbekannt

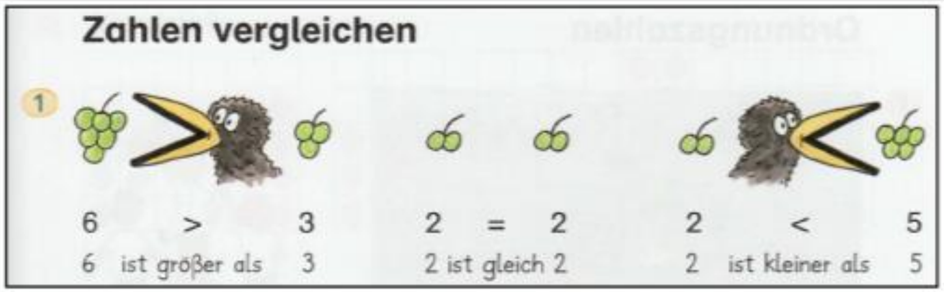
- Mathematische Relationen:
    - größer als
    - kleiner als
    - ist gleich

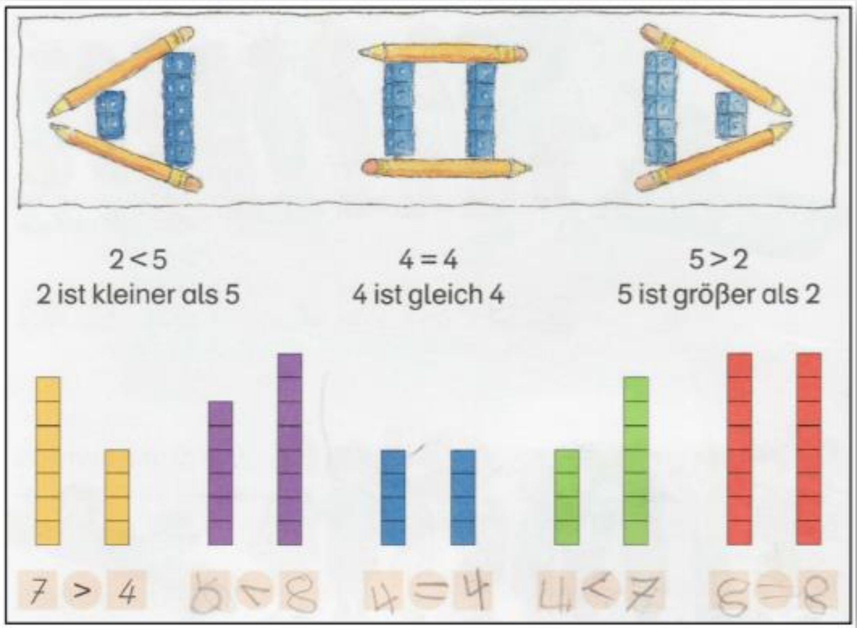
- Symbole

$>$ $<$ $=$

Zahlen vergleichen (II)

- Merkhilfen mit Hindernissen





größer – kleiner als
Mengenrelation (kardinal)!

mehr – weniger

MatheHaus1, S. 34; Duden Mathematik 1, S. 21

Die ersten Wochen - Methoden

- Wechsel von Konzentrations- und Entspannungsphasen
- Wechsel der Sozialformen
- Bewegung
- Differenzierende und offene Unterrichtsgestaltung
- Offene Aufgaben
    - Hirt, U./Wälti, B., 2010
    - Nührenbörger, M./Pust, 2011
    - Schütte, S., 2008
    - Projekt PIKAS der Uni Dortmund.
    - Krauthausen, G./Scherer, P., 2010

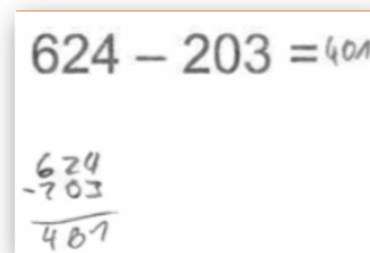
Anhang: Null als besondere Zahl

Null als besondere Zahl

Null−Operator :

