



TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
CHEMNITZ

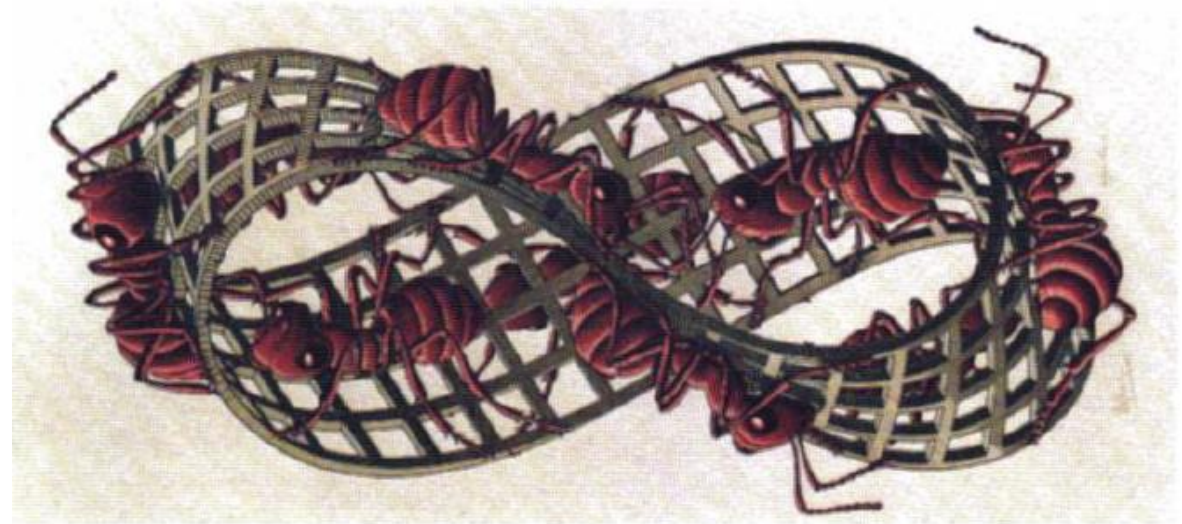
Zentrum für Lehrer\*innenbildung und Unterrichtsforschung  
Professur Grundschuldidaktik Mathematik



# Didaktik der Geometrie

## - Vorlesung Basismodul LAGS-GSD-MA-VM2

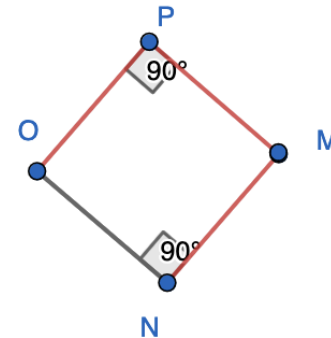
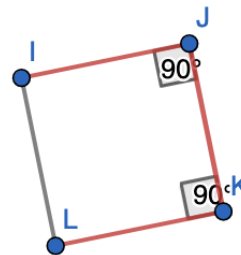
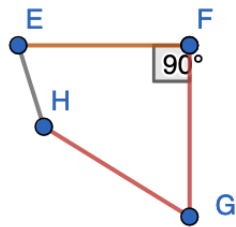
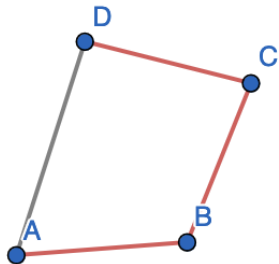
### 4.1 und 4.2 Objektbegriffe und Relationsbegriffe



Grundschuldidaktik Mathematik  
Prof. Dr. phil. Birgit Brandt  
Sommersemester 2024/25

# Quadrat als besondere Viereck: Definitionen

Ein Viereck mit 3 gleichlange Seiten und ? rechten Winkel ist ein Quadrat.



*Was ist ein Punkt?*  
*Was ist eine Gerade?*



<https://www.youtube.com/watch?v=IGtL8Vdw5tM>

# Was ist ein Punkt?

**Duden:** gedachtes geometrisches Gebilde mit bestimmter Lage (ohne Ausdehnung)

**Perron (1962):** „Ein Punkt ist genau das, was der intelligente, aber harmlose, unverbildete Leser sich darunter vorstellt.“

*(Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene, Teubner, Stuttgart 1962)*

Sprachsensibel  
unterrichten!

**Und nicht als mathematisches Objekt?**



# Punkt und Gerade

DAVID HILBERT (1899):

Wir denken 3 Systeme von Dingen;

die Dinge des 1. Systems nennen wir *Punkte* ...;

die Dinge des 2. Systems nennen wir *Geraden* ...;

die Dinge des 3. Systems nennen wir *Ebenen* ... .

*„Man muss jederzeit anstelle von Punkten, Geraden und Ebenen  
Tische, Stühle und Bierseidel sagen können.“*

→ Punkt als Grundbegriff ohne Definition: **Axiom**

# Gerade

Hilberts Axiomensystem:

- Durch zwei verschiedene Punkte führt genau eine Gerade.
- Auf jeder Geraden gibt es mindestens zwei Punkte.
- Es gibt (ausreichend) Punkte.

Anschauliche Deutung:

Eine Gerade ist eine unendlich lange, unendlich dünne und in beide Richtungen unbegrenzte Linie ohne Start- und Endpunkt.

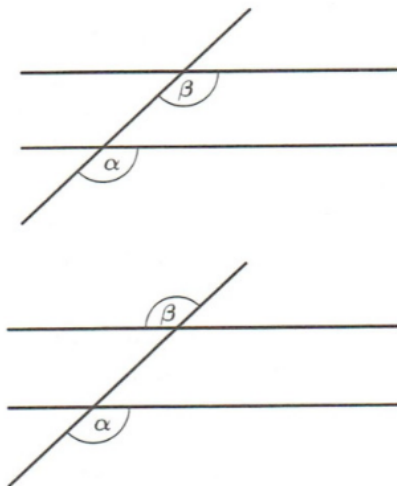
→ Denkobjekt (wesentliche Eigenschaften nicht konkretisierbar)

# Parallele Geraden

## Stufen- und Wechselwinkelsatz

(vgl. Helmerich & Lengnink 2016, S. 50)

Sei eine Geradenkonfiguration mit zwei Geraden gegeben, die von einer dritten geschnitten werden. Genau dann sind die beiden Geraden parallel, wenn die durch den Schnitt der dritten Gerade entstehenden Stufen- bzw. Wechselwinkel gleich groß sind.



