

Mathematik für Ingenieure - WS2023/24 Übungsblatt 12

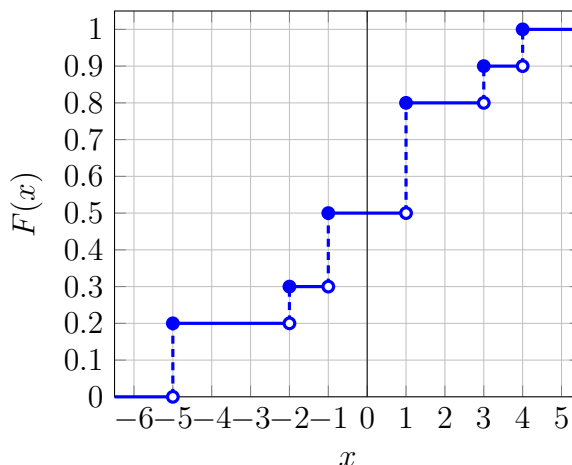
Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Entscheiden Sie, welche der folgenden Zufallsvariablen $X(\omega)$ diskret bzw. stetig sind. Geben Sie die möglichen Werte der Zufallsgrößen an.

- (a) $X(\omega)$... täglicher Verbrauch an Elektroenergie in einem Haushalt
- (b) $X(\omega)$... Anzahl der Ausschussteile eines Lieferpostens
- (c) $X(\omega)$... Benzinverbrauch eines PKW auf 100 km

Aufgabe 2: Gegeben ist eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F_X wie in der Grafik dargestellt.

- (a) Ist X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable?
- (b) Geben Sie die Menge M an, welche alle möglichen Werte von X enthält.
- (c) Stellen Sie für alle $x \in M$ die Werte $\mathbb{P}(X = x)$ in einer Verteilungstabelle und einem Stabdiagramm dar.
- (d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten
 - (i) $\mathbb{P}(X \leq 3)$,
 - (ii) $\mathbb{P}(X > 5)$,
 - (iii) $\mathbb{P}(X = 2)$,
 - (iv) $\mathbb{P}(X < 9)$,
 - (v) $\mathbb{P}(-3 < X \leq 3)$,
 - (vi) $\mathbb{P}(X^2/2 \leq 3)$.



Aufgabe 3: Die Zufallsgröße $X(\omega)$ besitze folgendes Verteilungsgesetz:

$X = x_i$	0	1	3	4	6
$P(X = x_i)$	0.1	0.25	0.5	0.05	c

worin c einen reellen Parameter darstellt.

- (a) Bestimmen Sie den Parameterwert c so, dass die vorstehende Tabelle tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Werte der Zufallsgröße darstellt. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X der Zufallsgröße $X(\omega)$.
- (b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_X von $X(\omega)$.
- (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X(\omega)$
 - A ... Werte nicht größer als 4
 - B ... Werte kleiner als 3
 - C ... mindestens den Wert 3
 - D ... höchstens den Wert 3
 annimmt.

Aufgabe 4: Wir betrachten die vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} a(1 - x^2) & \text{falls } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie den Parameter a , so dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

Es sei X eine Zufallsgröße mit der Dichte f , wobei der Parameter a den Wert aus Teil ((a)) hat.

(b) Bestimmen Sie für X die zugehörige Verteilungsfunktion F .

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X > 0.3)$ und $\mathbb{P}(X \leq 0)$.

(d) Berechnen Sie sowohl den Erwartungswert als auch die Varianz von X .

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Die Zufallsgröße $X(\omega)$ besitze die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^2 & \text{für } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{für } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

worin c einen reellen Parameter beschreibt.

(a) Berechnen Sie c , so dass f eine Verteilung beschreibt.

(b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion F zur Dichtefunktion f . Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und F .

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X(\omega)$

A... Werte nicht größer als 1

B... Werte zwischen 1 und 3

C... Werte zwischen 1 und 1.5

D... den Wert 1

annimmt.

Aufgabe 6: Zur Produktion einer bestimmten Sorte von Bauteilen stehen 8 alternative Maschinen zur Verfügung. In der folgenden Tabelle sind deren Anteil an der Gesamtproduktion, sowie der jeweilige Ausschussanteil pro Maschine gegeben:

Maschine	1	2	3	4	5	6	7	8
Ausschussanteil in %	1	1	0,2	0,2	3	3	3	3
Anteil an der Gesamt-Produktion in %	10	10	20	20	10	10	10	10

(a) Die geplante Gesamtproduktion im nächsten Jahr beläuft sich auf 250 000 Bauteile. Wieviele Ausschussteile werden sich erwartungsgemäß darunter befinden?

(b) Aus der laufenden Produktion wird zufällig ein Bauteil herausgegriffen. Es stellt sich heraus, dass dies Ausschuss ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil von Maschine 8 gefertigt wurde?

- (c) Die Maschinen 5 bis 8 sollen durch eine neue Maschine ersetzt werden, welche dann einen Anteil von 40% an der Gesamtproduktion haben soll. Wie groß darf der Ausschussanteil dieser Maschine maximal sein, damit der Ausschussanteil in der Gesamtproduktion maximal 0,5% beträgt?

Hinweis: Geben Sie hier die Wahrscheinlichkeiten auf 4 Nachkommastellen gerundet an.

Aufgabe 7: Die stetige Verteilung mit der Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, c\}$,

$$f(t) = \begin{cases} c & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit reellem Parameter c heißt *Gleichverteilung* auf dem Intervall $[a, b]$. Es wird $a < b$ vorausgesetzt.

- (a) Berechnen Sie c , so dass f eine Verteilung beschreibt.
- (b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion F zur Dichtefunktion f . Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und F für $a = -2$ und $b = 1$.
- (c) Berechnen Sie mithilfe der Verteilungsfunktion allgemein die Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\frac{a+b}{2} \leq X < b\right)$$