

Didaktik der Arithmetik

- Vorlesung Vertiefungsmodul LAGS-GSD-MA-VM1

2. Einblicke: Entwicklungspsychologische und kulturhistorische Überlegungen

Grundschuldidaktik Mathematik
Prof. Dr. phil. Birgit Brandt
Wintersemester 2024/25



<https://www.tierchenwelt.de/specials/tierleben/472-der-kluge-hans-ein-pferd-loest-matheaufgaben.html>

Eine Welt ohne Zahlen?

Johnny Ball

England gewann gestern ein weiteres Mal den Weltcup und schlug Brasilien um mehrere Tore. Die Engländer führten schon nach kurzer Zeit durch ein Tor von Beckham. Er traf dann nach der Spielmitte noch einmal und später noch ein weiteres Mal.



..



Ball, J., 2006

https://de.wikipedia.org/wiki/Flagge_Englands
https://de.wikipedia.org/wiki/Flagge_Brasilens

Eine Welt ohne Zahlen? (I)

Frau bekommt viele Babys

In Indien hat eine Frau mehrere Babys auf einmal zur Welt gebracht. Jedes Baby ist so groß wie eine kleine Ananas. Den Ärzten zufolge geht es den Kleinen gut.

Peter Zahl

In der Regel bekommen Frauen ein Baby und vielleicht noch ein weiteres. Es gibt aber auch Fälle, in denen

ein Baby und noch eines und noch eines geboren werden. Diese Frau bekam sogar ein Baby und noch eines und noch eines und noch eines und noch eines und noch eines.

LETZTE MELDUNG

Indische Babys:
Und noch eines!



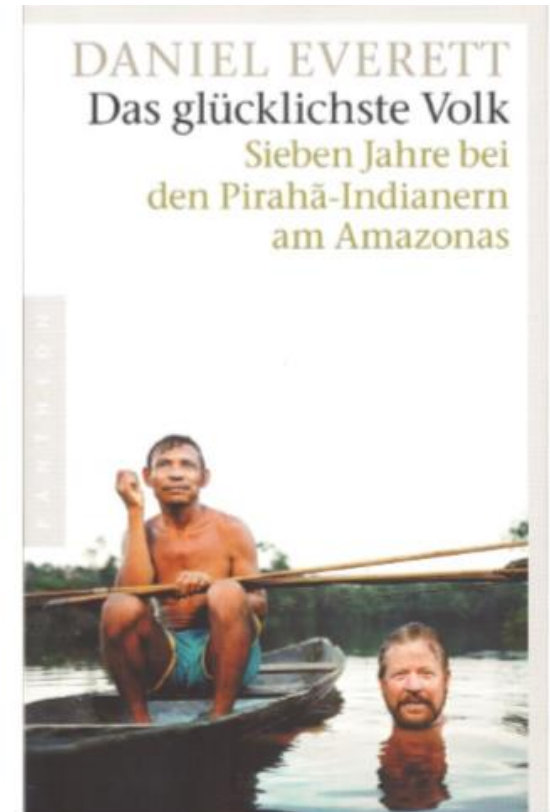
Ball, J., 2006

Eine Welt ohne Zahlen? (II)

- ***hói – hoí – baágiso***: eins – zwei – viele



- **Pirahã** (Amazonos – Brasilien)



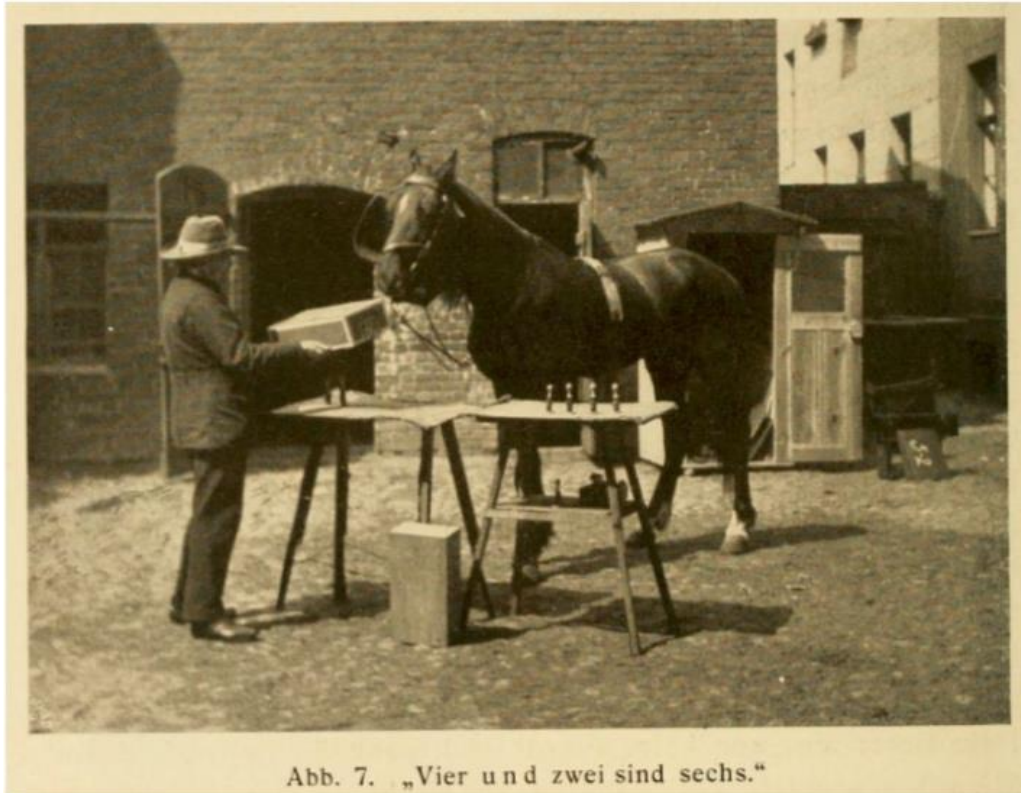
Eine Welt mit Zahlen!

- Die Anzahlen 1 – 3 werden in fast allen Sprachen mit einem Zahlwort diskret bezeichnet – sie sind vergleichbar mit Eigenschaften wie rot, klein, schnell.
- Adjektivisch verwendet lernen Kleinkinder Zahlworte schon sehr früh unabhängig von der Zahlwortreihe (z.B. zwei Hände und zwei Füße)



Anzahlwahrnehmung und mentaler Zahlenstrahl

Der kluge Hans



Krall, K., 1912

Der Kluge Hans und
sein Lehrmeister
Wilhelm von Osten

Ein genauer Blick auf das Foto:
Der Kluge Hans lernt mit
konkreten Arbeitsmaterialien
zählen, vergleichbar mit
Materialien für den
arithmetischen
Anfangsunterricht!