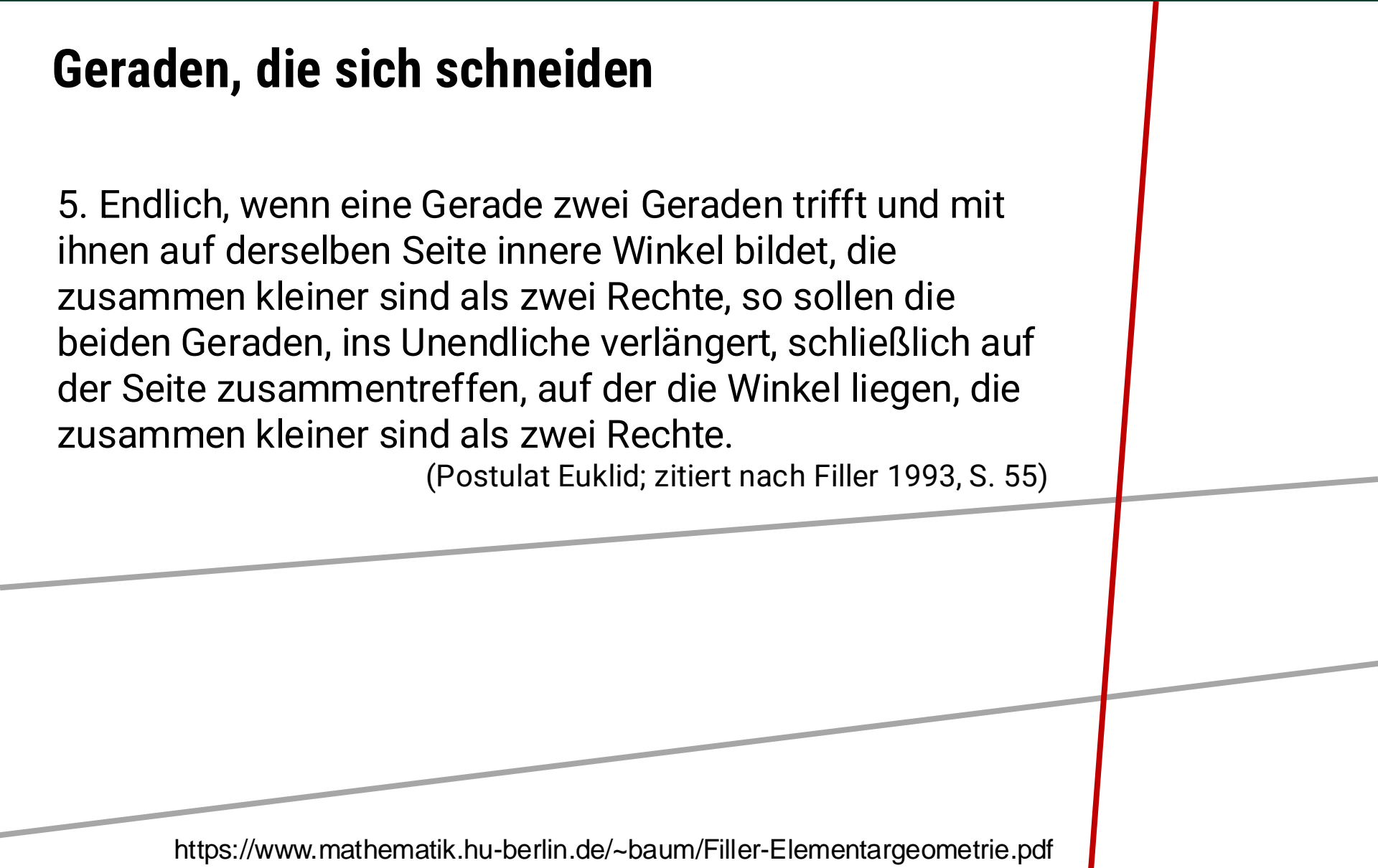
Die Summe der Innenwinkel ist auf beiden Seiten der schneidenden Geraden gleich und entspricht jeweils zwei rechten Winkeln.

