

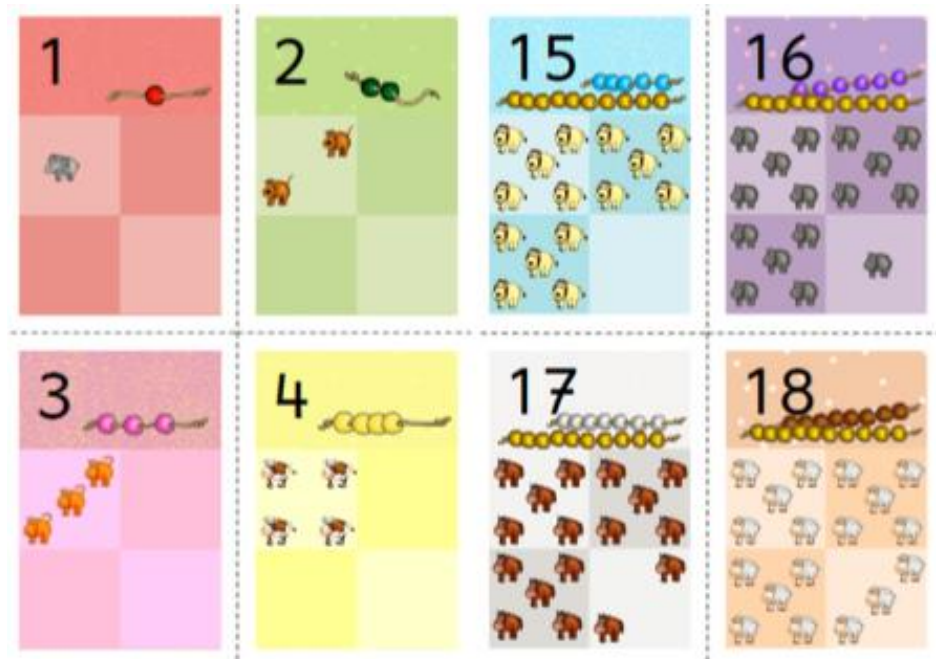
Didaktik der Arithmetik

- Vorlesung Vertiefungsmodul LAGS-GSD-MA-VM1

Grundschuldidaktik Mathematik

Prof. Dr. phil. Birgit Brandt

Wintersemester 2024/25



Herzlich Willkommen!

- **Studienordnung 2020:** PLV und PL (Präsentation mit wiss. Hausarbeit) werden im Sommersemester in den Seminaren abgedeckt.
- **Studienordnung 2022:** (Studienstart WiSe 22/23 oder später): PLV im Wintersemester (60 Minuten Klausur zur Vorlesung). PL im Sommersemester (Präsentation mit Hausarbeit).
- **Grundlegende Literatur:**
 - Padberg/Benz (2021). Didaktik der Arithmetik (5. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag.
 - Hasemann (2020). Anfangsunterricht Mathematik (4. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag.
 - Padberg/Büchter (2015). Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik (2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag.
 - Müller/Wittmann/Steinbring (Hrsg.) (2005): Arithmetik als Prozess. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Sprechstunde

Mo, 12:00 – 13:00 Uhr

Präsenz: Raum A 23.105 (Carolastraße 4–6)

Online: zoom-Büro über Opal (bitte vermerken)

**Anmeldung erforderlich; Zugang über Opal (Basismodul)
oder über die Homepage**

Themenübersicht

- Fachliche, historische und kulturelle Hintergründe
- Zahlbegriffsentwicklung, Zählkompetenz
- Anfangsunterricht
- Zahlraum- und Zahlbereichserweiterung
- Rechenoperationen
 - Grundvorstellungen
 - Rechenverfahren (Kopfrechnen, halbschriftliche Strategien, Algorithmen)
- Elementare Algebra
 - Rechengesetze
 - Muster und Strukturen: Begründen und Beweisen
- Arithmetische Zahlentheorie
 - Teilbarkeit und Primzahlen