„Kluger-Hans-Effekt“

- 1904: wissenschaftlicher Streit zur Fähigkeit begrifflichen Denkens beim Tier (Komitee von Fachleuten unter dem Psychologen Carl Stumpf)
- Oskar Pfungst: Experimente, bei denen das Wissen des Trainers von Wissen des Tieres getrennt wurde
 - Hans rechnete richtig, wenn der Trainer die richtige Antwort kannte. („Liest Gestik“)
 - Es gab dann meistens eine Antwort, die der Trainer erwartete.
 - Auch Pfungst konnte niemals alle Formen unwillkürlicher Mitteilungen an das Pferd vermeiden.
 - Versuche mit Scheuklappen und in Dunkelheit: falsche Antworten.
- **Bedeutung der experimentellen Psychologie: Einfluss des Versuchsleiters und seiner Erwartungen**

Rechenkunst der Tiere

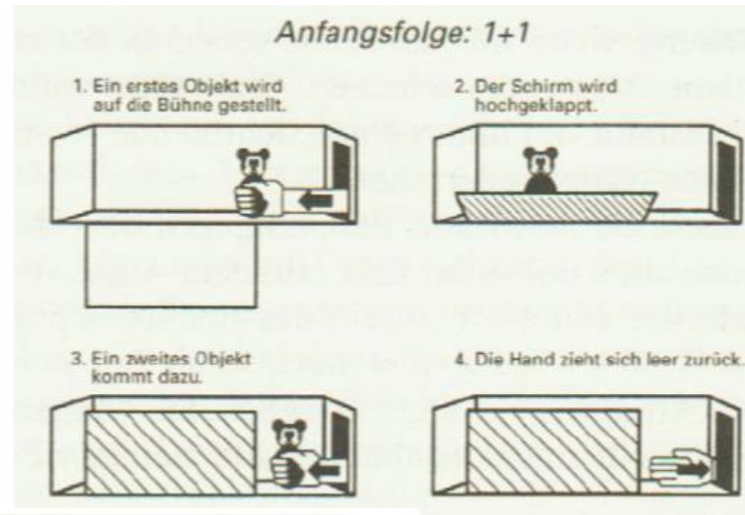
Viele Tierarten haben die Fähigkeit, numerische Größen wahrzunehmen, zu speichern, zu vergleichen und sogar näherungsweise zu „addieren“. (angeborene Fähigkeiten)



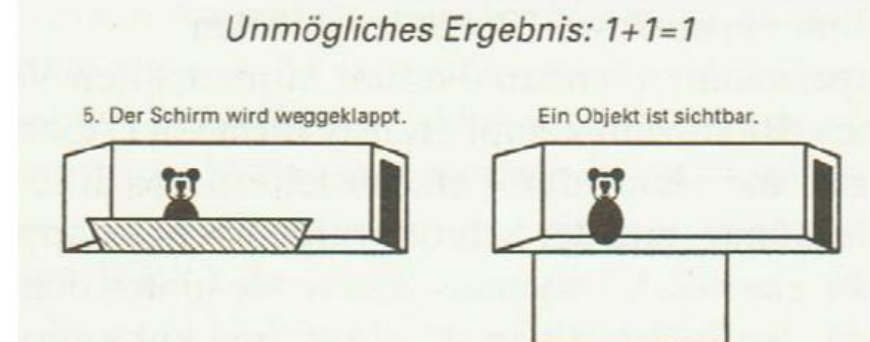
Aber nur sehr wenige Arten können lernen, mehr oder weniger abstrakte Handlungen – wie das Verweisen auf eine arabische Ziffer – mit numerischen Repräsentationen zu verknüpfen. (konditionierte Verhaltensweisen)

Dehaene, S., 1999, S. 37

Können Babys rechnen? (I)



Erläuterung zum Experiment im Lesetext.



Dehaene, S., 1999, S. 68

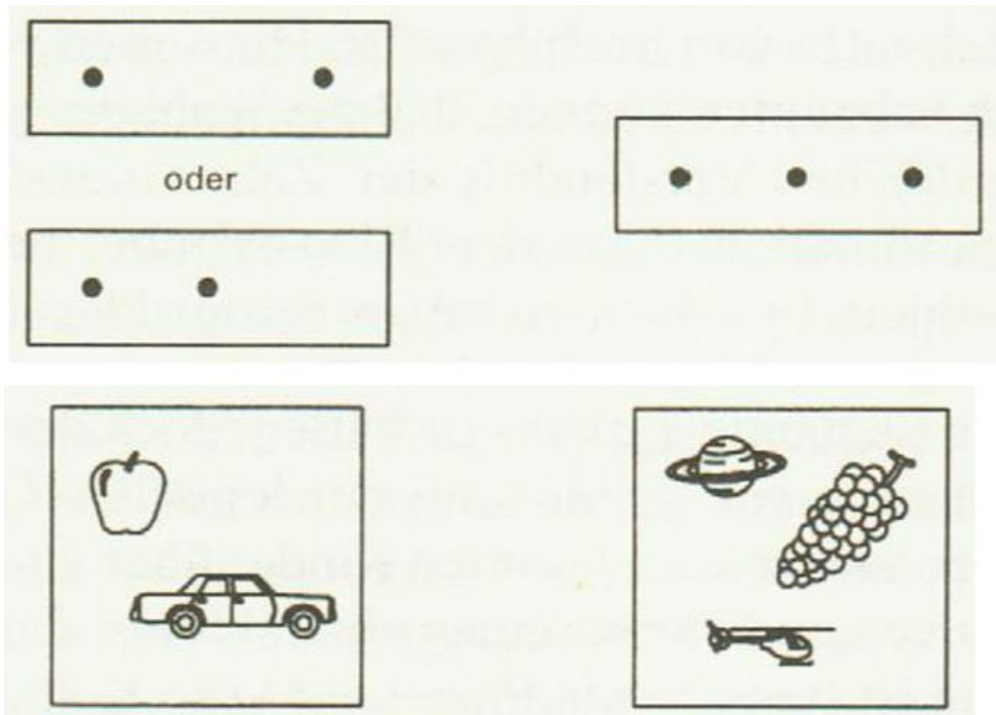
Können Babys rechnen? (II)

- Gemessen wird die Fixationszeit
- Unmögliche Ergebnisse wurden im Mittel eine Sekunde länger betrachtet
- Kinder erkennen nicht nur, dass sich etwas verändern muss ($1+1 \neq 1$), sondern können darüber hinaus zwischen richtig und falsch (2 vs. 3) unterscheiden.
- Auch frei lebende Rhesusaffen zeigen ähnliche Überraschungseffekte.

Babys achten auf die Anzahl

- Die für die Wahrnehmung von Anzahlen wichtige Information wird der Bewegung von Gegenständen im Raum-Zeit-Kontinuum unter Nutzung von mindestens drei fundamentalen Gesetzen entnommen:
 - Ein Ding kann nicht an mehreren Orten gleichzeitig sein.
 - Zwei Dinge können nicht zur gleichen Zeit am selben Ort sein.
 - Ein Ding kann weder plötzlich auftauchen noch verschwinden, seine Bahn muss stetig sein.
- Babys vernachlässigen hierbei Informationen zu Form und Farbe (auch bei sehr vertrauten Gegenständen), diese dienen erst mit zunehmender Erfahrung als Informationsquelle.

