2 Kräfte und Momente in der ebenen Statik

2.1 Zentrales, ebenes Kraftsystem

2.1.1 Definition

In einem zentralen, ebenen Kraftsystem schneiden sich die Wirkungslinien aller wirkenden Kräfte in einem einzigen Punkt.

2.1.2 Bedeutung

2.1.3 Resultierende Kraft $\vec{F}_R$

Definition
Aus der Summe aller wirkenden Kräfte kann eine resultierende Kraft $\vec{F}_R$ gebildet werden. Diese gibt die Gesamtwirkung aller wirkenden Kräfte auf das System wieder. Liegt ein zentrales, ebenes Kraftsystem vor, so entspricht der Angriffspunkt von $\vec{F}_R$ dem Schnittpunkt der Wirkungslinien aller wirkenden Kräfte.

Die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ kann auf zwei Arten bestimmt werden:

1. rechnerisch (analytisch) oder
2. graphisch über einen Kräfteplan (= Plausibilitätskontrolle)

Analytische Lösung

Die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ ergibt sich als Summe aller wirkenden Kräfte. Wirken auf ein System n Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, so gilt für die resultierende Kraft:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{1}$$

Werden die Kräfte in horizontale und vertikale Anteile zerlegt, so gilt

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \cdot \vec{e}_x + \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \cdot \vec{e}_y \\ &= F_{Rx} \cdot \vec{e}_x + F_{Ry} \cdot \vec{e}_y \end{aligned} \tag{2}$$

mit den Koordinaten (Achtung: Vorzeichen beachten!)

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \tag{3}$$

Für den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$ gilt dann

$$|\vec{F}_R| = F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \tag{4}$$

Die Richtung der Resultierenden wird über den **Richtungswinkel** α zwischen der positiven x-Achsenrichtung und der Resultierenden $\vec{F}_R$ beschrieben. Zur Berechnung von α muss der **Hilfswinkel** α^* aus dem Verhältnis der Komponenten bestimmt werden.

$$\tan(\alpha^*) = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \tag{5}$$

Der Hilfswinkel α^* beschreibt die Lage der Resultierenden zur x-Achse.
Der Richtungswinkel α beschreibt die Lage der Resultierenden zur **positiven** x-Achsenrichtung. Zwischen α und α^* besteht folgender Zusammenhang:

$$\begin{cases} \alpha^* > 0 \text{ und } F_{Rx} > 0 & \vec{F}_R \text{ zeigt in den 1. Quadranten} & \alpha = \alpha^* \\ \alpha^* < 0 \text{ und } F_{Rx} < 0 & \vec{F}_R \text{ zeigt in den 2. Quadranten} & \alpha = \alpha^* + 180^\circ \\ \alpha^* > 0 \text{ und } F_{Rx} < 0 & \vec{F}_R \text{ zeigt in den 3. Quadranten} & \alpha = \alpha^* + 180^\circ \\ \alpha^* < 0 \text{ und } F_{Rx} > 0 & \vec{F}_R \text{ zeigt in den 4. Quadranten} & \alpha = \alpha^* + 360^\circ \end{cases} \tag{6}$$

Lösung durch Kräfteplan

Merke:

1. Die Reihenfolge der Kräfte im Kräfteplan ist egal. → wegunabhängig
2. Die Resultierende wirkt zwischen Start- und Endpunkt der Kräftegruppe.

Beispiel

2.2 Allgemeines, ebenes Kraftsystem

2.2.1 Beliebige Kräfte in der Ebene

Analytische Lösung

Unverändert. Es gilt weiterhin

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{7}$$

Graphische Lösung

2.2.2 Momentenwirkung auf die Ebene

Moment einer Einzelkraft

Soll die Wirkung einer Kraft auf einen Bezugspunkt O bestimmt werden, der nicht auf der Wirkungslinie der Kraft liegt, so besteht neben der Kraft- auch eine Momentenwirkung. Die Größe des Momentes hängt dabei zum einen von der Größe der Kraft $\vec{F}$ und zum anderen vom kleinstmöglichen Abstand der Kraft-Wirkungslinie vom Bezugspunkt ab. Das resultierende Moment ergibt sich dann aus dem Kreuzprodukt aus **Ortsvektor** $\vec{r}$ und Kraft $\vec{F}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = M_z \cdot \vec{e}_z \tag{8}$$

Alternativ kann das Moment auch aus dem kleinstmöglichen Abstand zwischen Bezugspunkt und Kraftwirkungslinie, dem **Hebelarm**, bestimmt werden. In der Ebene ist der Hebelarm eine Gerade und steht stets rechtwinklig auf der Kraftwirkungslinie.

$$\text{Moment} = \text{Kraft} \;\cdot\; \text{Hebelarm} \tag{9}$$

Die Koordinate des Momentenvektors M_z berechnet sich aus den Koordinaten (Achtung: Vorzeichen beachten!) der Kraft und des Ortsvektors zu

$$M_z = r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x \tag{10}$$

Durch die Vorzeichen der Koordinaten und in Übereinstimmung mit der Rechten-Hand-Regel, werden gegen den Uhrzeigersinn drehende Momente im ebenen Koordinatensystem als positiv, im Uhrzeigersinn drehende Momente als negativ gezählt.