14.10.24	1. Einführung
21.10.24	2. Einblicke
28.10.24	3. Zahldarstellung und Stellenwertsystem
04.11.24	<i>Videovorlesung 1</i>
11.11.24	4. Zahlbegriffsentwicklung und Schulanfang
18.11.24	<i>Videovorlesung 2</i>
25.11.24	5. Zahlraum und Zahlbereich
02.12.24	6. Grundrechenarten – Grundlagen
09.12.24	
16.12.24	7. Grundrechenarten – didaktische Perspektive
06.01.25	8. Rechengesetze und Rechenstrategien
13.01.25	
20.01.25	9. Schriftliches Rechnen <i>Videovorlesung 3</i>
27.01.25	10. Algebra und Zahlentheorie <i>Videovorlesung 4</i>
04.02.25	Puffer / Fragestunde



Ein erster Arbeitsauftrag

Was sind und was sollen die Zahlen?

Mentimeterumfrage:

Bitte geben Sie bis zu vier Begriffe ein,
die Ihnen im Zusammenhang mit dieser
Frage einfallen.

<https://www.menti.com/77641846>

<https://www.menti.com/alpgs5uwhg72>



Was sind und was sollen die Zahlen¹ (I)

„**Zahl**“ ist ein zentraler Begriff der Arithmetik. Als Grundlage für das Modul sollten Sie sich mit diesem Begriff zunächst intensiv beschäftigen.



¹ Dedekind, 1872

Was sind und was sollen die Zahlen (II)

Als individuellen Arbeitsauftrag sollten Sie Ihre individuellen Ideen und Gedanken in Bild und Schrift sammeln und (digital) festhalten, bevor Sie sich mit den einzelnen Foliensätzen auseinandersetzen:

- *Wo kommen Zahlen her? Wie lassen sie sich ordnen, beschreiben oder definieren?*
- *Welche Bedeutung haben Zahlen für den Alltag, Kultur und Gesellschaft?*
- *Und was bedeuten Zahlen für Kinder?*

Eine Vertiefung findet in den Seminaren im nächsten Semester statt!

Inhaltliche Einführung

Was ist Arithmetik?

Kunst / Wissenschaft der Zahlen: Strukturen der natürlichen Zahlen

(natürliche) Zahlen und ihre Darstellung

(natürliche) Zahlen und ihre
Eigenschaften

(natürliche) Zahlen und ihre Operationen

Elementare
Algebra

Arithmetische
Zahlentheorie

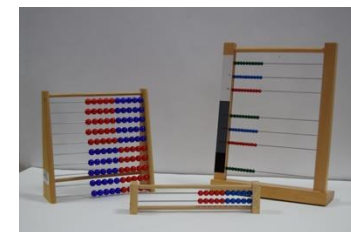
Abzählende
Kombinatorik

Grundideen der Arithmetik in der Primarstufe

- Zahlreihe
- Rechnen, Rechengesetze, Rechenvorteile
- Dezimalsystem
- Rechenverfahren
- arithmetische Gesetzmäßigkeiten und Muster
- Zahlen in der Umwelt
 - anwendungsbezogene Zahlaspekte
 - Handlungsbezogene Deutungen der Grundrechenarten

Didaktische Fragestellungen (I)

- Warum ist es für Lernende evtl. schwer zu verstehen, dass $8 + 3 = 11$ ist? Und wann ist auch $2 + 3 = 11$ richtig?
- Was kann man sich unter einer Division vorstellen? Und wie fördere ich welche Vorstellung?
- Welche Strategien verwenden Lernende beim (halb-)schriftlichen Rechnen? Und welche sollen sie verwenden?
- Welches Material kann Lernen unterstützen? Und welche Kriterien können für die Materialauswahl hilfreich sein?



Didaktische Fragestellungen (II)

- Ist diesem Kind noch zu helfen?

Von 63 Kindern schickt jedes Kind einen Luftballon weg. 37 Kinder bekommen eine Antwort. Wie viele Kinder bekommen keine Antwort?