Definition „rechter Winkel“:  
 kongruent zum Nebenwinkel

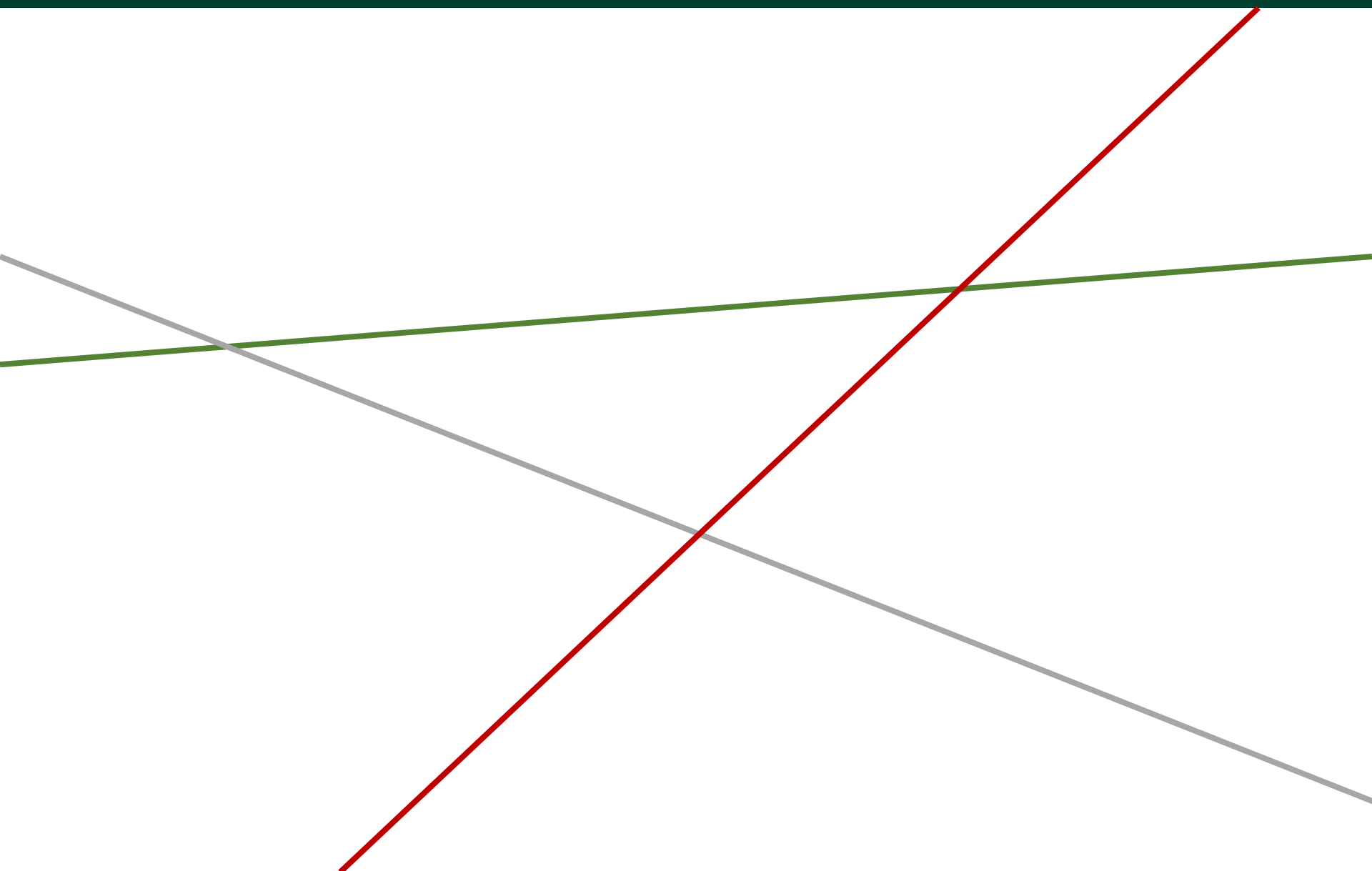
## Geraden, die sich schneiden

5. Endlich, wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

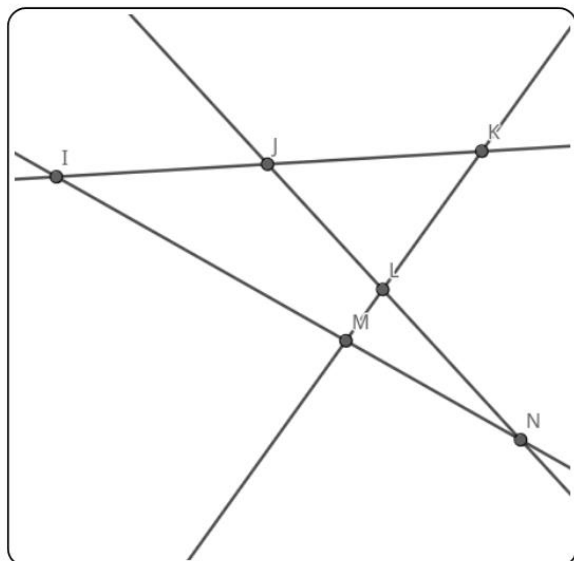
(Postulat Euklid; zitiert nach Filler 1993, S. 55)



<https://www.mathematik.hu-berlin.de/~baum/Filler-Elementargeometrie.pdf>



## 4.2 Schnittpunkte sich schneidender Geraden



Geogebra (Screenshot)

*Anzahl maximaler Schnittpunkte bei  
n Geraden:*

1 Gerade:	0 Schnittpunkte
2 Geraden:	1 Schnittpunkt
3 Geraden:	3 Schnittpunkte
4 Geraden:	6 Schnittpunkte
5 Geraden:	....

- 5 Überlege und zeichne.  
Wie viele Schnittpunkte können
- a) zwei Geraden haben?
  - b) drei Geraden haben?
  - c) vier Geraden haben?

Quelle: Duden Mathematik 2, Duden 2005, S. 78

## 4.1 Eigenschaften von Würfelnetzen als besondere Quadratmehrlinge (Polyominos)

Was sind Quadratmehrlinge?

Definition Wikipedia (<https://de.wikipedia.org/wiki/Polyomino>)