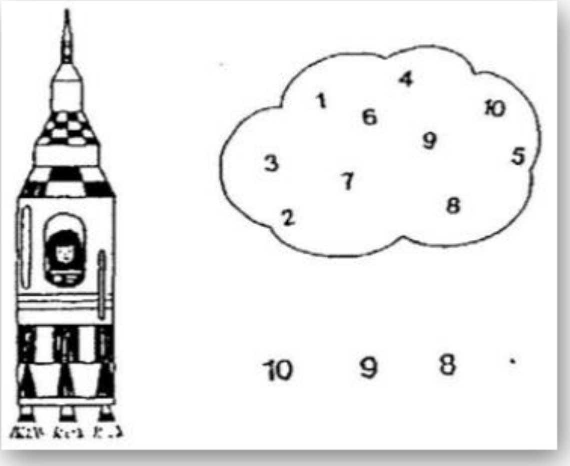
$13 \times 0 = 13$

$0 : 13 = 13$



Null – 0 - Zero

- Null als Ziffer
  - Schreibweise und Ziffernbild
  - Bedeutung im Stellenwertsystem (10, 20, 100)
- Null als Zählzahl
  - Abzählen von Anzahlen: Eins als Startzahl
  - Null als Zielzahl: rückwärts zählen (Countdown)
- Null als Kardinalzahl
  - Leere Menge: Null als „nichts“
  - Kein Element: Anzahl Null



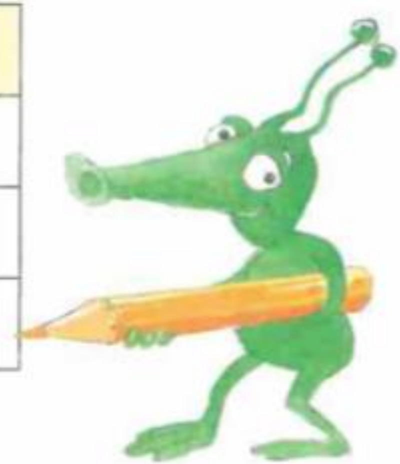
Grassmann, 2000

Die Null als Rechenzahl

Mathematikus 1, S. 82, 83

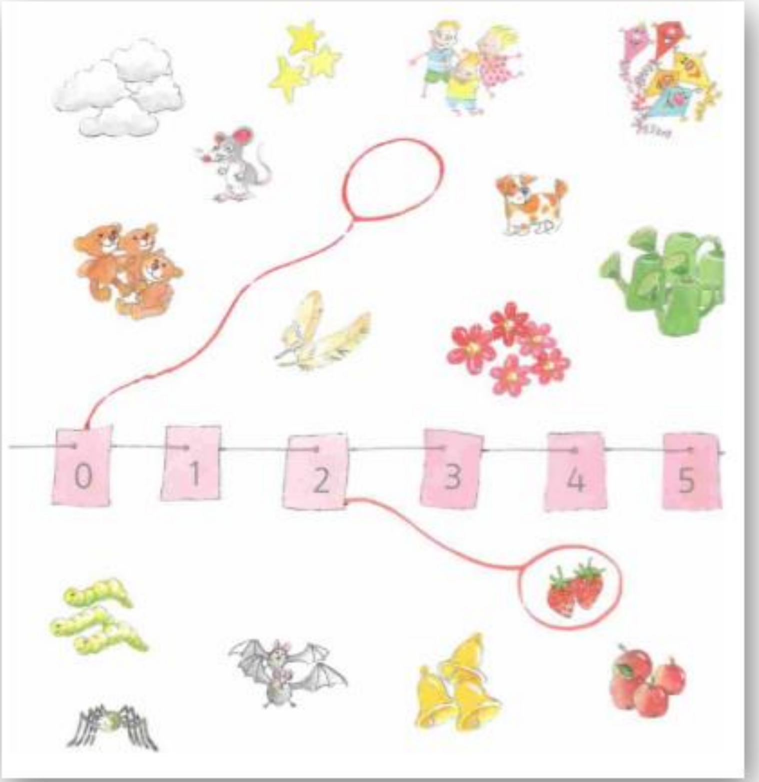
5 − 5 = 0	5 − 0 = 5	1 + 0 = 1
5 − 4 = 1	4 − 0 = 4	2 + 0 = 2
5 − 3 = 2	3 − 0 = 3	3 + 0 = 3
5 − 2 = 3	2 − 0 = 2	4 + 0 = 4
5 − 1 = 4	1 − 0 = 1	5 + 0 = 5
5 − 0 = 5	0 − 0 = 0	6 + 0 = 6