„Das habe ich ganz einfach gemacht: Ich habe erst 63 minus 20 gerechnet, das waren 43. Und dann habe ich erst plus 5 gerechnet, das waren 38, noch plus 1 waren 37.“

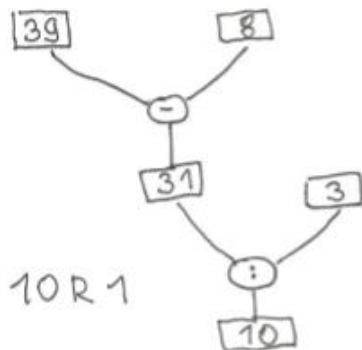
Spiegel/Selter, 2006

***Ganz einfach* zu verstehen?**

Didaktische Fragestellungen (III)

- Und was ist hier passiert?

Du sparst schon eine ganze Weile dein Taschengeld, damit du Geschenke kaufen kannst. Insgesamt sind es nun 39 Euro. Ein Drittel möchtest du allerdings behalten. Von dem Rest gibst du 8 Euro für deine Eltern aus.

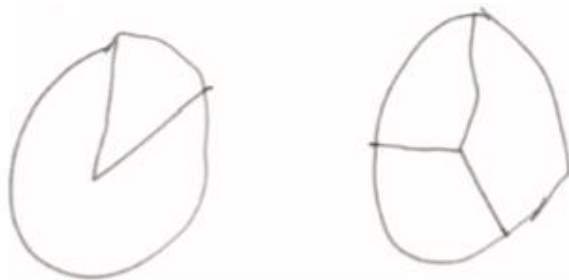


Sie hat für sich 10 R 1.

Didaktische Fragestellungen (IV)

- Und wie geht es weiter?

Gesucht sind Brüche zwischen $1/3$ und $2/3$: Kennst du welche? Wie viele gibt es?



David: Also das ist dann ein drittel, das sind zwei drittel, und das sind drei drittel, und ich weiß nicht, was dazwischen kommen soll, das check' ich irgendwie nicht, weil das ist ja dann/ nach ein drittel kommt ja genau zwei drittel, und das check' ich nicht, was dazwischen kommt.

Prediger, 2006

Hintergrund: Lehrplan & Co

Grundschulverband (I)



■ Solide Zahlvorstellungen

sichere Vorstellungen von *Zahlen und Zahlbeziehungen* im Zahlenraum bis zu 1.000.000 sowie vom Aufbau des *Zehnersystems*

gedächtnismäßige Beherrschung des kleinen 1+1 und 1×1

■ Sicheres Rechnen

verständiges und sicheres mündliches und halbschriftliches Rechnen unter Ausnutzung operativer Strategien

Grundschulverband (II)

■ Verständiges, flexibles Rechnen

überschlagendes
Rechnen

Verständnis und geläufige Ausführung
der *Normalverfahren* der schriftlichen
Addition, Subtraktion und *Multiplikation*,
Verständnis des Verfahrens der
schriftlichen Division

aufgabenbezogene Flexibilität bei der
Wahl des Rechenweges auch unter
Einbezug des Taschenrechners

Lehrplan Sachsen (I)

Der Lehrplan ist in die Lernbereiche

- Geometrie
- Arithmetik
- Größen

gegliedert.

Diese Lernbereiche sind im Unterricht eng miteinander zu vernetzen. Sachrechnen bildet keinen eigenständigen Lernbereich, sondern ist in alle Lernbereiche zu integrieren, da im Mathematikunterricht stets von der Lebenswirklichkeit der Schüler auszugehen ist.

Sächsisches Staatsministerium für Kultus [SMK] (Hrsg.), 2019, S. 2

Lehrplan Sachsen (II)

Klassenstufen 1/2

Lernbereich 1:	Geometrie	70 Ustd.
Lernbereich 2:	Arithmetik	130 Ustd.
Lernbereich 3:	Größen	50 Ustd.
Festigung und Vernetzung:	Verbindung von Geometrie und Arithmetik	10 Ustd.

Klassenstufe 3

Lernbereich 1:	Geometrie	35 Ustd.
Lernbereich 2:	Arithmetik	65 Ustd.
Lernbereich 3:	Größen	25 Ustd.
Festigung und Vernetzung:	Verbindung von Geometrie und Arithmetik	5 Ustd.