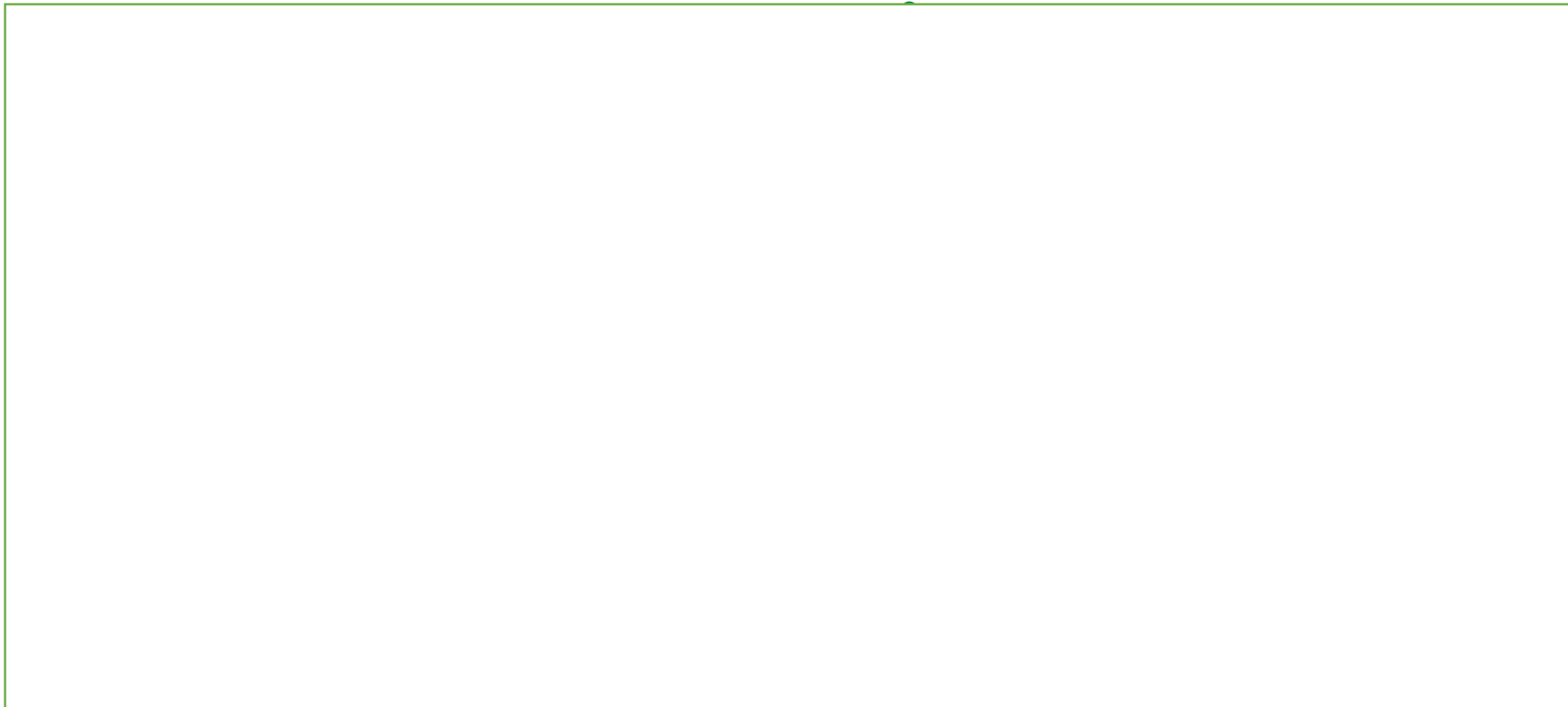
Ein Polyomino oder  $n$ -Mino ist eine Figur  $P$ , die aus  $n \geq 1$  kongruenten Quadraten besteht, für die gilt

1. je zwei Quadrate haben entweder keinen Punkt oder eine Ecke oder eine Kante gemeinsam,
2. zu je zwei verschiedenen Quadraten  $Q_1$  und  $Q^*$  aus  $P$  gibt es eine Folge  $Q_1 Q_2 \dots Q_{k-1} Q^*$  von benachbarten Quadraten aus  $P$ .

Dabei heißen zwei Quadrate benachbart, wenn die Menge ihrer gemeinsamen Punkte eine Seite ist.

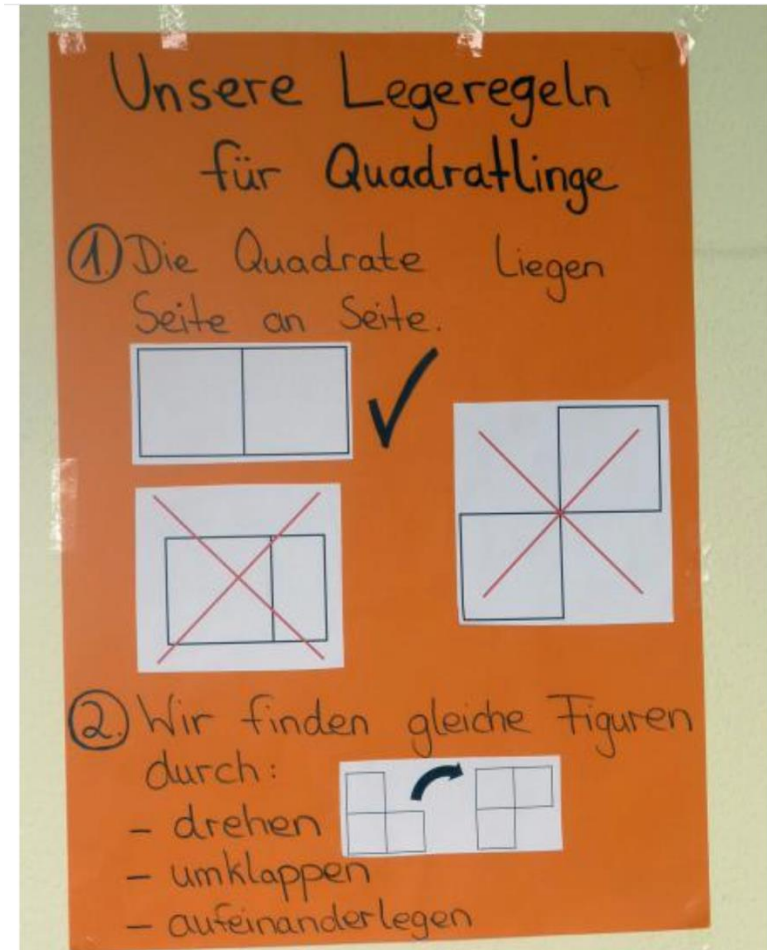
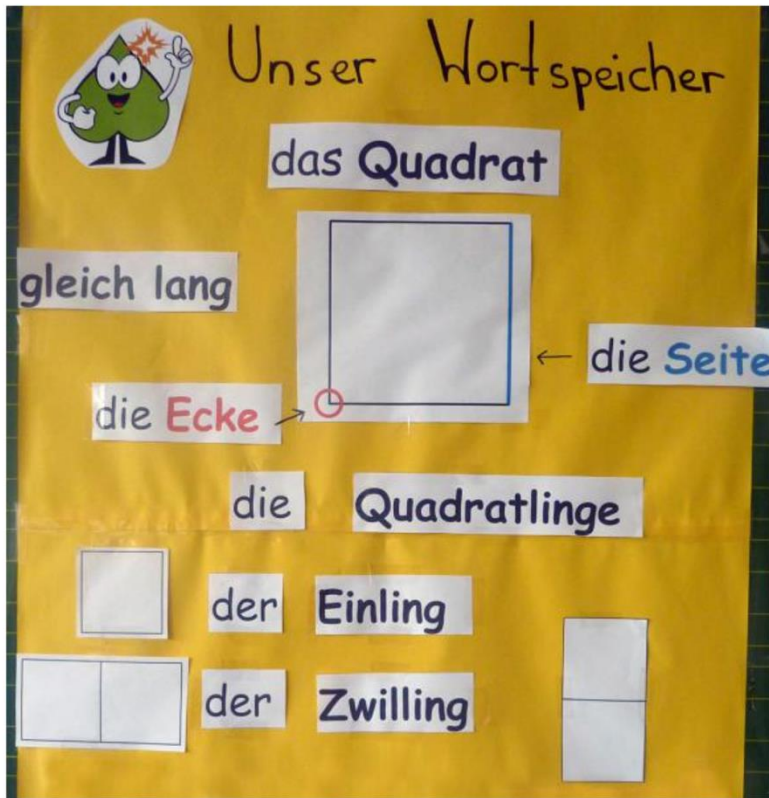
## 4.1 Eigenschaften von Würfelnetzen als besondere Quadratmehrlinge (Polyominos)

