Formelübersicht zur Partikelbewegung

Strömungskräfte auf ein stationär umströmtes / bewegtes Partikel

Allgemeine Beziehungen

Kraft auf ein Partikel:
$$\vec{F}_W = \int \vec{\Pi} \cdot \vec{n}\, dS = \vec{F}_p + \vec{F}_{vis} = -V_p \cdot \text{grad}\, p + \int \vec{\Pi}_{diss} \cdot \vec{n}\, dS$$

Strömungskraft = strömungsinduzierte Druckkraft + Reibungskraft / viskositätsbez. Kraft

für Kugelkoordinaten:
$$F_W = F_p + F_{vis} = \int \left(-p \cdot \cos\Theta + \Pi_{diss_{rr}} \cdot \cos\Theta - \Pi_{diss_{r\Theta}} \cdot \sin\Theta\right) dS$$

hydrostat. Druckkraft: (Auftriebskraft)
$$\vec{F}_A = -V_p \cdot \text{grad}\, p_{hs} = -V_p \cdot \frac{d}{dz}\left(\vec{g} \cdot \rho \cdot z\right) = -g \cdot \rho \cdot V_p$$

Die Auftriebskraft wird oft wie die Gewichtskraft als äußere Kraft behandelt. Das Druckfeld p wird dann aus den Navier-Stokes-Gl.en unter Vernachlässigung der Feldkräfte berechnet.

wirkendes Drehmoment:
$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \left(\vec{\Pi} \cdot \vec{n}\right) dS$$

Stationäre Kugelumströmung im Stokes-Regime

Stokes-Regime:
$$Re_p = \frac{\rho \cdot x \cdot v_{rel}}{\eta} < 1$$
(Fehler in F_W ca. 1.7% / 6.9% bei Re_P = 0.1 / 0.5)

feste Kugel:
$$\vec{F}_W = 3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x \cdot \vec{v}_{rel}$$
mit $\vec{v}_{rel} = \vec{v}^{\infty} - \vec{u}_P$

bzw.
$$c_W = \frac{F_W}{A_{Quer} \cdot p_{stau}} = \frac{24}{Re_P}$$

viskose Kugel:
$$\vec{F}_W = 3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x \cdot \frac{2 \cdot \eta + 3 \cdot \eta_P}{3 \cdot \eta + \eta_P} \cdot \vec{v}_{rel}$$
η_P = Viskosität der dispersen Phase

runde Gasblase:
$$\vec{F}_W = 2 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x \cdot \vec{v}_{rel}$$

Stationäre Partikelumströmung - ausgewählte Fälle

festes nicht-kugelige Partikel:
$$\vec{F}_W = 3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x_{hd} \cdot \vec{T} \cdot \vec{v}_{rel}$$
mit x_{hd} = hydrodyn. Äquivalentdurchmesser
T = Translationsmatrix

Für nichtkugelige Partikel wirkt die Strömungskraft im Allgemeinen nicht parallel zur Relativgeschwindigkeit (es sei denn die Strömung erfolgt entlang der Hauptachsen).

feste Kugel, moderate Re_P: (ausgewählte Möglichkeiten)
$$\vec{F}_W = 3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x \cdot \left(1 + \frac{3}{16} \cdot Re_p\right) \cdot \vec{v}_{rel}$$
(Oseen 1910, für Re_P<10)

$$\vec{F}_W = 3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x \cdot \left(1 + a \cdot Re_p^{\,b}\right) \cdot \vec{v}_{rel}$$
(Cheng 1990, $a = \frac{1}{6}$ & $b = \frac{2}{3}$, für Re_P<800)

feine Aerosolpartikel:
$$\vec{F}_W = \frac{3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x \cdot \vec{v}_{rel}}{C_C(Kn)}$$
wobei $Kn = \frac{\lambda_m}{a}$ = Knudsen-Zahl

λ_m = mittlere freie Weglänge, a = Partikelradius

Mobilität von Partikeln und ausgewählte Transportkoeffizienten

Eine *Mobilität* soll die Geschwindigkeit der Positionsänderung unter Einwirkung einer Kraft beschreiben. Zu diesem Zweck ist es zulässig, das Fluid als ruhend anzunehmen (d.h. $\mathbf{v}_{rel} = -\mathbf{u}_P$).

mechan./hydrodyn. Mobilität: $\mu_{hd} = \frac{u_P}{F_W} = \frac{1}{3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x}$ (Basisdefinition)

elektrostat. Mobilität: $\mu_{es} = \frac{u_P}{\left|\vec{E}\right|} = \frac{Q_P}{3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x} = \mu_{hd} \cdot Q_P$ (geladenes Aerosolpartikel in Luft)
E = elektr. Feldstärke, Q_P = Partikelladung

elektrophoret. Mobilität: $\mu_{ep} = \frac{u_P}{\left|\vec{E}\right|} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_m \cdot \zeta}{\eta}$ (geladenes Partikel in polarer Flüssigkeit)
ε_0 = elektr. Feldkonst., ε_m = Permittivität, ζ = Zetapotenzial)

Brownsche Mobilität: $D_P = \frac{\overline{\Delta r^2}}{6 \cdot t} = \frac{k_B \cdot T}{3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x} = \mu_{hd} \cdot \overline{E_{kin}}$ (stochastische Verschiebung im Raum)
(Partikeldiffusionskoeffizient)
k_B = Boltzmann-Konst., E_{kin} = kinet./therm. Energie)

Sinkgeschwindigkeit: $v_S = \frac{\Delta z}{t} = \frac{g \cdot \Delta\rho \cdot x^2}{18 \cdot \eta} = \mu_{hd} \cdot \left(F_G - F_A\right)$