+	2	4	6
3			
0			
5			

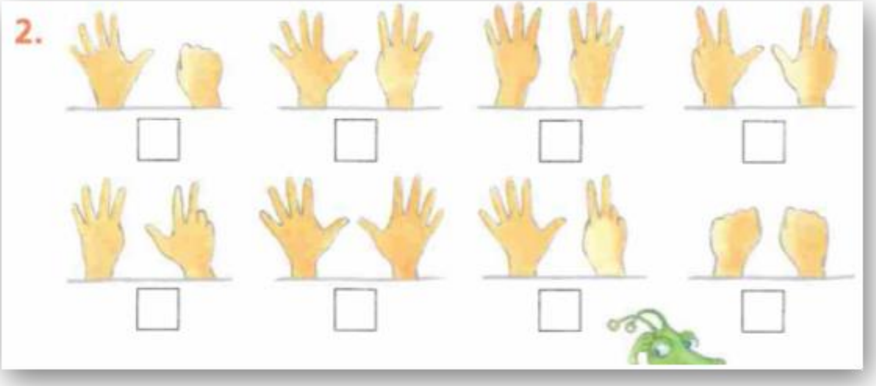


+	3	1	9
4			
5			
7			

Die Null als Kardinalzahl

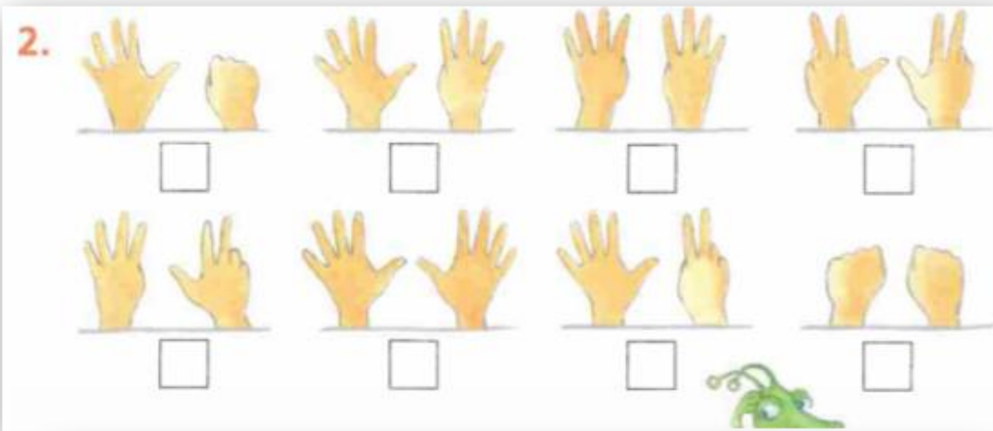


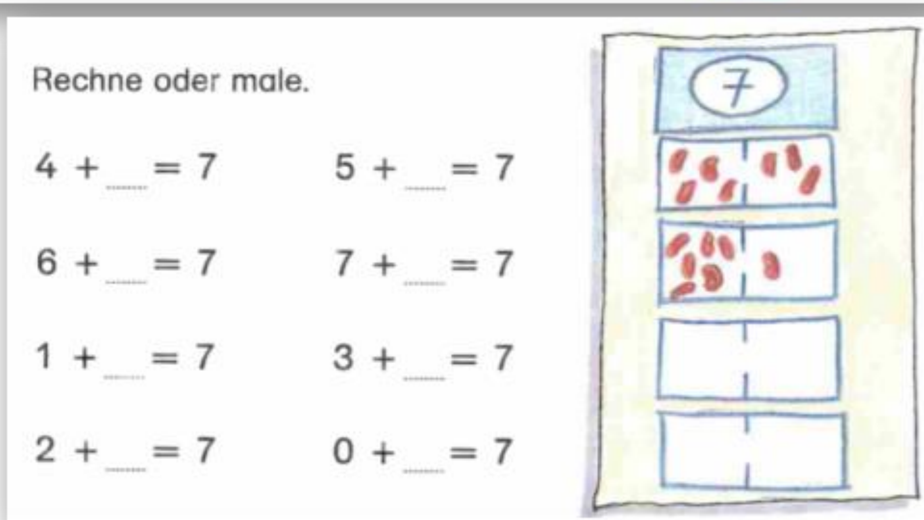
6jährige	7jährige	8jährige	9jährige
12	11	1	0



