Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Michael Meinhold

Dresden, 26. Oktober 2023

Mathematik für Ingenieure - WS2023/24
Übungsblatt 4

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Gegeben sind die Funktionen $f : x \mapsto y = f(x)$ mit

(a) $f(x) = 3\sin x + 2\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = 3\tan\left(x + \frac{3}{2}\pi\right),\ x \in D \subset \mathbb{R}$

(c) $f(x) = e^{\sin(2x)},\ x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = |\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)|,\ x \in \mathbb{R}.$

Untersuchen Sie die Funktionen auf Periodizität. Geben Sie, wo möglich, die (kleinsten) Perioden und die dazugehörenden Kreisfrequenzen an.

Aufgabe 2: Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ mit

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x \quad \text{für} \quad x \in [-2, 2)$$

die periodisch fortgesetzt wird mit $f(x) = f(x + 4)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraph G_f im Intervall $[-4, 6]$.

(b) Geben Sie die Fundamentalperiode von f an und bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω.

(c) Entwickeln Sie die Funktion f in deren Fourier-Reihe. Berechnen Sie die auftretenden Fourierkoeffizienten mithilfe eines schriftlichen Verfahrens bzw. begründen Sie in den Fällen, in denen deren Wert auch ohne Rechnung bestimmt werden kann.

(d) Bestimmen Sie - falls vorhanden - alle Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$, für welche die Fourier-Reihe nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Aufgabe 3: Gegeben ist ein periodisches Signal durch die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} x \mapsto y = f(x) &= |\sin(\pi x)| \quad \text{für} \quad x \in [-1; 1) \\ \text{sowie} \quad f(x) &= f(x+2) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

Die Funktion f soll durch eine Linearkombination der Form

$$x \mapsto y = S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right]$$

mit Koeffizienten

$$a_k = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot \cos(2\pi k x)\ \mathrm{d}x \quad \text{sowie} \quad b_k = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot \sin(2\pi k x)\ \mathrm{d}x \tag{2}$$

für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ in Abfängigkeit des Parameters $n \in \mathbb{N}^*$ angenähert werden.

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraph G_f zur Funktion f im Intervall $[-1, 2]$. Entscheiden und begründen Sie, ob f eine stetige Funktion ist.

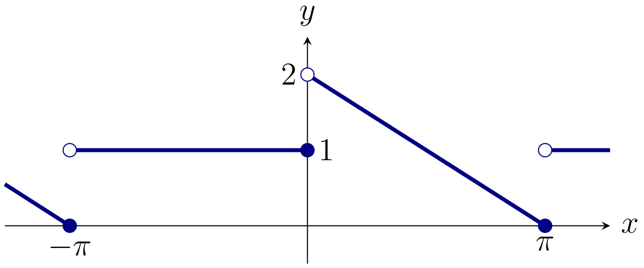
(b) Berechnen Sie schriftlich die Koeffizienten a_k und b_k in Formel (2). Geben Sie die Funktionsterme zu den Funktionen S_1 und S_3 mit gemeinsamem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ an.

Hinweis: Stellen Sie $f(x)$ im Intervall $[-1, 1)$ ohne Benutzung der Betragszeichen $|.|$ dar.

(c) Bestimmen Sie jeweils

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{sowie} \quad \lim_{n\to\infty} S_n(1)$$

Aufgabe 4: Die Funktion f (siehe Skizze des Graphen) sei 2π-periodisch.



(a) Geben Sie für $f(x)$ eine analytische Darstellung an.

(b) Entwickeln Sie f in eine Fourier-Reihe S_f.

(c) Welche Werte nimmt die Fourier-Reihe S_f an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ und $x_3 = \pi$ an?

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Gegeben sind die Funktionen $f : x \mapsto y = f(x)$ mit

(i) $f(x) = 3\sin x$ für $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$,
periodische Fortsetzung $f(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{für } x \in [-1; 0) \\ 1 - x & \text{für } x \in [0; 1) \end{cases}$,
periodische Fortsetzung $f(x) = f(x + 2)$ für $x \in \mathbb{R}$

(iii) $f(x) = |\sin(\pi x)|$ für $x \in [-1; 1)$,
periodische Fortsetzung $f(x) = f(x + 2)$ für $x \in \mathbb{R}$

(iv) $f(x) = x$ für $x \in [-1; 1)$,
periodische Fortsetzung $f(x) = f(x + 2)$ für $x \in \mathbb{R}$

(a) Skizzieren Sie die Funktionen im angegebenen Intervall. Geben Sie die (kleinsten) Perioden an und ermitteln Sie eventuell vorhandene Sprungstellen und Lücken.