Beispiele

Merke:

1. Kräfte können auch bei der Berechnung der Momentenwirkung in horizontale und vertikale Anteile aufgespalten werden.

2. Momente können über das Kreuzprodukt aus Ortsvektor und Kraft oder aus der Multiplikation Kraft mal Hebelarm berechnet werden.

3. Als Hebelarme der Komponenten einer Kraft ($\vec{F}_x,\ \vec{F}_y$) können die Komponenten des Ortsvektors ($\vec{r}_x,\ \vec{r}_y$) verwendet werden.

Moment einer Kräftegruppe

Für jeden starren Körper, der durch mehrere Kräfte $\vec{F}_i$ belastet wird, muss die **statische Äquivalenz** weiter gegeben sein. Das bedeutet, dass die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ die gleiche Kraft- und Momentenwirkung auf das System haben muss, wie die Summe der Einzelkräfte.

$$M_R = \sum_i (r_{ix} \cdot F_{iy} - r_{iy} \cdot F_{ix}) = r_{Rx} \cdot F_{Ry} - r_{Ry} \cdot F_{Rx} \tag{11}$$

Die Gleichung (11) kann so umgestellt werden, dass eine Geradengleichung entsteht, die die Lage der Wirkungslinie der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$ im x-y-Koordinatensystem beschreibt. Für eine allgemeinere Darstellung wird $r_{Rx} = x$ und $r_{Ry} = y$ eingesetzt

$$y = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \cdot x - \frac{M_R}{F_{Rx}} \tag{12}$$

Beispiel

Moment aus Einzelmomenten

Für jeden starren Körper, der durch mehrere Einzelmomente $\vec{M}_i$ belastet wird, muss die **statische Äquivalenz** weiter gegeben sein. Das bedeutet, dass das resultierende Moment $\vec{M}_R$ die gleiche Kraft- und Momentenwirkung auf das System haben muss, wie die Summe der Einzelmomente.

Sonderfall: Moment aus parallelem Kräftepaar

Unter einem parallelem Kräftepaar werden zwei Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ verstanden, deren Wirkungslinien parallel verlaufen und für die gilt

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_R = 0, \;\vec{M}_R \neq 0 \tag{13}$$

Die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ eines parallelen Kräftepaares ist Null, allerdings entsteht eine Momentenwirkung $\vec{M}_R$. Ein paralleles Kräftepaar hat somit die gleiche Wirkung auf einen starren Körper, wie ein Einzelmoment.

Superposition aus Einzelkräften und -momenten

Wird ein Körper gleichzeitig durch Einzelkräfte $\vec{F}_i$ und Einzelmomente $\vec{M}_i$ belastet, so wird die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ allein über die Summe der Einzelkräfte bestimmt.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{RF} = \sum_i \vec{F}_i \tag{14}$$

Das resultierende Moment $\vec{M}_R$ setzt sich zusammen aus der Momentenwirkung der Einzelkräfte M_{RF} und der Momentenwirkung der Einzelmomente $\vec{M}_{RM}$

$$\vec{M}_R = \vec{M}_{RF} + \vec{M}_{RM} = \sum_i \left(F_{iy} \cdot r_{ix} - F_{ix} \cdot r_{iy}\right) \cdot \vec{e}_z + \sum_i \vec{M}_i = r_{Rx} \cdot F_{Ry} - r_{Ry} \cdot F_{Rx} \tag{15}$$

Die Wirkungslinie der resultierenden Kraft wird weiterhin bestimmt mit

$$y = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \cdot x - \frac{M_R}{F_{Rx}} \tag{16}$$

2.2.3 Gleichgewicht

Definition

Ein System befindet sich im Gleichgewicht, wenn die resultierenden Kräfte und Momente verschwinden.

$$\vec{F}_R = 0;\ \vec{M}_R = 0 \tag{17}$$

Im dreidimensionalen Fall werden dafür **6 Bilanzgleichungen** (da Freiheitsgrad $f = 6$) aufgestellt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0 \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0 \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \tag{23}$$

Im ebenen (zweidimensionalen) Fall (x-y-Ebene) bleiben **3 Bilanzgleichungen** ($f = 3$):

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \tag{26}$$

Die Bilanzgleichungen werden auch als **Gleichgewichtsbedingungen** bezeichnet.