Mathematikus 1, S. 4, 11

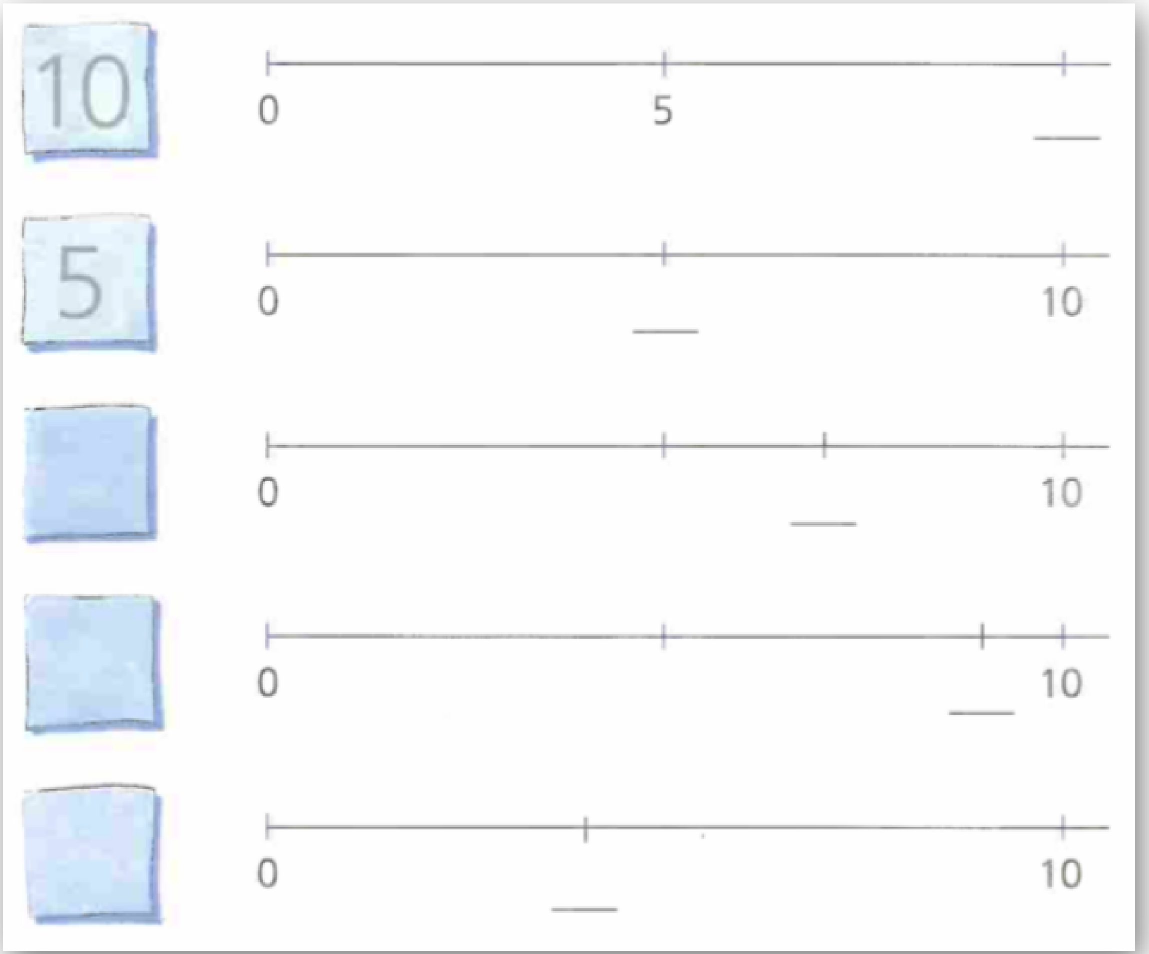
Die Null als Zerlegungszahl





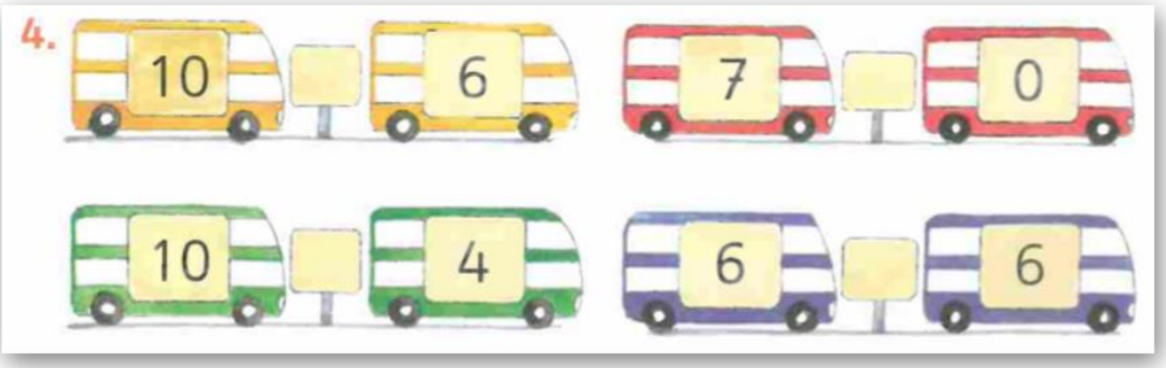
Mathematikus 1, S. 11

