3. Für die eindimensionale Teilchenbewegung wird der Paritätsoperator $\hat{P}$ durch seine Wirkung auf die Ortseigenzustände definiert gemäß $\hat{P}|x\rangle = |-x\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{P}$ HERMITEsch und unitär ist.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\pi$ von $\hat{P}$.

c) Ein *ungerader* Operator $\hat{A}$ besitzt die Eigenschaft: $\hat{P}\hat{A}\hat{P}^\dagger = -\hat{A}$.
Nun seien $|a\rangle$, $|b\rangle$ Eigenzustände von $\hat{P}$, die den selben Paritätseigenwert haben. Beweisen Sie, dass dann $\langle a|\hat{A}|b\rangle = 0$.

d) Zeigen Sie, dass $[\hat{P}, \hat{x}]_+ = \hat{P}\hat{x} + \hat{x}\hat{P} = 0$ gilt und damit, dass der Ortsoperator $\hat{x}$ ein ungerader Operator ist.

Paritätsoperator $\hat{P}|x\rangle = |-x\rangle$

Wirkung auf allg. Zustand $|\psi\rangle$:

$$(\hat{P}\psi)(x) \equiv \underbrace{\langle x|}_{\text{Ortsdarstellung}}\hat{P}|\psi\rangle$$

$$= \langle x|\hat{P}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, |x'\rangle\langle x'|\right)}_{=\mathbb{1}}|\psi\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \underbrace{\langle x|\hat{P}|x'\rangle}_{=\langle x|-x'\rangle \,=\, \delta(x+x')}\underbrace{\langle x'|\psi\rangle}_{=\psi(x')}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \delta(x'-(-x))\,\psi(x') = \psi(-x)$$

Wir zeigen jetzt Hermizität. Seien $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ beliebig:

$$\langle\psi|\hat{P}|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \langle\psi|x\rangle\langle x|\hat{P}|\varphi\rangle$$

$$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle\langle x|$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\varphi(-x)$$

$$\underset{x\to -x}{=} -\int_{+\infty}^{-\infty} dx\, \psi^*(-x)\varphi(x)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi^*(x)\psi(-x)\right)^*$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \langle\varphi|x\rangle\langle x|\hat{P}|\psi\rangle\right)^*$$

$$= \Big[\langle\varphi|\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle\langle x|\right)}_{=\mathbb{1}}\hat{P}|\psi\rangle\Big]^*$$

$$= \langle\varphi|\hat{P}|\psi\rangle^*$$

$\Rightarrow \hat{P}^\dagger = \hat{P}$ $\quad \hat{P}$ hermitesch

Operator unitär bedeutet: $\hat{P}^\dagger\hat{P} = \mathbb{1}$

Hier also: $\hat{P}^2 = \mathbb{1}$

Betrachte

$$\langle x|\hat{P}^2|\psi\rangle = \langle x|\hat{P}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx'\,|x'\rangle\langle x'|\right]\hat{P}|\psi\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\,\underbrace{\langle x|\hat{P}|x'\rangle}_{=\delta(x-(-x'))}\underbrace{\langle x'|\hat{P}|\psi\rangle}_{=\psi(-x')}$$

$$= \psi(x) = \langle x|\psi\rangle$$

$$= \langle x|\mathbb{1}|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{P}^2 = \underline{\mathbb{1}} \Rightarrow \hat{P} \text{ unitär}$$

b) Eigenwerte von $\hat{P}$. Betrachte Eigenwertproblem

$$\hat{P}|\psi\rangle = \pi|\psi\rangle$$

Wende $\hat{P}$ von links an und nutze Unitarität

$$\hat{P}^2|\psi\rangle = \underline{\mathbb{1}}|\psi\rangle = |\psi\rangle \overset{!}{=} \pi\hat{P}|\psi\rangle$$

$$\overset{EWG}{=} \pi^2|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \pi^2 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \pi = \pm 1$$

→ Eigenfunktionen: gerade oder ungerade Wellenfunktionen

$$\psi(x) = \pm\psi(-x)$$

c) Sei $\hat{A}$ ungerader Operator, d.h. $\hat{P}\hat{A}\hat{P}^\dagger = -\hat{A}$

Seien $|a\rangle, |b\rangle$ EZ von $\hat{P}$ zum EW $\pi$.

Betrachte

$$\langle a|\hat{A}|b\rangle = \langle a|\underbrace{\hat{P}^\dagger\hat{P}}_{=\mathbb{1}}\hat{A}\underbrace{\hat{P}^\dagger\hat{P}}_{=\mathbb{1}}|b\rangle = \langle a|\pi(-\hat{A})\pi|b\rangle$$

$$= -\underbrace{\pi^2}_{=1}\langle a|\hat{A}|b\rangle$$

$$= -\langle a|\hat{A}|b\rangle$$

$$\Rightarrow \langle a|\hat{A}|b\rangle = 0$$

d) Betrachte

$$\langle x|\hat{x}\hat{P}|\psi\rangle = x\,\psi(-x)$$

$$= -\left[(-x)\cdot\psi(-x)\right]$$

$$= -\langle x|\hat{P}\hat{x}|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{x}\hat{P} = -\hat{P}\hat{x}$$

$$\Rightarrow \hat{P}\hat{x}\hat{P}^\dagger = \hat{P}\hat{x}\hat{P} = -\hat{P}\hat{P}\hat{x} = -\hat{x}$$ //