Arithmetik:
50%

SMK (Hrsg.), 2019, S. http://lpdb.schule-sachsen.de/lpdb/web/downloads/10_lp_gs_mathematik_2019.pdf?v24

Lehrplan Sachsen (III)

- Beziehungen zwischen den Lernbereichen

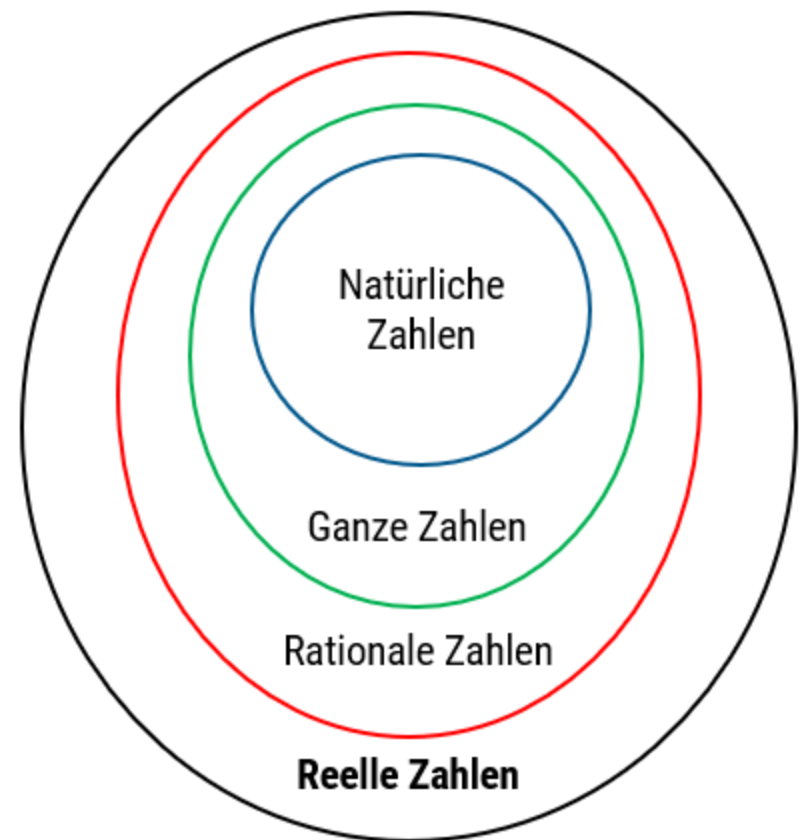
Beziehungen zwischen geometrischen und arithmetischen Sachverhalten sind bewusst zu nutzen, damit räumliche Vorstellungen sowie Vorstellungen im Bereich des Zahlenraumes und der Rechenoperationen ineinander greifen.

Besonders im Anfangsunterricht soll durch die Arbeit mit Mustern und Serien sowie durch das Sammeln vielfältiger Mengenerfahrungen die Basis für das Erschließen mathematischer Strukturen, für das Erarbeiten der Zahlen und die systematische Erweiterung des Zahlenraumes geschaffen werden. Im Rahmen eines differenzierten Mathematikunterrichtes kann die Zahlenraumerweiterung je nach individuellen Stärken und Schwächen erfolgen.

SMK (Hrsg.), 2019, S. 3

Leitidee Zahlen im Mathematikunterricht (I)

- Arithmetik – Algebra – Analysis
 - Zahlen als „roter Faden“
 - Zahl**raum**erweiterung und Zahl**bereich**serweiterung
 - Beiträge zum umfassenden Zahlverständnis



Leitidee Zahlen im Mathematikunterricht (II)

Der Lehrplan folgt dem Spiralprinzip und regt zu einem anspruchsvollen Arithmetikunterricht in der Primarstufe an!

Um diesen Ansprüchen im Unterrichtsalltag gerecht zu werden, benötigt die Lehrperson eine hohe fachliche und fachdidaktische Kompetenz.

Diese Veranstaltung soll Ihnen dabei helfen, diese Kompetenzen zu entwickeln und zu erwerben.