(b) Entwickeln Sie die Funktionen in deren Fourier-Reihen.

Aufgabe 6: Es sei die Funktion

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

gegeben. Es sei $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die periodische Fortsetzung von f auf die gesamte reelle Achse.

(a) Skizzieren Sie $\tilde{f}$ im Bereich von -3π bis 3π.

(b) Bestimmen Sie die zu $\tilde{f}$ gehörige Fourier-Reihe.

Hinweis: Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$G_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad G_k(x) = \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2}{k^3}\right) \sin(kx) + \frac{2x}{k^2} \cos(kx)$$

eine Stammfunktion der Funktion

$$g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_k(x) = x^2 \cos(kx).$$

Aufgabe 7: Gegeben ist in Abbildung 1 ein Rechtecksignal.

Dieses ist analytisch beschrieben durch die periodische Fortsetzung $\tilde{f}$ der reellen Funktion f mit

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in [-1, 0) \\ -1 & \text{für} \quad x \in [0, 1) \end{cases}$$

Es ist $\tilde{f}(x) = f(x + 2)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die Fundamentalperiode p von $\tilde{f}$ an und bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω. Entscheiden und begründen Sie, an welchen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion $\tilde{f}$ nicht stetig ist.

Die Funktion $\tilde{f}$ ist in ihre Fourier-Reihe $S_{\tilde{f}}$ zu entwickeln.

(b) Berechnen Sie die die auftretenden Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{p} \cdot \int_0^p \tilde{f}(x) \cos(k\omega x) \, \mathrm{d}x, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots\} \\ b_k &= \frac{2}{p} \cdot \int_0^p \tilde{f}(x) \sin(k\omega x) \, \mathrm{d}x, \quad k \in \{1, 2, \ldots\} \end{aligned} \tag{3}$$

Für den Fall, dass sich Fourierkoeffizienten in Formel (3) auch ohne Rechnung bestimmen lassen, können deren Werte unter Begründung angegeben werden.

Geben Sie die Fourier-Reihe $S_{\tilde{f}}$ an.

(c) Bestimmen Sie $S_{\tilde{f}}(x_1)$ für alle ganzen Zahlen $x_1 = n$, d. h. für $n \in \mathbb{Z}$.

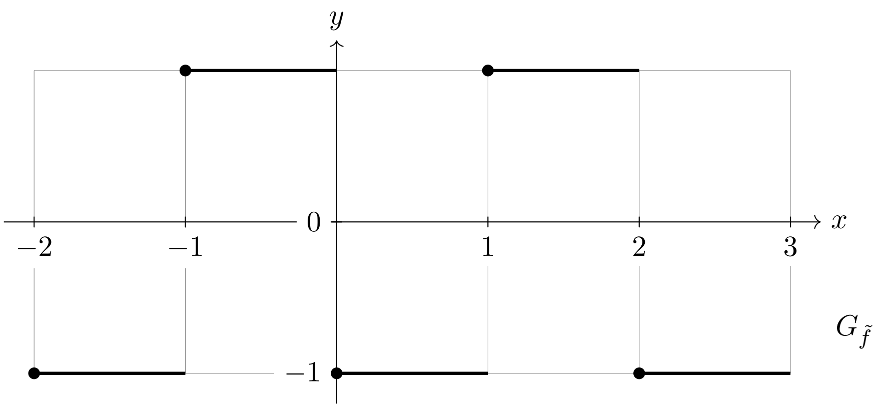


Abbildung 1: Rechtecksignal als Funktionsgraph $G_{\tilde{f}}$ zur Funktion $\tilde{f}$ im Intervall $[-2, 3]$. Die eingetragenen Punkte zeigen die zum Funktionsgraph gehörenden Punkte am Übergang zwischen zwei benachbarten Signalteilen an.