Instationäre Partikelbewegung

Bewegungsgleichung des Partikels (Basset-Bousinesq-Oseen-Gleichung):

$$m_P \cdot \frac{d}{dt}\overrightarrow{u_P} = 3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x \cdot \overrightarrow{v_{rel}} + \frac{\rho}{2} \cdot V_P \cdot \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{v_{rel}}\right) - V_P \cdot \mathrm{grad}\, p + \overrightarrow{F_{Basset}} + \overrightarrow{\Sigma F_{äußere}}$$

Trägheit = Schleppkraft + inertiale Schleppkraft + Druckkraft + Basset-Gedächtniskraft + äußere Kräfte

mit Basset-Kraft: $\overrightarrow{F_{Basset}} = \frac{3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x^2}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot \nu}} \cdot \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \frac{d}{d\tau}\overrightarrow{v_{rel}}\, d\tau = \ldots x^2 \cdot \sqrt{\eta \cdot \rho}$

Bewegungsgleichung für ruhendes Fluid: $\left(\rho_P \cdot V_P + \frac{\rho}{2} \cdot V_P\right) \frac{d}{dt}\overrightarrow{u_P} = -3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot x \cdot \overrightarrow{u_P} - V_P \cdot \mathrm{grad}\, p + \overrightarrow{F_{Basset}} + \overrightarrow{\Sigma F_{äußere}}$

... & ohne F_{Druck}, F_{Basset}: $\rho'_P \cdot V_P \cdot \frac{d}{dt}\overrightarrow{u_P} = -\frac{\overrightarrow{u_P}}{\mu_{hd}} + \overrightarrow{F_{äußere}}$ mit $\rho'_P = \rho_P + \frac{\rho}{2}$

Übergang zur stat. Bewegung: $u_P(t) = u_P(\infty) - \left(u_P(\infty) - u_P(0)\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Relaxatnszeit & Bremsweg: $\tau = \mu_{hd} \cdot \rho'_P \cdot V_P = \frac{\rho'_P \cdot x^2}{18 \cdot \eta}$ und $l_{st} = u_{P.0} \cdot \tau$

Stokes-Zahl: $Stk = \frac{l_{st}}{L} = \frac{u_{P.0} \cdot \tau}{L}$ Partikelträgheit zu Reibung am Partikel

Für Trägheitsabscheider wird als charakteristische Länge L der Düsenradius genutzt.

Aerosolpartikel

freier Molekularbereich: $\vec{F}_W = \frac{3\cdot\pi\cdot\eta\cdot x^2}{2\cdot A\cdot\lambda_m}\cdot\vec{v}_{rel} = \frac{3\cdot\pi\cdot\eta\cdot x}{A\cdot Kn}\cdot\vec{v}_{rel}$ mit $A = 1.654$

Übergangsbereich: $\vec{F}_W = \frac{3\cdot\pi\cdot\eta\cdot x}{C_C(Kn)}\cdot\vec{v}_{rel}$ wobei $C_C(Kn)$ = Cunningham-Korrektur

Gleichungen für die Cunningham-Korrektur:

vereinfachend: $C_C = 1 + A\cdot Kn$ (nach Cunningham 1910, $A = 1.654$)

Ansatz n. Millikan (1923): $C_C = 1 + \left(A_1 + A_2\cdot e^{-\frac{B}{Kn}}\right)\cdot Kn$ z.B. mit $A_1 = 1.257$, $A_2 = 0.4$, $B = 1.1$

Transportkoeffizienten: $v_S = \frac{g\cdot\Delta\rho\cdot x^2}{18\cdot\eta}\cdot C_C(Kn)$ $D_P = \frac{k_B\cdot T}{3\cdot\pi\cdot\eta\cdot x}\cdot C_C(Kn)$

Relaxationszeit & Sinkgeschwindigkeit von feinen Aerosolpartikeln für Kn=0

sinnvolle Vereinfachungen: $F_{Basset} = 0$ $\Delta\rho = \rho_P - \rho = \rho_P$ $\rho'_P = \rho_P + \frac{\rho}{2} = \rho_P$

Sinkgeschwindigkeit und Relaxationszeit: $v_S = \frac{g\cdot\rho_P\cdot x^2}{18\cdot\eta}$ $\tau = \frac{\rho_P\cdot x^2}{18\cdot\eta} = \frac{v_S}{g}$

aerodynam. Durchmesser: $x_{ad} = \sqrt{\frac{18\cdot\eta}{g\cdot\rho_E}\cdot v_S} = \sqrt{\frac{18\cdot\eta}{\rho_E}\cdot\tau} = x_{Stokes}\cdot\sqrt{\frac{\rho_P}{\rho_E}}$ ρ_E = 1 g/cm³ = Einheitsdichte

Relaxationszeit für große Aerosolpartikeln (moderate Partikel-Reynoldszahlen)

Ansatz basierend auf Lösung für Stokes-Bereich: $\tau = \tau_{Stokes}\cdot C_{nSt}(Re_{P.0})$ $Re_{P.0}$ = initiale Partikel-Reynoldszahl

Korrekturterm: (für Kugeln und $Re_{P.0} < 750$)

$$C_{nSt} = \frac{18}{Re_{P.0}}\cdot\left(Re_{P.0}^{\frac{1}{3}} - \sqrt{6}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot Re_{P.0}^{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

Y. S. Cheng et al., *J. Aerosol Sci.*, 21(5):701-710, **1990**;
L. J. Forney, *Aerosol Sci. Technol.*, 15(1):49-59, **1991**