Können Babys rechnen? (III)



Der Aufmerksamkeitseffekt ist auch bei Nutzung verschiedener Modalitäten (z.B. visuell und auditiv) nachweisbar.

Dehaene, S., 1999, S. 62

Vorsichtigere Interpretation

- arithmetisch unmögliche Ereignisse sind auch physikalisch unmöglich
 - statt Veränderungen von Anzahlen könnten Veränderungen kontinuierlicher Mengen wahrgenommen werden
 - zumindest eine Sensitivität für Quantitäten scheint angeboren
- Mengenbewusstheit statt Zahlensinn

Numerosität versus Zahlbegriff

In diesem Sinne sind numerische Kompetenzen von Tieren und Säuglingen prä-arithmetisch, da sie nur die Äquivalenzrelation umfassen, d.h. die “gleich - ungleich” und “mehr-weniger” Unterscheidungen und die Repräsentation von Numerositäten (Objekte, Ereignisse). Die Repräsentation von Numerositäten sollte aber nicht mit der Repräsentation des Zahlbegriffs gleichgesetzt werden.

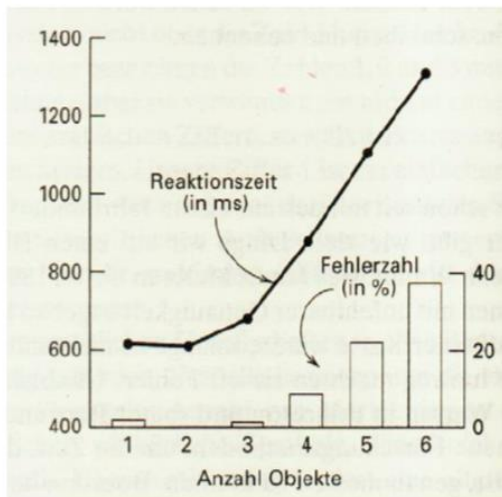
Mack, W., 2002

- ❖ Die Wahrnehmung von Numerositäten ist im kleinen Zahlbereich bei Kleinkindern – und auch bei einigen Tieren - trennscharf, bei größeren Mengen jedoch approximativ, also eine ungefähre Wahrnehmung im Vergleich von Mächtigkeiten bei Mengen.

Kardinale Repräsentation

- **simultane und unmittelbare Erfassung kleiner Anzahlen**

Kleine Anzahlen können unmittelbar erfasst und verglichen werden. Die Reaktionszeit nimmt ab 5 deutlich zu; es finden (verkürzte) Zählprozesse statt.



Dehaene, S., 1999, S. 82

- **ungefähre Unterscheidung (größerer) Anzahlen**

Das zur Unterscheidung notwendige Mengenverhältnis verändert sich im Laufe der kognitiven Entwicklung

- **Kleinkinder: 1 : 2**
- **Erwachsene: 1 : 1,15**

Erwachsene können also ohne Abzählen erkennen, dass 5 Gegenstände weniger sind als 6 Gegenstände, während Kleinkinder erst bei 3 Gegenständen sicher den Unterschied zu 6 Gegenständen erkennen. Zur sicheren Unterscheidung benötigen auch Tiere ein Mengenverhältnis von 1 : 2.

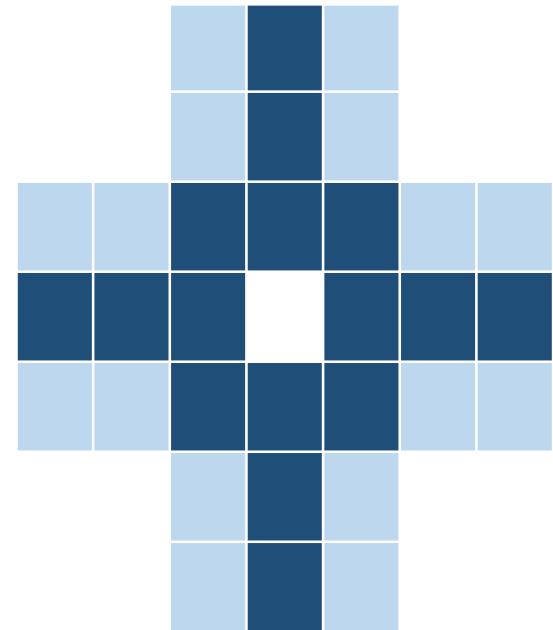
Kardinale Repräsentation

Welche Menge ist größer?

Welche Menge ist größer?

Kardinale Repräsentation

Sind es mehr hellblaue oder mehr dunkelblaue Felder?



Anzahlwahrnehmung

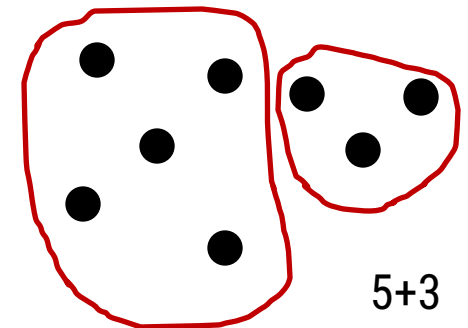
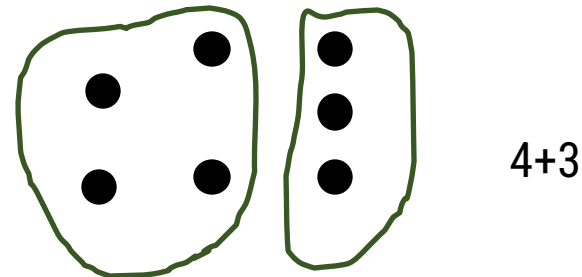
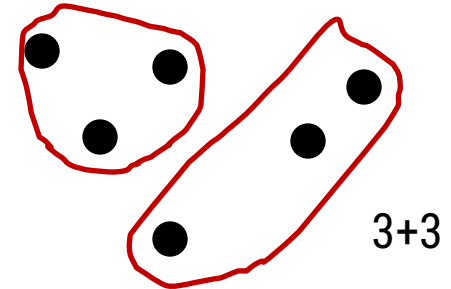
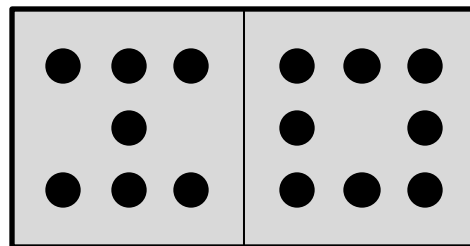
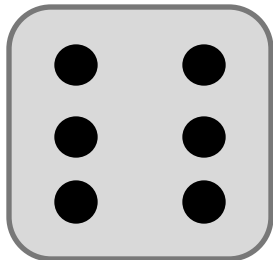
Simultane und quasisimultane Zahlauffassung – Anzahl wird ohne (umfangreichen) Zählprozess erfasst werden