Die Null am Zahlenstrahl



Mathematikus 1, S. 13

Die Null in Sachsituationen



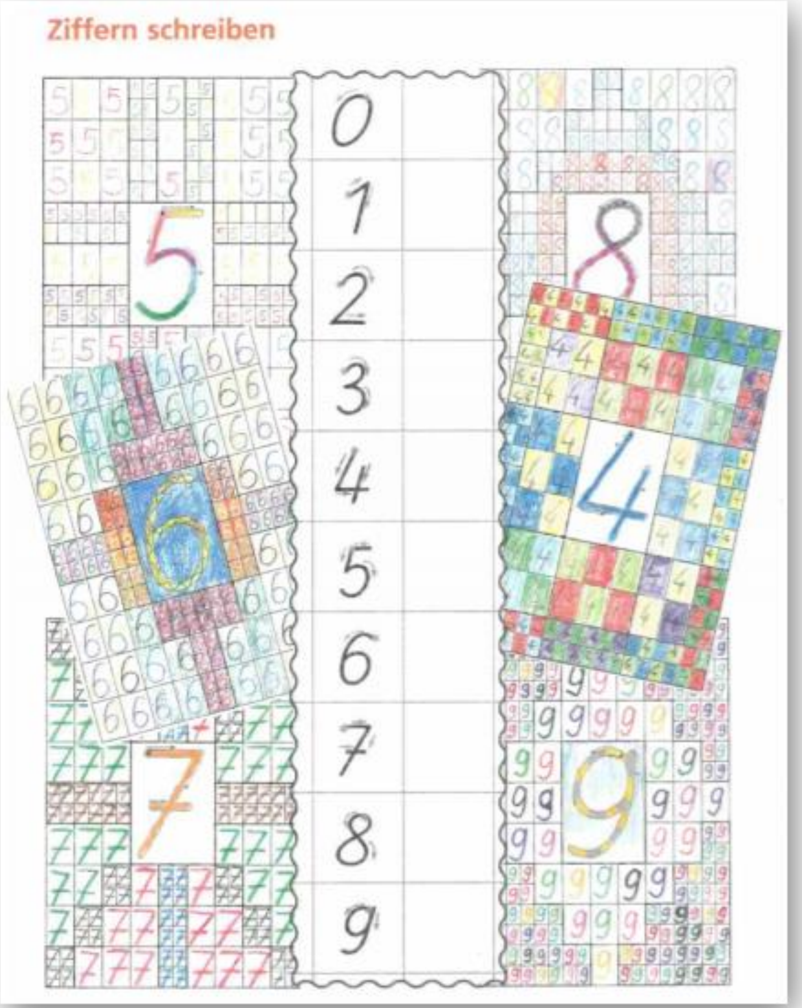
Mathematikus 1, S. 55

Aussteigen – Subtraktion:

10 _____ = 6   7 _____ = 0

10 _____ = 4   6 _____ = 6

Ziffern schreiben



Mathematikus 1, S. 7

Null: Rückwärts zählen

Quelle unbekannt

Anfangsunterricht - Literaturhinweise

Vorerfahrungen von Schulanfängern

- Hasemann (2010). Anfangsunterricht Mathematik. Spektrum Akademischer Verlag. (S. 1-46)
- Spiegel/Selter (2006). Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Kallmeyer.
- Peter-Koop/Grüßing (2007). Mit Kindern Mathematik erleben. Lernbuchverlag bei Friedrich in Velber.
- Peter-Koop, Wollring, Grüßing, Spindeler (2013). EMBI, Zahlen und Operationen. Mildenberger Verlag.
- http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/Mathe10.pdf

Offene Unterrichtsgestaltung, offene Aufgaben, Differenzierung

- Hirt, U./Wälti, B (2010). Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte. Klett Kallmeyer.
- Krauthausen, G./Scherer, P. (2010): Umgang mit Heterogenität – Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen. Kiel: IPN-Materialien. Download unter: http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Krauthausen-Scherer.pdf
- Nührenbörger, M./Pust, S. (2011). Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien für einen differenzierenden Anfangsunterricht Mathematik. Seelze: Kallmeyer.
- Projekt PIKAS der Uni Dortmund: http://www.pikas.tu-dortmund.de/materialpik/index.html
- Schütte, Sybille (2008). Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur. München: Oldenbourg.

Literaturverzeichnis (I)

- Burscheid, H. J. & Struve, H. (2014). *Empirische Theorien im Kontext der Mathematikdidaktik*. Wiesbaden: Springer Spektrum
- von Astern, M. (2009). Neurowissenschaftliche Ergebnisse und Erklärungsansätze zu Rechenstörungen. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 197-213). Weinheim und Basel: Beltz.
- Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe.* Heidelberg: Spektrum.
- Bauersfeld, H. (1987). *Extrapolationen aus Mikroanalysen mathematischer Lehr - Lern – Prozesse zur möglichen Förderung sog. Hochbegabter*. Universität Hamburg.
- Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld u.a. (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht* (Bd 6, S. 1-56). Köln: Aulis Verlag Deubner
- Begemann, E. (1984). Innere Differenzierung als Aufgabe des Mathematikunterrichts.
- Hasemann, K. & Gasteiger, H. (2014). Anfangsunterricht Mathematik (3. Aufl.). Heidelberg, Berlin: Springer Spektrum.
- Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge: Harvard University Press.
- Fuson, K.C. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer-Verlag.

Literaturverzeichnis (II)

- Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Springer.
- Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. 1. Schuljahr.* Hannover: Schroedel.
- Wittmann, E. & Müller, G. (2017). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band I: Vom Einspluseins zum Einmaleins.* Seelze: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.
- Brandt, B. & Vogel, R. (2017). Frühe mathematische Denkentwicklung. In U. Hartmann, M. Hasselhorn, & A. Gold (Eds.), *Entwicklungsverläufe verstehen - Kinder mit Bildungsrisiken wirksam fördern. Forschungsergebnisse des Frankfurter IDeA-Zentrums* (pp. 207-225).
- Wittgenstein, L. (1984). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Struve, H., 2015 (unveröffentlichtes Tagungspapier)
- Clarke, B., Clarke, D., Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2008). Mathematische Kompetenzen von Vorschulkindern: Ergebnisse eines Ländervergleichs zwischen Australien und Deutschland. *Journal für Mathematik-Didaktik, (29), 259-286.*
- Grassmann, M. (2000). Kinder wissen viel – Zusammenfassende Ergebnisse einer mehrjährigen Untersuchung zu mathematischen Vorkenntnissen. Hannover: Schroedel