Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Frank Henschel, Michael Meinhold Dresden, 6. Januar 2023

Mathematik 1 - WS2022/23
Übungsblatt 13

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Ableitungsfunktionen der Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen mit Hilfe des entsprechenden Satzes aus der Vorlesung.

(a) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$

(b) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

(c) $\tan : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

(d) $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(Hinweis: Die Funktion sinh in Teilaufgabe (d) heißt *sinus hyperbolicus* und ist durch $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ definiert.)

Aufgabe 2:

(a) Durch Erwärmen vergrößert sich der Radius einer Kugel von $r_1 = 2.000\mathrm{m}m$ auf $r_2 = 2.034\mathrm{m}m$. Berechnen Sie mithilfe des Differentials $\mathrm{d}V$ die (ungefähre) relative Zunahme des Kugelvolumens.

(b) Bestimmen Sie, mit welcher Genauigkeit der Durchmesser D einer Kugel zu messen ist, wenn der relative Fehler des daraus berechneten Kugelvolumens unter 1% liegen soll.

Aufgabe 3: Die Bestimmung des (elektrischen) Widerstandes R mittels Wheatstone'scher Brückenschaltung[1] ergibt sich aus

$$R = \frac{W \cdot x}{L - x}$$

wobei W den Vergleichswiderstand, L die Länge des Schiebewiderstandes und x des Abgleiches bezeichnen.

Berechnen Sie die Stelle x, an welcher sich bei der Bestimmung von R der kleinste relative Fehler ergibt. Geben Sie dessen Größe an.

Aufgabe 4: Die durch eine Funktionsgleichung der Form

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{mit} \quad (a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$$

und $x \in \mathbb{R}$ beschriebene Kurve wird *Parabel dritter Ordnung* genannt.

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c und d jener Funktion f, deren Funktionsgraph G_f:

(1) den Koordinatenursprung $O(0; 0)$ enthält sowie

(2) den Punkt $P(1; -2)$ als Wendepunkt besitzt und

(3) in P eine Wendetangente besitzt, deren Nullstelle $x_1 = 2$ ist.

[1] Vgl. beispielsweise http://de.wikipedia.org/wiki/Wheatstonesche_Messbrücke

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Ermitteln Sie sämtliche partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung für die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bei (a) – (e) und $D \subseteq \mathbb{R}^3$ bei (f).

(a) $f(x,y) = x^2y^3 + xy^4 - x^2 + 2\sqrt{y}$

(b) $f(x,y) = e^{x/y}$

(c) $f(x,y) = e^{2y}\sin x + \frac{y}{x}$

(d) $f(x,y) = x\ln(x^2 - y)$

(e) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

(f) $f(x,y,z) = x^2ye^z + \sin(x-y) - xz^3$

Aufgabe 6: Ermitteln Sie durch Rechnung für die folgenden Funktionen

$$f : x \mapsto y = f(x), \quad x \in D$$

falls vorhanden - Nullstellen, (lokale) Extrempunkte, Wendepunkte sowie die Eigenschaften Monotonie und Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$.

(a) $f(x) = 0.2x^5 - x^4 + x^3 - 0.2,\ \ D = \mathbb{R}$

(b) $f(x) = x^2e^{-x^2},\ \ D = \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \frac{x^3}{x+1},\ \ D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Skizzieren Sie diese Funktionen in einem geeignetem Intervall.

Aufgabe 7: Die Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ mit

$$f(x) = \sin x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

soll in einer Umgebung von $x_0 = 0$ durch eine lineare Funktion approximiert werden.

(a) Geben Sie die explizite Darstellung der Tangente t an den Funktionsgraph zu f an der Stelle x_0 an.

(b) Berechnen Sie die Ordinatenzuwächse Δf und $\mathrm{d}y$ (der Tangente t) für Abszissenzuwächse

$$\Delta x = \mathrm{d}x = \pm 0.01\ (\pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.4)$$

Geben Sie auch die prozentuale Änderung der absoluten Ordinatenabweichung $|\Delta f - \mathrm{d}y|$ bezogen auf den Funktionswert $f(x_0 + \Delta x)$ an.

(c) Berechnen Sie das Differential $\mathrm{d}f$ für $\mathrm{d}x$.