- **Simultane Zahlauffassung (Subitizing):** kleinere Anzahlen von 3 (bis 5) Gegenständen sind auf einen Blick erfassbar
 - in der Anlage angeboren; Fähigkeit nur begrenzt ausbaufähig
- **Quasisimultane Zahlauffassung:** größere Anzahlen werden über Strukturen erfasst
 - entweder liegen sie in einer interpretierbaren (bekannten) Struktur vor oder
 - eine Struktur muss hineingelesen werden

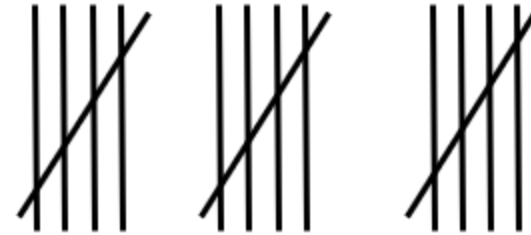
Quasisimultane Anzahlerfassung (I)

Die Punktebilder auf dem Würfel bzw. dem Dominostein geben die Anzahlen über eine festgelegte Struktur wieder.

In den ungeordneten „Punktwolken“ müssen entsprechende Strukturen erst „erblickt“ werden, um die Anzahl zu bestimmen. Bei entsprechender Rechenfähigkeit kann dabei die Anzahl schneller ermittelt werden als über konkretes Auszählen.



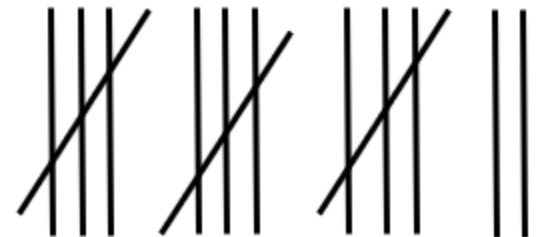
Quasisimultane Anzahlerfassung (II)



Als ungebündelte Strichliste ist die Anzahl nur abzählend zu erfassen.

In der konventionell gebündelte Strichliste ist die Anzahl über die Struktur schnell ablesbar (errechenbar).

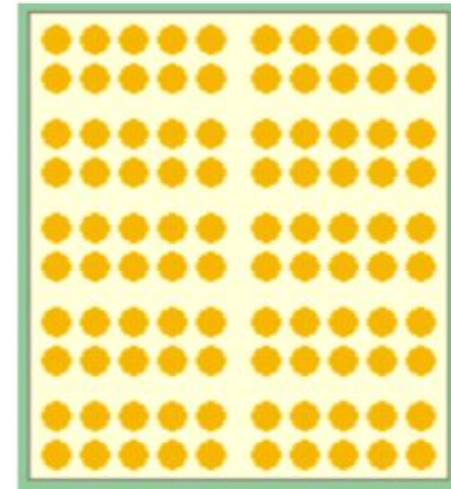
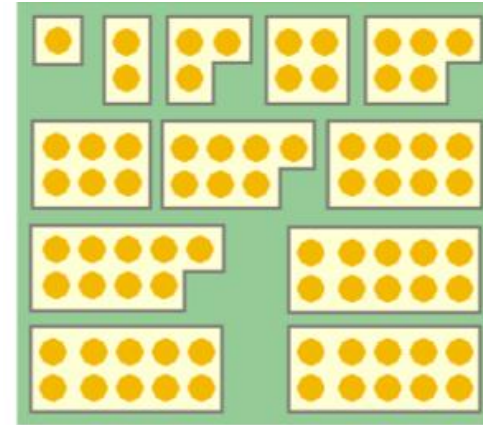
Die unkonventionell gebündelte Strichliste erfordert mehr Überlegung.



Quasisimultane Anzahlerfassung (III)

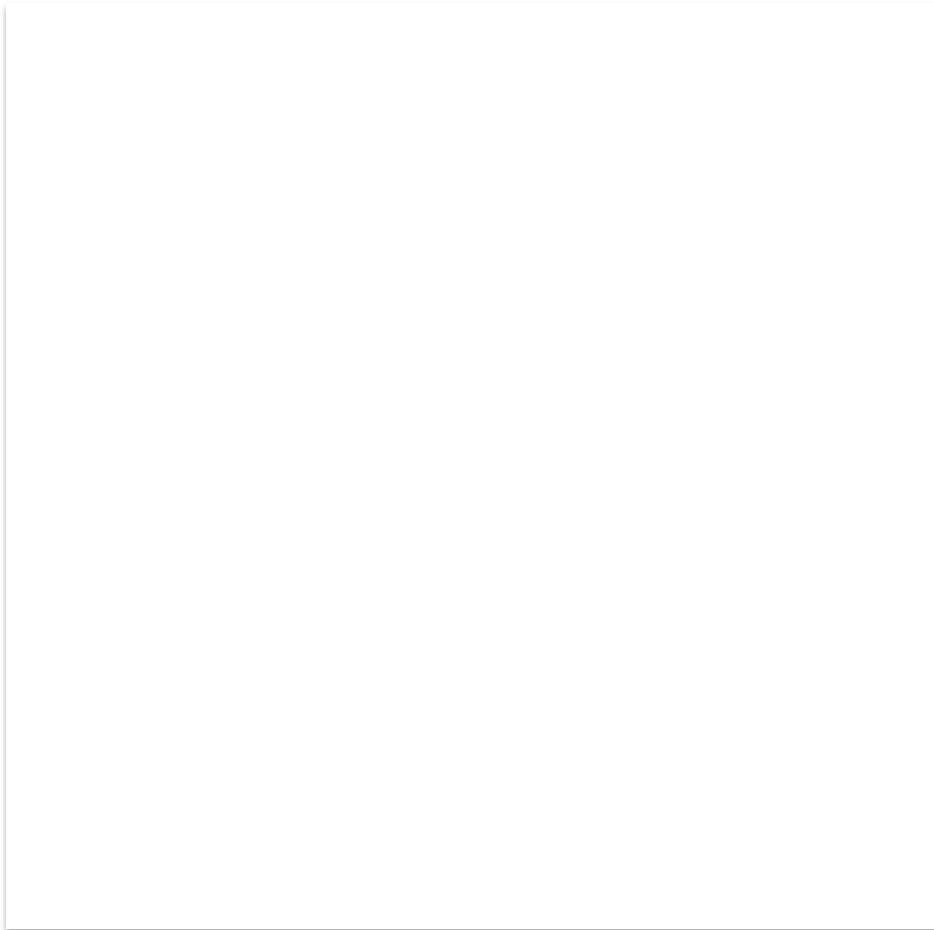
Erfordert:

- Strukturierungsfähigkeit
- ggf. Rechenfähigkeiten
- verlässliche Konventionen
- bekanntes Material
- Kenntnis dieser Materialien und Konventionen