Operieren mit Zahlen (I)

- **Klasse 1/2:** Auf der Grundlage ihrer Zahlvorstellungen beschreiben sie im Zahlenraum bis 100 Beziehungen zwischen den Zahlen und verstehen das dekadische Positionssystem. Grundaufgaben des Addition und Subtraktion können sie sicher lösen.
- **Klasse 3:** Sie erkennen den Nutzen der Verbindung zwischen geometrischen und arithmetischen Strukturen zum Veranschaulichen und zum Rechnen. Im erweiterten Zahlenraum bis 1000 vertiefen sie ihr Verständnis über Zahlbeziehungen und das dekadische Positionssystem.
Die Schüler beherrschen die Grundaufgaben der Multiplikation und Division und wenden dieses Wissen beim vorteilhaften Rechnen und Kontrollieren an. Dabei nutzen sie den Computer oder mobile digitale Endgeräte im Interesse des entdeckenden Lernens, der Effektivität und Differenzierung im Unterricht.
Die Schüler lernen die Verfahren der schriftlichen Addition, Subtraktion und Multiplikation kennen.

Operieren mit Zahlen (II)

- **Klasse 4:** Im erweiterten Zahlenraum bis 1 000 000 vertiefen sie ihr Verständnis über Zahlbeziehungen und das dekadische Positionssystem. Zwischen den Bereichen Kopfrechnen, halbschriftliches und schriftliches Rechnen können die Schüler inhaltsbezogen entscheiden und dabei die Grundaufgaben aller vier Rechenoperationen sicher lösen. Sie gewöhnen sich an das Nutzen von Analogien, Überschlägen und Kontrollverfahren.

SMK (Hrsg.), 2019, S. 26

Es wird erwartet, dass Sie sich eigenständig mit den spezifischen Zielen des Lehrplans auseinandersetzen!

Spezifische Ziele (I)

■ Schriftliches Rechnen

SMK (Hrsg.), 2019

Kennen des schriftlichen Verfahrens der Addition

- Addieren mit bis zu drei Summanden, auch mit Übertrag

Kennen der schriftlichen Verfahren der Subtraktion,

- Abziehverfahren
- Ergänzungsverfahren als Alternativverfahren
- Subtrahieren mit bis zu zwei Subtrahenden, auch mit Übertrag

Beherrschen des Verfahrens der Multiplikation mit ein- bis dreistelligem zweiten Faktor im erweiterten Zahlenraum

- Entscheiden zwischen halbschriftlichem und schriftlichem Lösungsweg

Einblick gewinnen in das schriftliche Verfahren der Division

- Näherungswerte beim Überschlagen
- Untersuchen der Teilbarkeit, Bilden von Bruchteilen

Kennen von Überschlags- und Kontrollverfahren bei den vier schriftlichen Rechenverfahren.

Spezifische Ziele (II)

■ Dekadisches Stellenwertsystem

SMK (Hrsg.), 2019

Einblick gewinnen in die Struktur des dekadischen Positionssystems und in das Prinzip der Zahlbildung

- Stellentafel
- Zehnerbündelung
- Bedeutung der Null
- Aufbau des Hunderterfeldes, der –tafel

Kennen des Operierens mit Zahlen bis 1 000 000 und darüber hinaus

- Lesen und Schreiben von Zahlwörtern, Darstellen, Zerlegen von Zahlen
- Analysieren, Synthetisieren von Zahlen
- Vergleichen, Ordnen von Zahlen
- Darstellen von Zahlen im dekadischen Positionssystem
- Rechnen mit Vielfachen

Spezifische Ziele (III)

▪ Fachbegriffe

SMK (Hrsg.), 2019

Zahlwort, Ziffer,
Vorgänger, Nachfolger, gerade /ungerade Zahl, Addition, plus, addieren, Summe, Summand,
Subtraktion, minus, subtrahieren, Differenz, Minuend, Subtrahend,
Tauschaufgabe, Umkehraufgabe, Aufgabenfamilie, Nachbaraufgabe, Kernaufgabe
Multiplikation, Division, Vielfaches, Produkt, Faktor, mal, Teiler, geteilt durch,
Verdoppeln, Halbieren