Was sind Quadratmehrlinge?

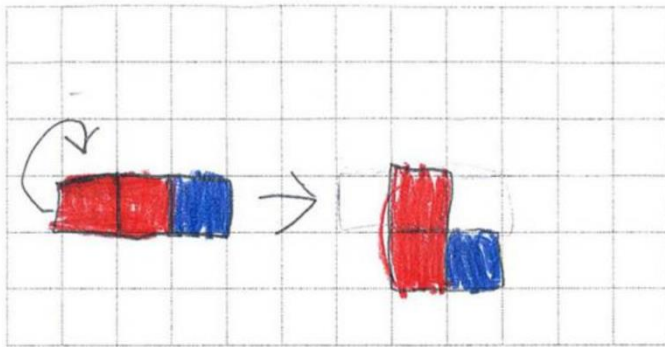


# 4.1 Eigenschaften von Würfelnetzen als besondere Quadratmehrlinge (Polyominos)

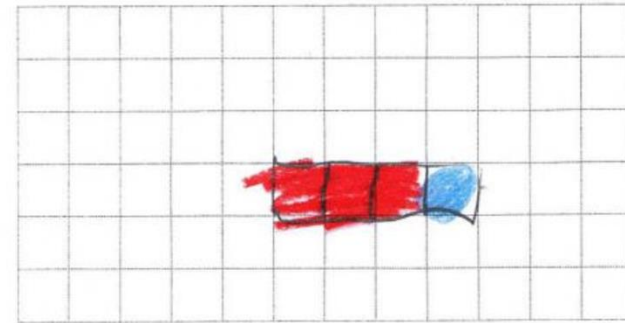
Was sind Quadratmehrlinge?



## 4.1 Eigenschaften von Würfelnetzen als besondere Quadratmehrlinge (Polyominos)



Ich habe diese Drehung einanderes  
drillig Hrotys gefund-  
en



Zu erst habe ich  
ein Ding benutzt  
und dann habe ich noch  
1 dazu gemacht


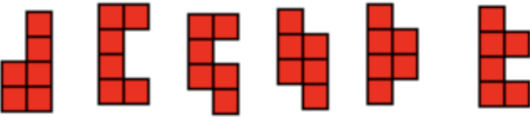

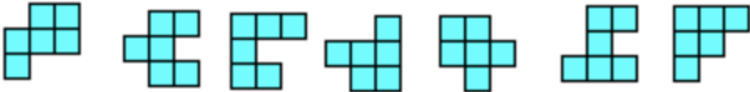

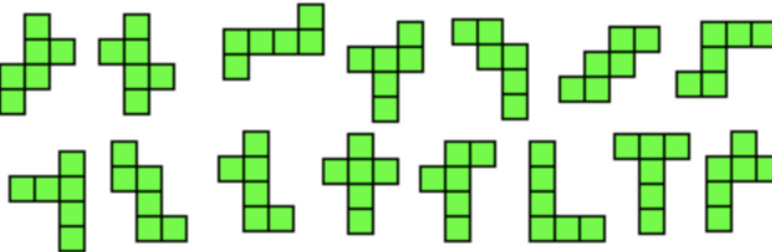

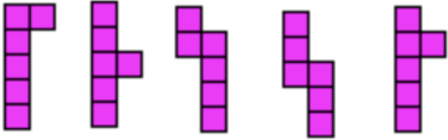


Der Trick heißt:

Nach ein dazutrick

## 4.1 Eigenschaften von Würfelnetzen als besondere Quadratmehrlinge (Polyominos)

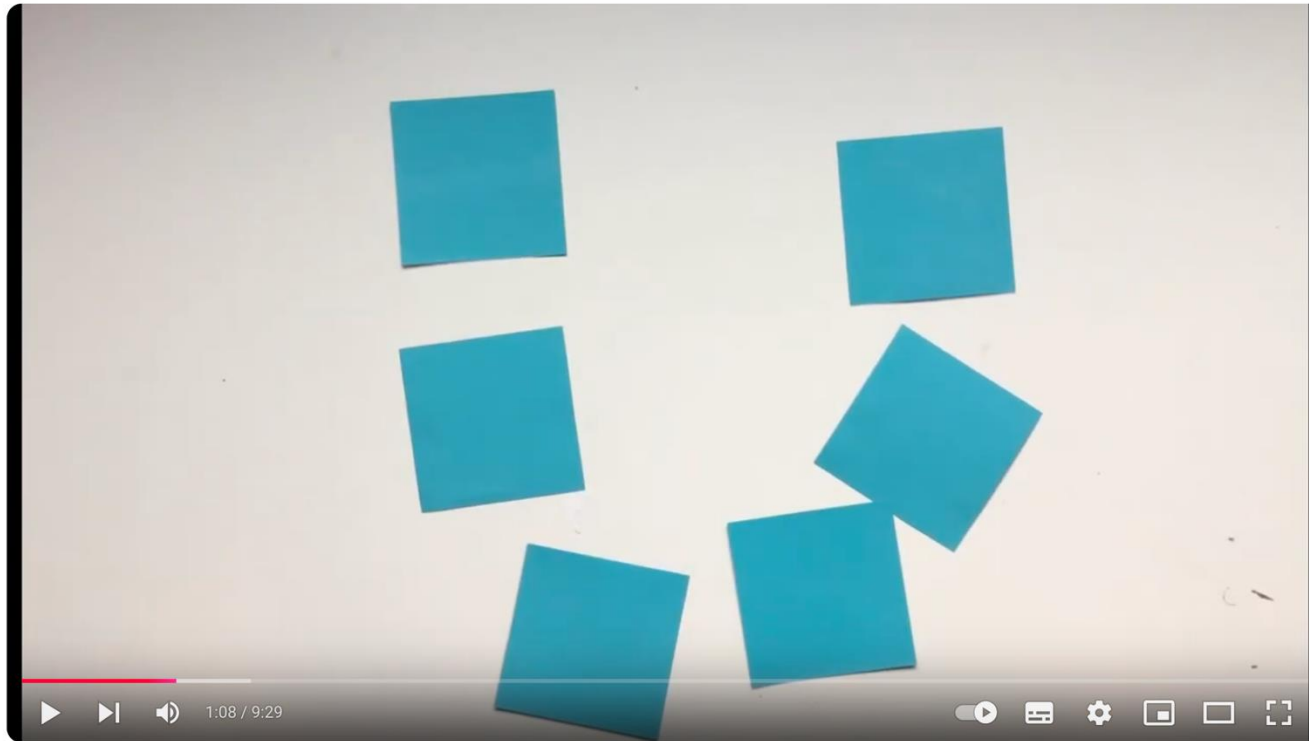
n	Anzahl	Name
2	1	Domino
3	2	Tromino
4	5	Tetromino
5	12	Pentomino
6	35	Hexomino

# 4.1 Eigenschaften von Würfelnetzen als besondere Quadratmehrlinge (Polyomminos)

 2x4			
 3x3			
 3x4			
 2x5		 1x6	 2x3

## 4.1 Eigenschaften von Würfelnetzen

[https://www.youtube.com/watch?v=kNB\\_vbgllw0](https://www.youtube.com/watch?v=kNB_vbgllw0)



# Relationsbegriffe

Die Gerade  $g$  ist parallel zur Geraden  $h$ .

Die Gerade  $g$  ist Mittelsenkrechte zur Strecke  $AB$ .

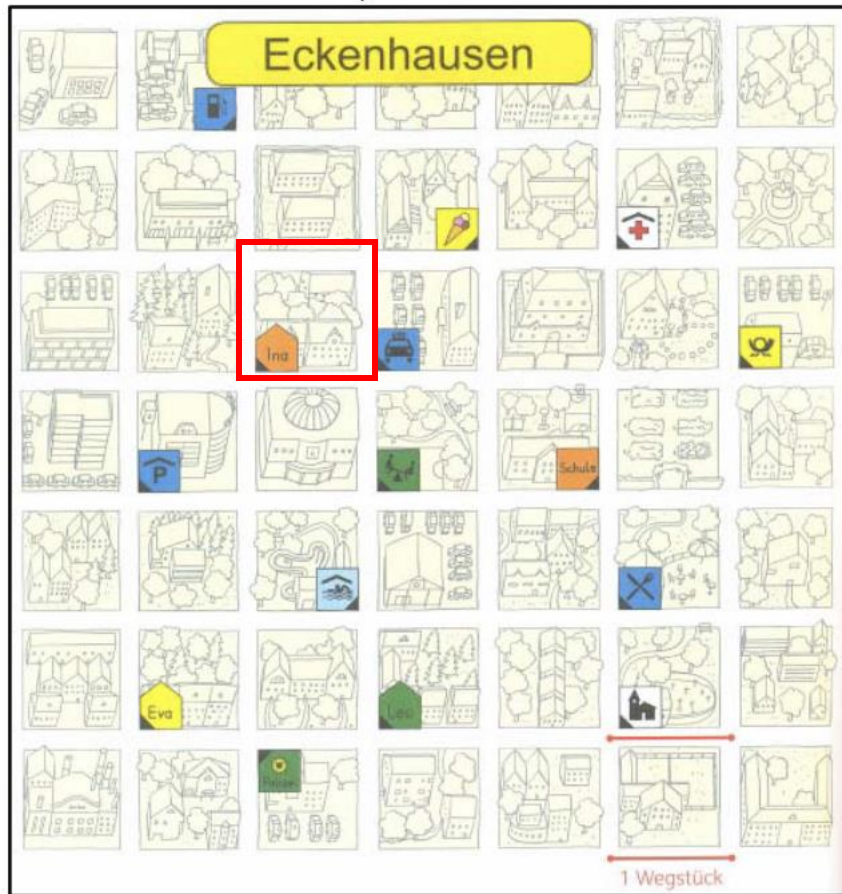
Die Gerade  $g$  ist Tangente zum Kreis  $k$ .