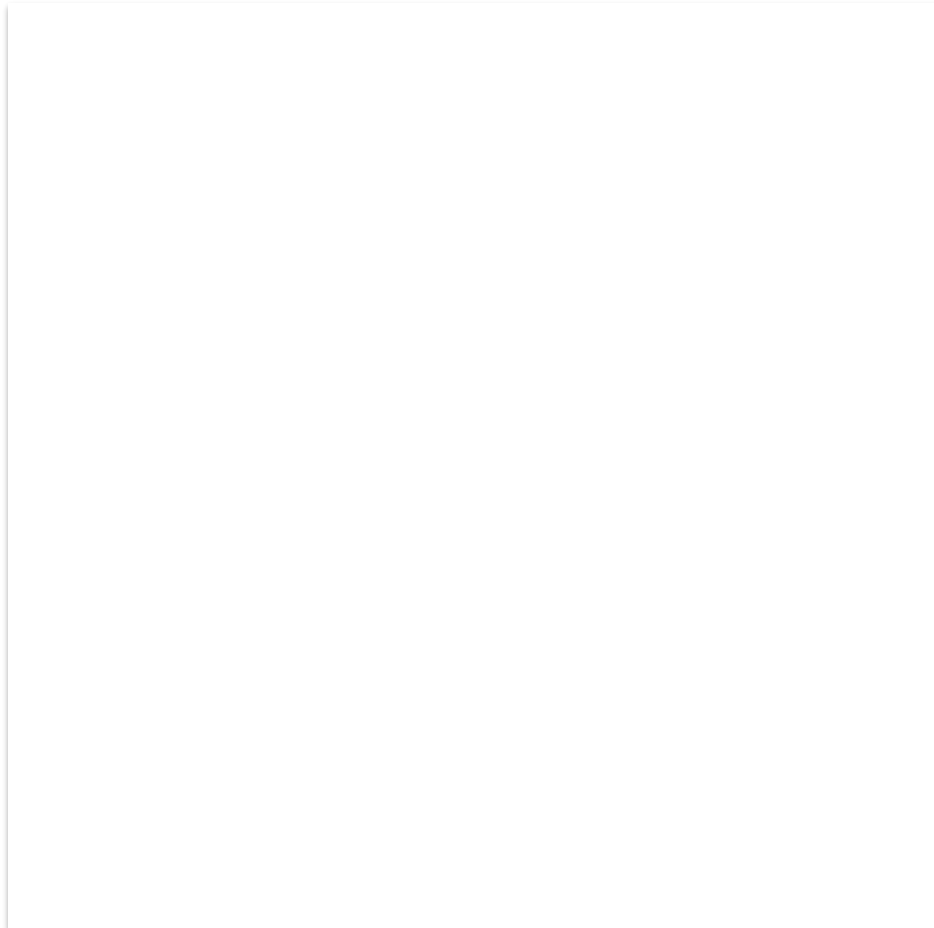


<http://www.reitberger-berlin.de/uvzglossar/punktebild01.html> (aktuell nicht zugänglich)

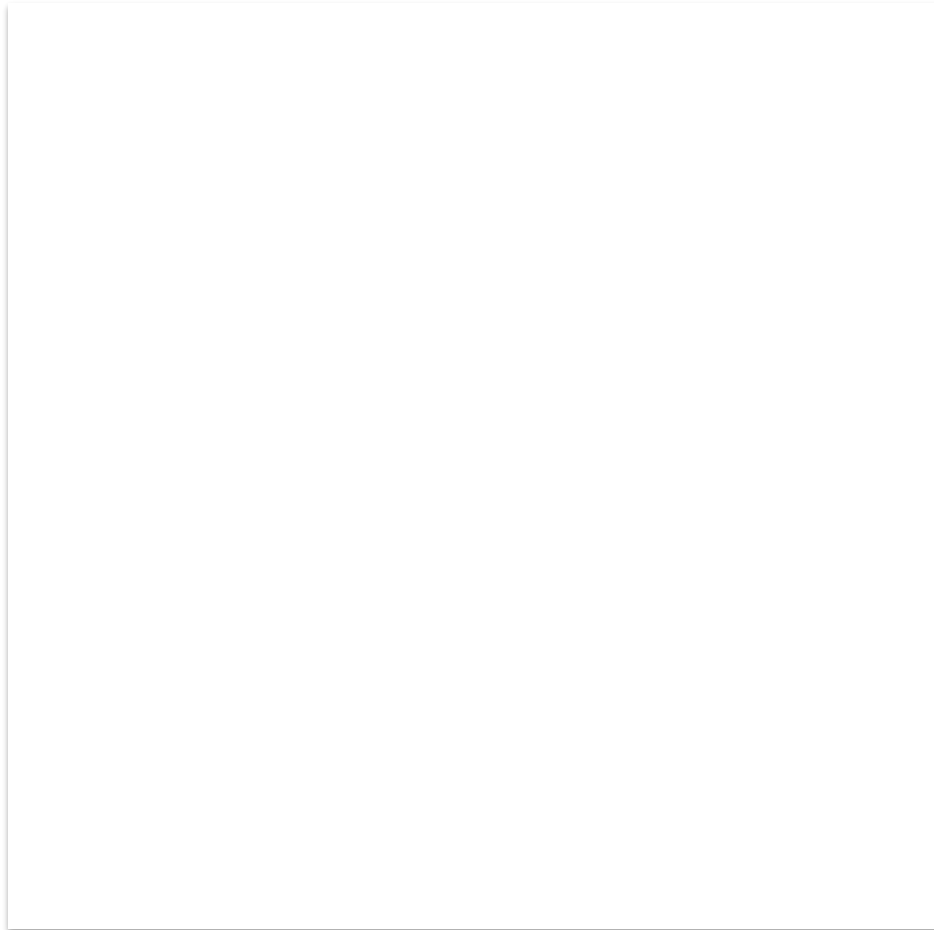
Quasisimultane Anzahlerfassung (IV)