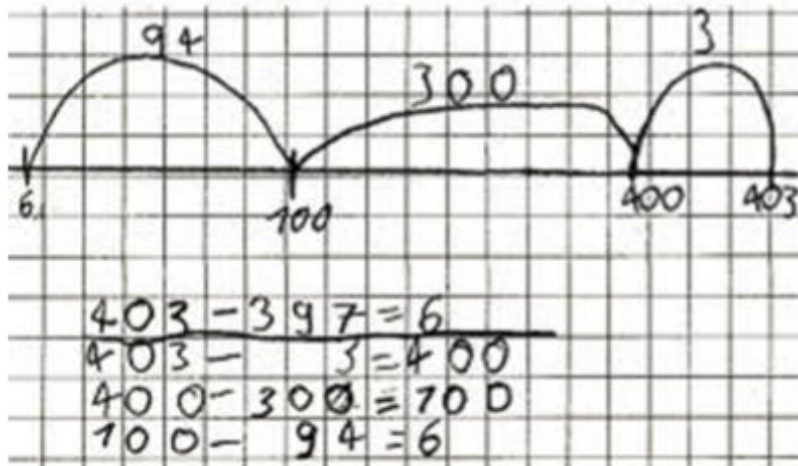
Stellentafel, Überschlag,
multiplizieren, dividieren, Dividend, Divisor, Quotient

Runden, Diagramm, Tabelle, Wahrscheinlichkeit, wahrscheinlich, sicher, möglich, unmöglich

Erste Einblicke in die Praxis: Schulbuchbeispiele

Zahlenstrich und Zahlenstrahl

Name: Julia Datum: 13.2.09

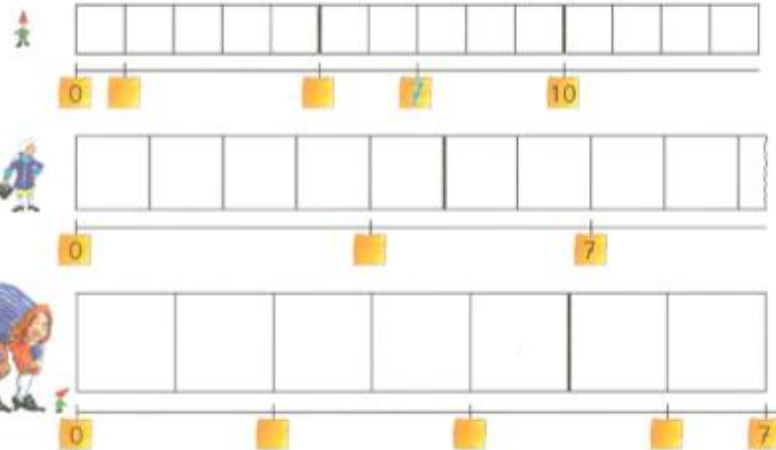


<https://primakom.dzlm.de/%C3%BCbergreifendes/prinzipien/zunehmende-mathematisierung>

3. Gulliver bei den Zwergen.

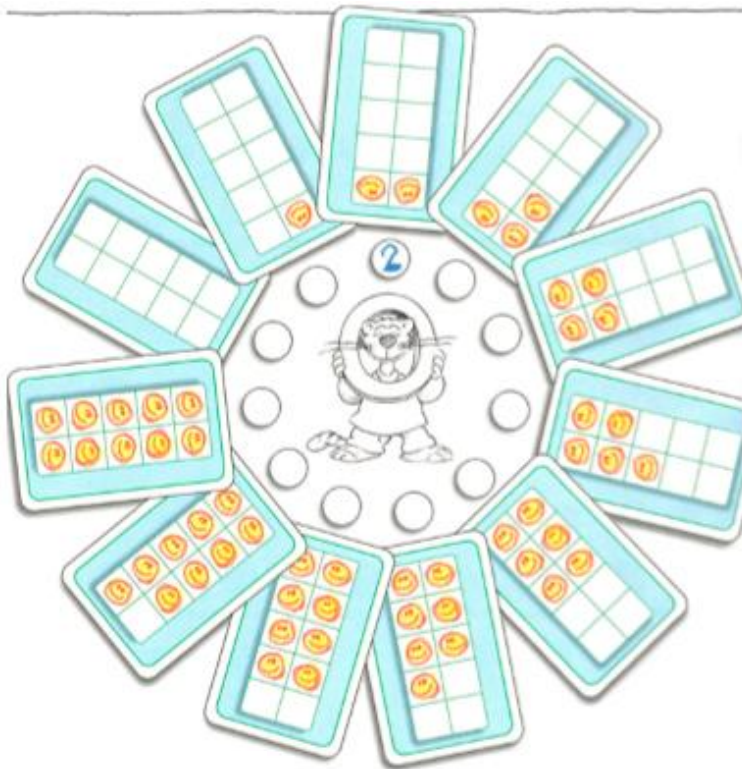


Gulliver bei den Riesen.