Der Punkt  $S$  ist Berührungspunkt der Kreise  $K1$  und  $K2$ .

Relation	Vorbereich	Nachbereich
ist parallel zu	Gerade	Gerade
ist kongruent (deckungsgleich) zu	Figuren	Figuren
ist Mittelpunkt von	Punkt	Strecke, Kreis
ist Durchmesser von	Strecke	Kreis
ist Schnittpunkt von	Punkt	zwei (oder mehr) Kurven (Spezialfall: Geraden)

Vgl. Holland, S. 46

# Eckenhausen – Bezugssysteme



Mantel 2014

- Wegbeschreibungen
- Kürzeste Wege
- “rückwärts“ gehen

Ina startet zu Hause:

→→→↓↓

Was ist ihr Ziel?

Finde kurze Wege von Ina zu Eva.

Evas Weg nach Hause:

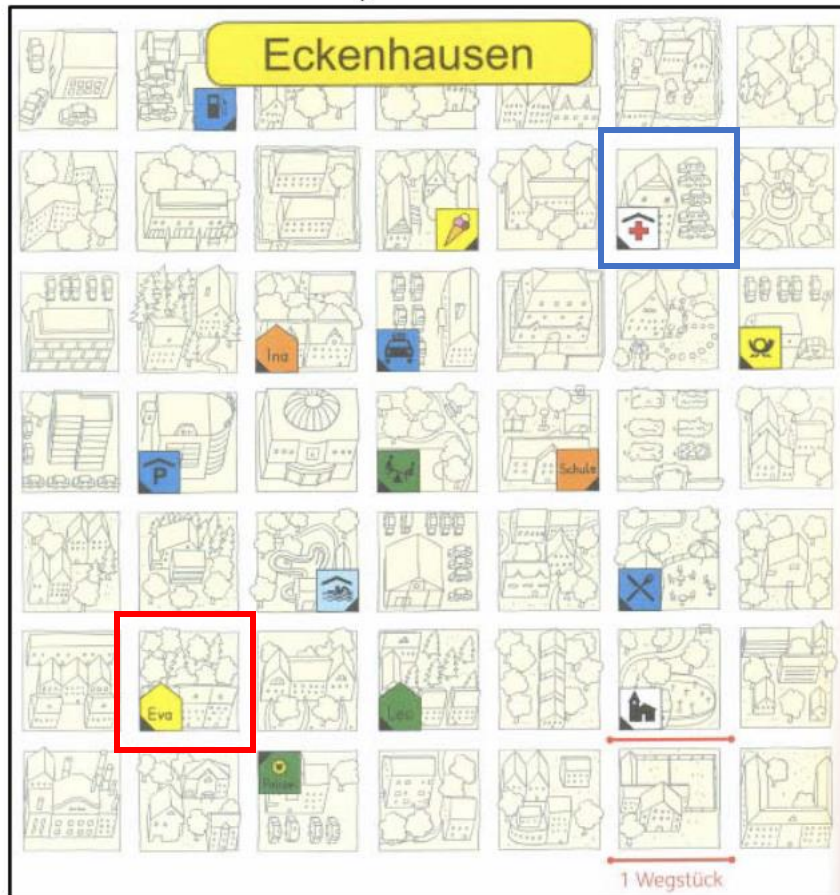
←↓↓←↓↓←

Wo ist sie gestartet?

(Wo ist sie vorbeigekommen?)

**Abbildung 2: Stadtplan Eckenhausen**

# Eckenhausen – Bezugssysteme



Mantel 2014

Kürzeste Wege:

→→→→→↑↑↑↑

Oder

↑→→↑↑→↑→. ....

Kombinatorisches Problem:

4 mal ↑ an insgesamt 8  
Entscheidungssituationen.

# Relationseigenschaften Senkrecht



Webapplikation *Felja legt Fliesen*

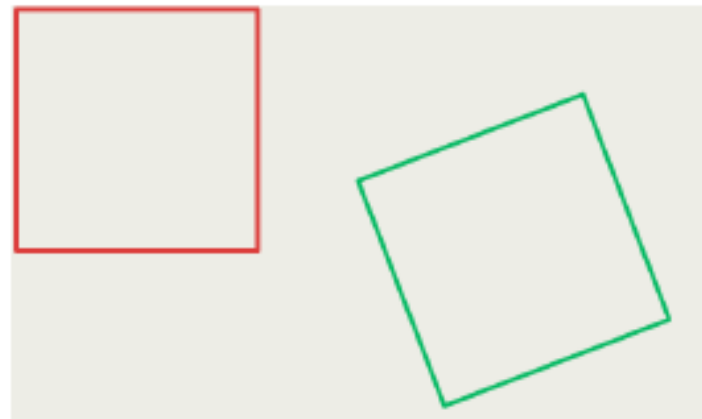
Bearbeiteter Screenshot: A. Kirsche (CC BY-NC-SA 4.0)

$h \perp g$  und  $k \perp h$   
Dann:  $k \parallel g$

Senkrecht:  
Symmetrisch, aber weder reflexiv  
noch transitiv

## Aufgabe:

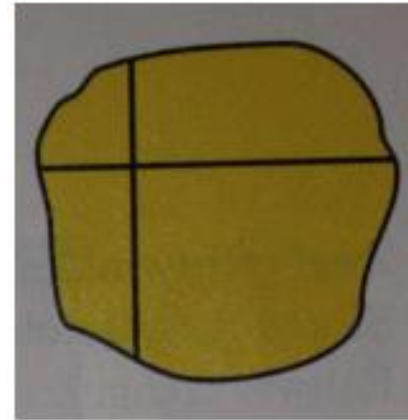
*Ein Blatt Papier soll so gefaltet werden, dass geeignete Faltlinien ein „Quadrat“ bilden! Die Papierform darf dabei nicht benutzt werden. (Das Quadrat soll wie das grüne Quadrat „in beliebiger Lage“ erscheinen. )*