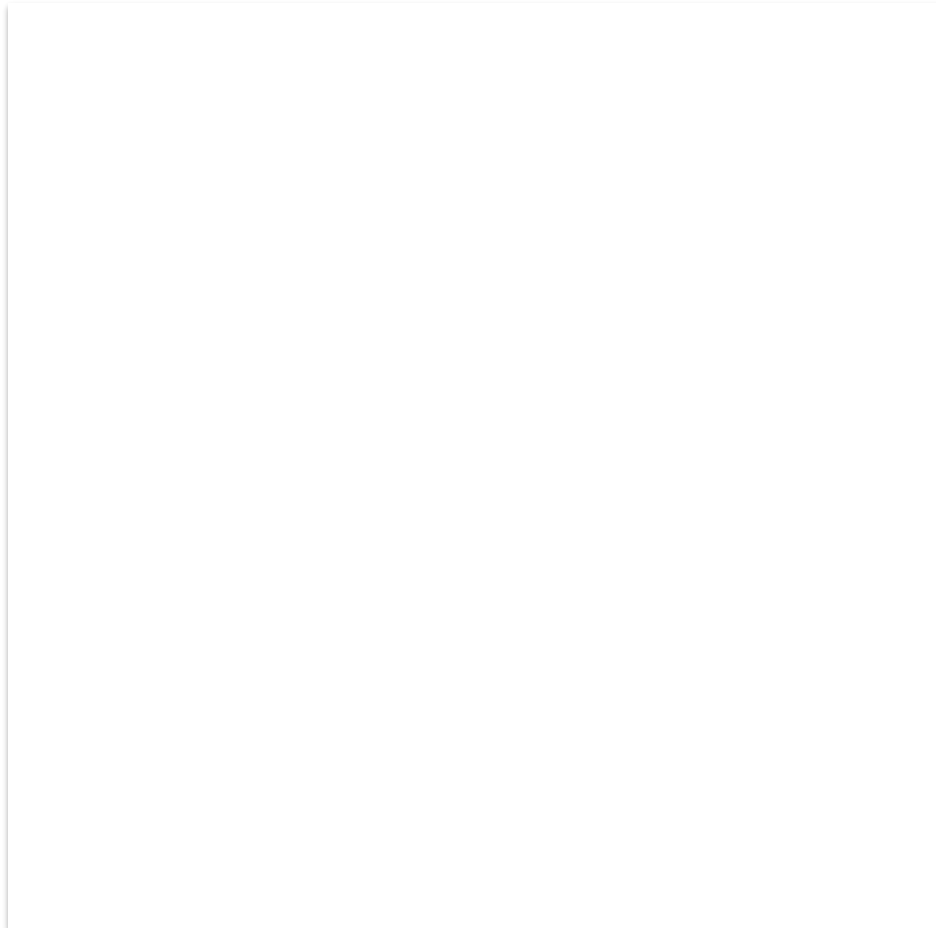
Quasisimultane Anzahlerfassung (V)



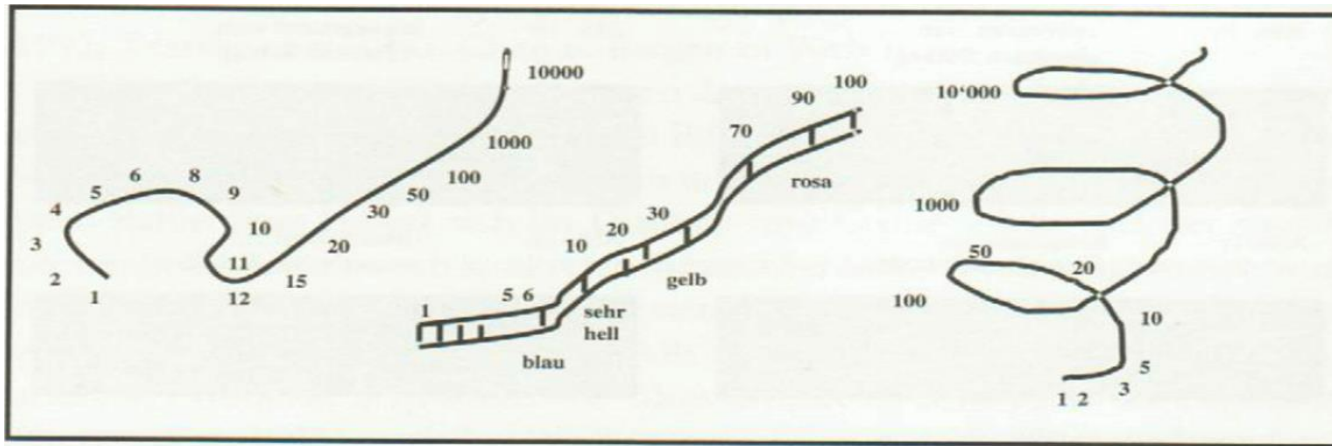
Quasisimultane Anzahlerfassung (VI)



Quasisimultane Anzahlerfassung (VII)



Ordinale Zahlenrepräsentationen



Dehaene, S., 1999, S. 101

Neben der Wahrnehmung von Anzahlen spielt die räumliche Speicherung der ordinalen Zahlvorstellung als mentale Zahlengerade eine bedeutsame Rolle für das gespeicherte Zahlenwissen (für Zahlvergleiche, Überschlagsrechnungen etc.).

Markant ist dabei eine häufig lineare Anordnung von links nach rechts sowie eine Stauchung der Zahlengerade bei größer werdenden Zahlen.

Bei einigen Personen ist diese Zahlvorstellung mit Farbwahrnehmungen gekoppelt.

Distanzeffekt: $<$ oder $>$ 65

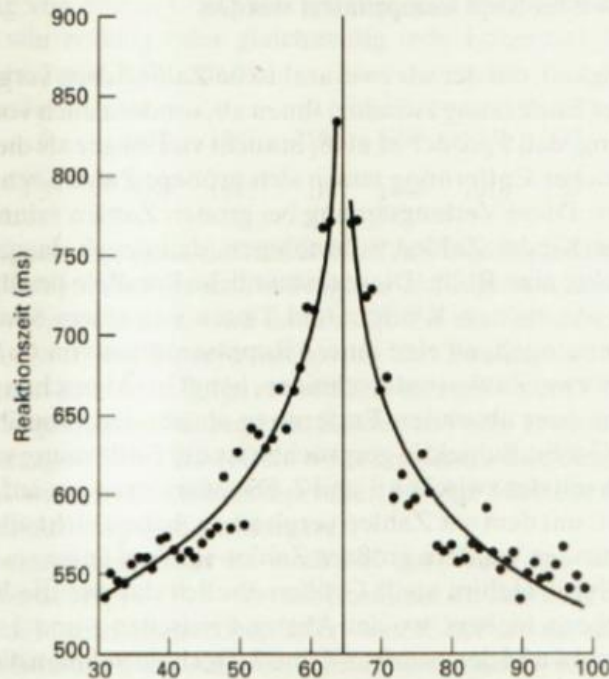


Abbildung 3.4: Wie lang dauert der Vergleich von zwei Zahlen? 35 Erwachsene klassifizierten zweistellige arabische Zahlen zwischen 31 und 99 danach, ob sie kleiner oder größer sind als 65, während ihre Reaktionszeit auf eine Millisekunde genau gemessen wurde. Jeder schwarze Punkt zeigt die durchschnittliche Reaktionszeit auf eine gegebene Zahl. Die Reaktionen werden immer langsamer, wenn die Vergleichszahl der Zahl 65 näherkommt: Das ist der Distanzeffekt. (Daten aus Dehaene u. a., 1990.)

Je dichter die Vergleichszahl an der 65 liegt, desto länger ist die Reaktionszeit, die für den Zahlvergleich benötigt wird.

31 _ 65 wird also schneller richtig beantwortet als 63 _ 65.