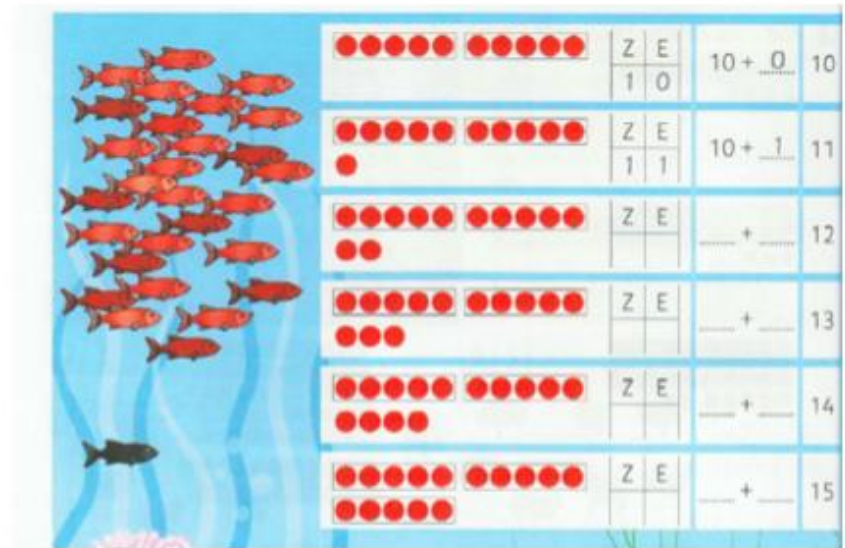


Mathematikus 1, S. 15

Zahlenbilder



Matheprofis 1, S. 34



Zahlenbuch 1, S. 28

Zahlenmuster: arithmetische Gesetze

Entdecker-Päckchen

Was fällt dir auf? Wie geht das Muster weiter? *Erkläre!

1.

$$81 - 19 = 62$$

$$83 - 21 = 62$$

$$85 - 23 = 62$$

$$87 - 25 = 62$$

$$\dots - 27 = 62$$

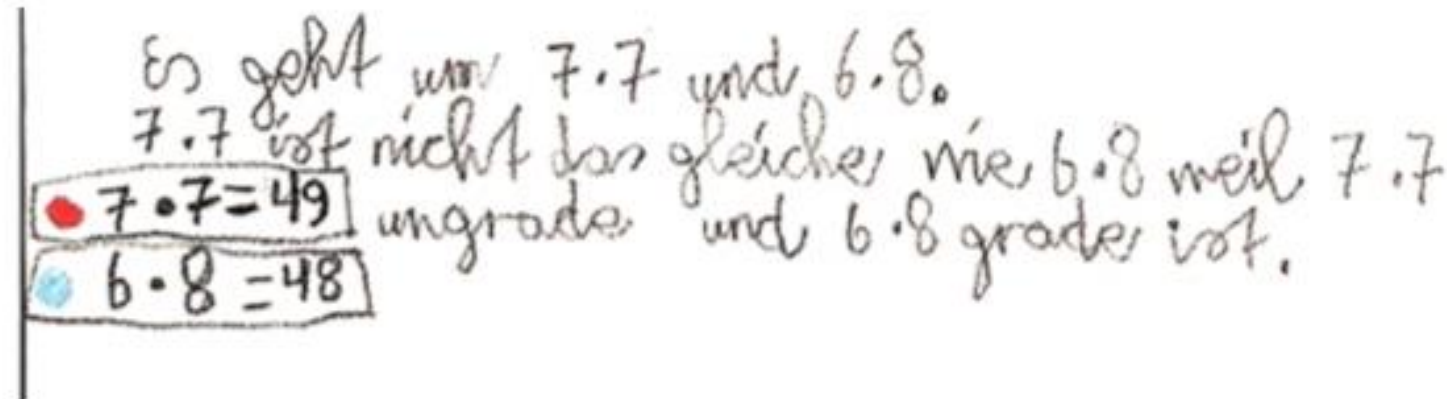
Mir fällt auf, dass Das immer das 62 das Ergebnis ist