# Begriffe "erfalten"

„SENKRECHT“

Senkrecht und parallel

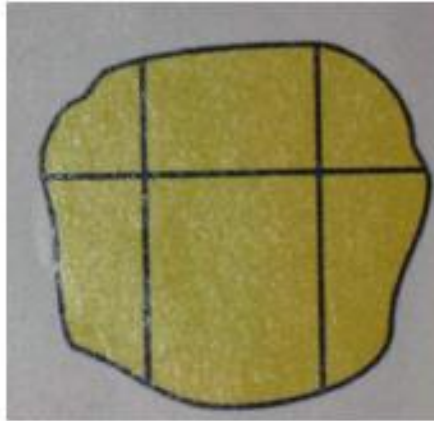
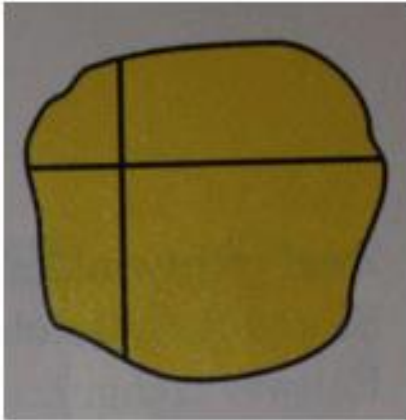


Wie erzeugen Sie durch Falten einen rechten Winkel aus einem Papierfetzen ?

Zwei Geraden sind genau dann zueinander senkrecht, wenn eine beim Spiegeln an der anderen auf sich selbst fällt.

# Begriffe "erfalten"

„PARALLEL“

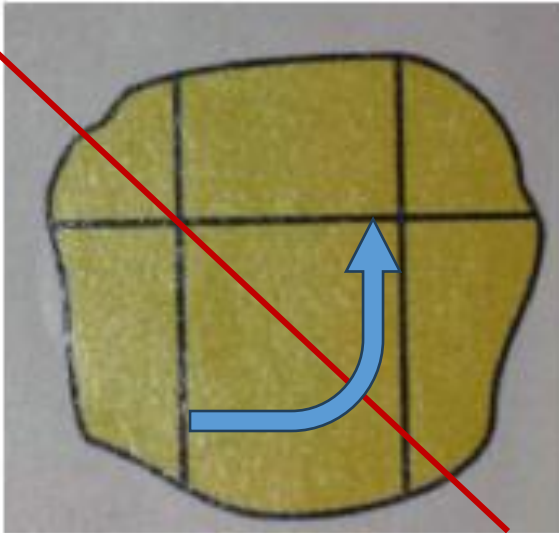


Wie kann man  
entsprechend enaktiv  
„parallele Geraden“  
erzeugen ?

Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie beide zu einer dritten Geraden senkrecht sind.

# Begriffe "erfalten"

„QUADRAT“

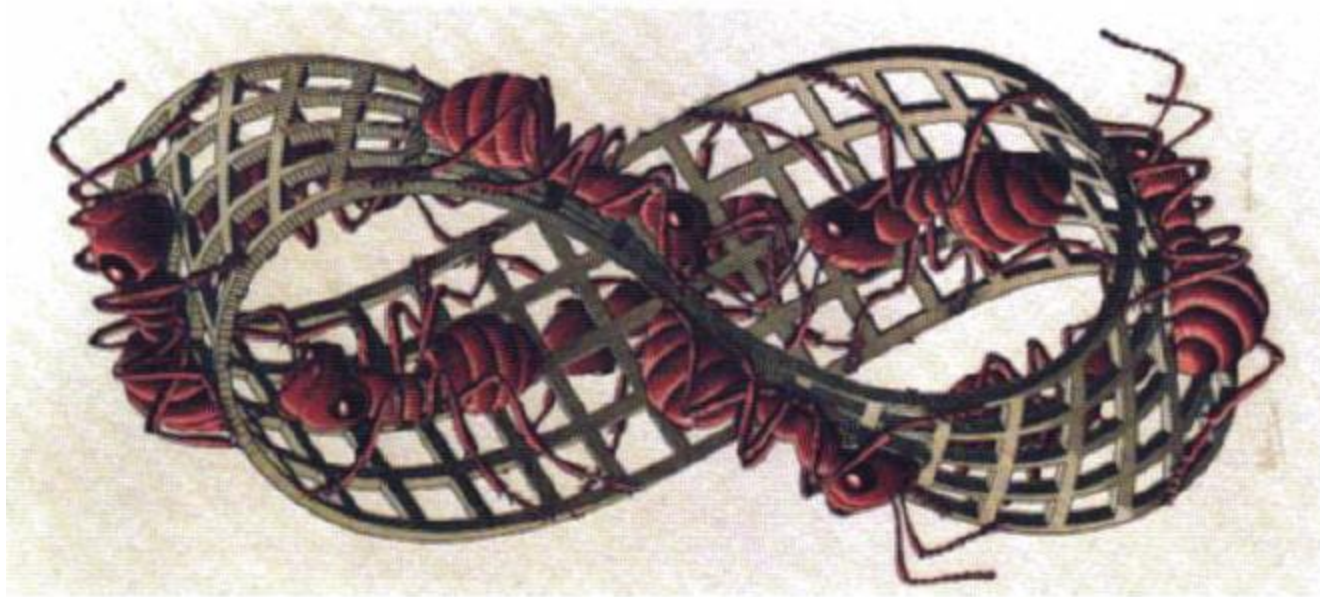


Wie kann man ein Quadrat falten?

Eigenschaft eines Quadrates: Diagonale als Spiegelachse



# VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT



Escher: Möbiusband