Größeneffekt:

Bei variablen Zahlvergleichen steigt die Reaktionszeit bei gleicher Distanz zwischen den Zahlen mit der Größe der Zahlen. 4 _ 7 wird also schneller und häufiger richtig beantwortet als 84 _ 87.

Fazit

- im Kern angeborene kardinale Fähigkeiten zur Unterscheidung konkreter Mengen
 - Bei Tieren keine diskreten Zahlen über (approximative) Numerosität hinaus, keine abstrakten Rechenfähigkeiten
 - Anzahlen schätzen und vergleichen: abhängig von der Größe der Anzahlen bzw. dem relativen Unterschied; bedingt trainierbar
 - Simultane Wahrnehmung von Anzahlen; Aufbau quasi-simultane Wahrnehmung von Anzahlen durch erlernte Konventionen
- Aufbau einer abstrakt-symbolischen ordinalen Zahlenrepräsentation
 - Ursprung: intuitive räumliche Anordnung (logarithmisch)
 - sprachliche und visuelle Zahlensprachen bzw. Notationssysteme als Bauelemente / Werkzeuge
 - Kulturelle Prägung der ordinalen Zahlenrepräsentation

Kulturhistorische Betrachtung

Wie fing alles an?

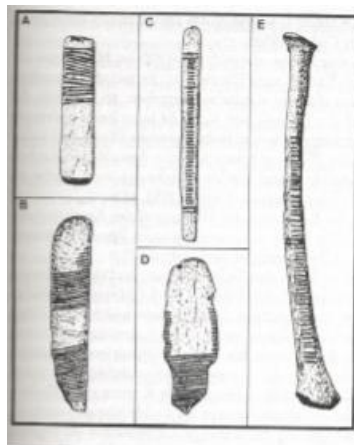
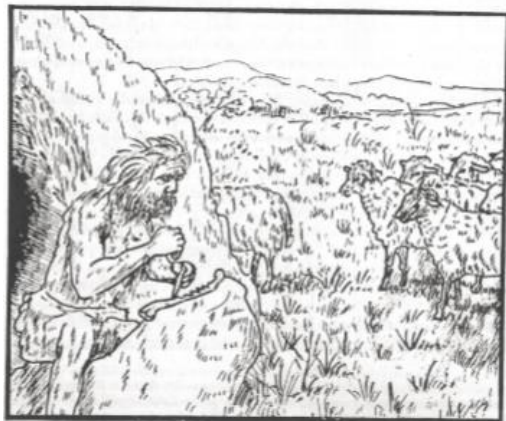


Strichlisten: ca. 40.000 Jahre v. Chr.

Zählsteine: ca. 10.000 v. Chr.

Tontafeln: ca. 4.000 v. Chr.

Anzahlen festhalten (I)



30.000 v. Chr.

bis

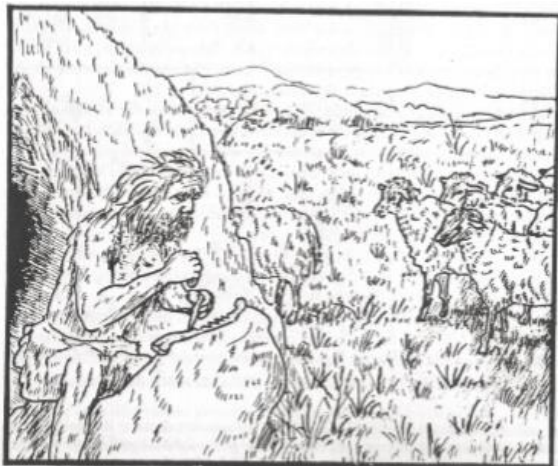
12.000 v. Chr.

13. Jh.
(England)

Strichlisten als Grundlage – Addition
als Grundoperation

(konstruktive Definition der nat. Zahlen)

Anzahlen festhalten - Kontrollfunktion



Strichlisten sind eine dauerhafte und diskrete Repräsentation der ermittelten Anzahl und ermöglichen so Vergleiche und spätere Kontrollen ohne Zahlwort.

Ähnlich wurden auch „Zählsteine“ eingesetzt – spätere Kontrollen sind noch unmittelbarer nachvollziehbar:

Abzählen → Hinlegen
Nachzählen → Wegnehmen

Grundidee: Vergleich der Kardinalität (Schafe – Kerben/Steine)

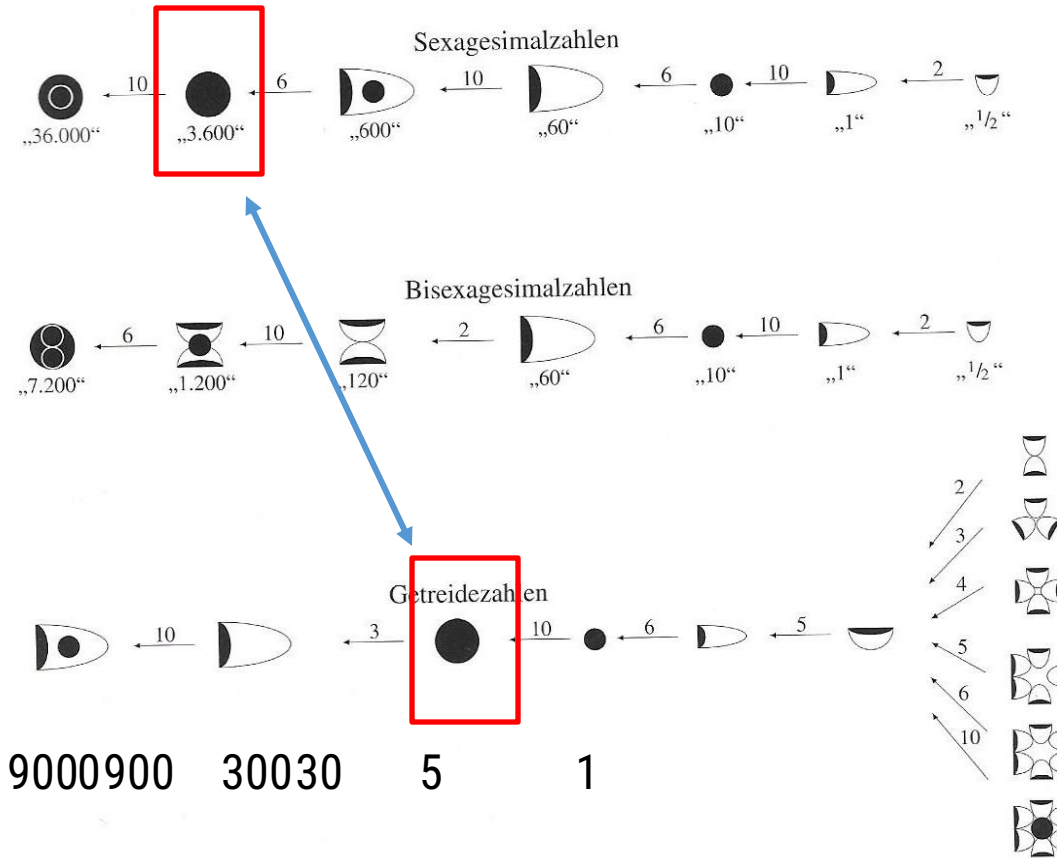
Jedem Schaf (Objekt) wird eineindeutig einem Stein/Strich zugeordnet!
Bei der Kontrolle muss lediglich eine neue eineindeutige Zuordnung (bijektive Abbildung) gefunden werden – nicht genau dieselbe.