*Das ist so, weil aber warum

Sundermann, 2010

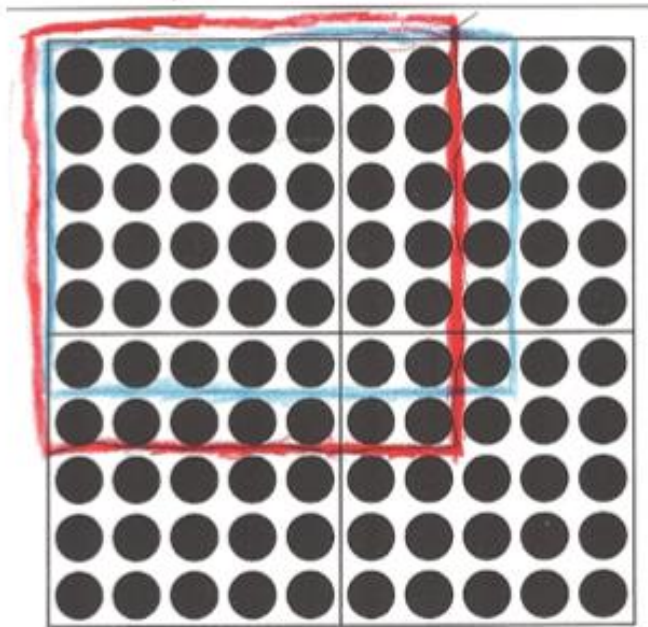
Arithmetische Gesetze geometrisch gesehen

- Warum gilt $7+7=6+8$, aber nicht $7 \times 7 = 6 \times 8$?



Arithmetische Gesetze geometrisch gesehen

- Warum gilt $7+7=6+8$, aber nicht $7 \times 7 = 6 \times 8$?



... wenn man 7×7 auf der Karte malt (rot) und auch 6×8 (blau) dann sieht man dass Wenn man sieht was übrig bleibt, ist rot eins länger als blau.

Grundschule Mathematik 37, 2013, S. 4-5

Anhang

Post Skriptum

(1) Die Studierenden sollen die Inhalte der Lehrveranstaltungen in selbständiger Arbeit vertiefen und sich auf die zu besuchenden Lehrveranstaltungen vorbereiten. **Die für den erfolgreichen Abschluss des Studiums erforderlichen Kenntnisse werden nicht ausschließlich durch den Besuch von Lehrveranstaltungen erworben, sondern müssen durch zusätzliche Studien ergänzt werden.**

Literaturverzeichnis

- Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2004). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich [PDF-Dokument]. Zugriff am 24.09.2019. Verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf
- Sundermann, B. (2010). Entdecken, beschreiben, begründen - Förderung von prozessbezogenen Kompetenzen am Beispiel des Aufgabenformates „Schöne Päckchen“ [PDF-Dokument]. Zugriff am 24.09.2019. Verfügbar unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/mathe2000/pdf/Symp20/WS13_Sundermann_presentation.pdf
- Sächsisches Staatsministerium für Kultus (2004/2009/2019). Lehrplan Grundschule. Mathematik [PDF-Dokument]. Zugriff am 12.10.2022. Verfügbar unter http://lpdb.schule-sachsen.de/lpdb/web/downloads/10_lp_gs_mathematik_2019.pdf?v2
- Spiegel, H. & Selter, C. (2006). Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Seelze: Klett-Kallmeyer
- Brandt, B & Höck, G. (2012). Beobachten von Lernprozessen im Mathematikunterricht. In H. de Boer & S. Reh (Hrsg.), *Beobachtung in der Schule – Beobachten lernen* (S. 229-246). Wiesbaden: Springer VS
- Prediger, S. (2006). *Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben*. PM, Heft 11/2006 (S. 8-12). Abgerufen am 05.10.2019. Verfügbar unter <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/06-PM-H11-Prediger-Vorstellungen.pdf>