Archaische Arithmetik (I)



Damerow/Schmidt, 2004

Archaische Arithmetik (II)



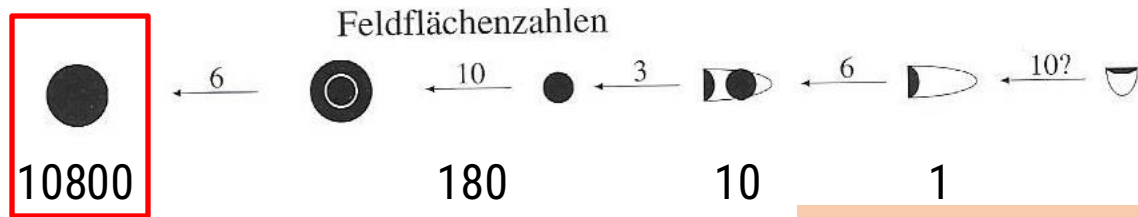
diskrete Objekte
(Menschen, Tiere)

rationierte Objekte
(Käse- und Getreiderationen)

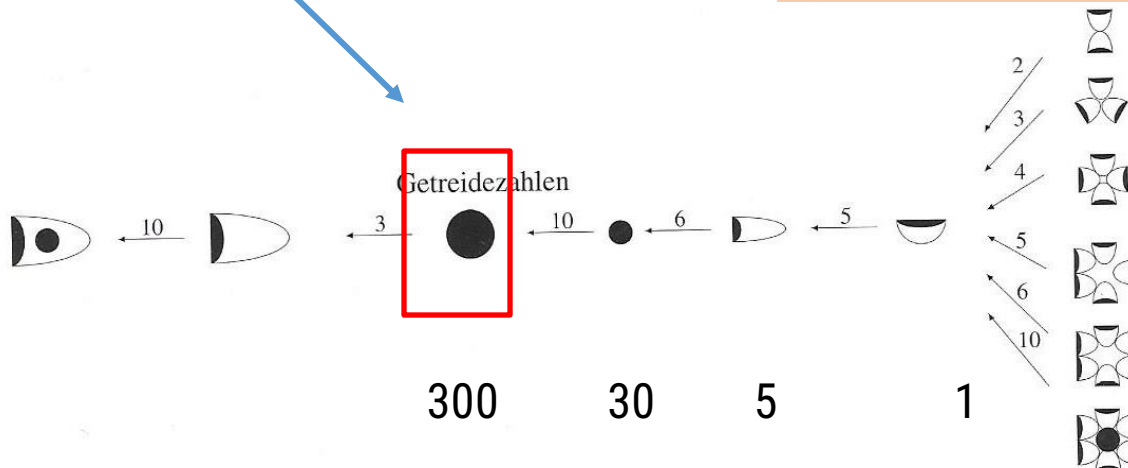
Hohlmaße für Getreide

Damerow/Schmidt, 2004

Archaische Arithmetik (III)



- „Tauschregeln“ haben ihre Ursprünge in konkreten (standardisierten) Tauschaktionen.
- Zahlzeichen sind nur im Zusammenhang mit Objektklassen eindeutig.



Archaische Arithmetik (IV)

- Zahlzeichen wurden für komplexere Wirtschaftssysteme von Bedeutung
 - Entwicklung parallel zur Schrift (ca. 3200 v. Chr.)
- Kontextgebundenheit der Zahlzeichen
 - verschiedene Zahlzeichen für verschiedene Gegenstände/ Objektklassen
 - konkurrierende Zahlssysteme (Sexagisimalsysteme, Bisexagisimalsysteme, gemischte Systeme)
- Zahlzeichen als Zwischenschritt zum abstrakten Konstrukt „Zahl“
 - symbolische Repräsentation einer Anzahl
 - „arithmetische Bedeutung“

Primäre Arithmetik (I)

- zwei Zahlzeichen



Damerow/Schmidt, 2004

- 59 Grundzahlen



<http://www.spasslernen.de/geschichte/ges4.htm>

Babylonische Keilschrift (ca. 2000 v. Chr.): Stellenwertsystem mit Basis 60

„Ziffern“ der Keilschrift

𐎶 1	𐎶𐎶 11	𐎶𐎶𐎶 21	𐎶𐎶𐎶𐎶 31	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 41	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 51
𐎷 2	𐎶𐎷 12	𐎶𐎶𐎷 22	𐎶𐎶𐎶𐎷 32	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎷 42	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎷 52
𐎸 3	𐎶𐎸 13	𐎶𐎶𐎸 23	𐎶𐎶𐎶𐎸 33	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎸 43	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎸 53
𐎹 4	𐎶𐎹 14	𐎶𐎶𐎹 24	𐎶𐎶𐎶𐎹 34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎹 44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎹 54
𐎺 5	𐎶𐎺 15	𐎶𐎶𐎺 25	𐎶𐎶𐎶𐎺 35	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎺 45	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎺 55
𐎻 6	𐎶𐎻 16	𐎶𐎶𐎻 26	𐎶𐎶𐎶𐎻 36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎻 46	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎻 56
𐎼 7	𐎶𐎼 17	𐎶𐎶𐎼 27	𐎶𐎶𐎶𐎼 37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎼 47	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎼 57
𐎽 8	𐎶𐎽 18	𐎶𐎶𐎽 28	𐎶𐎶𐎶𐎽 38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎽 48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎽 58
𐎾 9	𐎶𐎾 19	𐎶𐎶𐎾 29	𐎶𐎶𐎶𐎾 39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎾 49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎾 59
𐎿 10	𐎶𐎿 20	𐎶𐎶𐎿 30	𐎶𐎶𐎶𐎿 40	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎿 50	

Arithmetik der Spielsteine

(5. Jh. v. Chr.)

- Spiel mit „Rechensteinen“ (Calculi) als Grundlage für Gesetzmäßigkeiten und Zahleneigenschaften
- Darstellung von Zahlen in Punktbildern und Mustern
- geometrische Grundformen zur Orientierung: figurierte Zahlen (Zahlenfolgen)
- Beweise durch Operieren mit Rechensteinen

Abstrakter Zahlbegriff

- Rechensteine als Denkmittel (figurierte Zahlen)
- Zahl als „Zusammensetzung von Einheiten“
- ① Begriffsbildung „gerade und ungerade“
 - (Anordnung in Doppelreihen)



$2k$



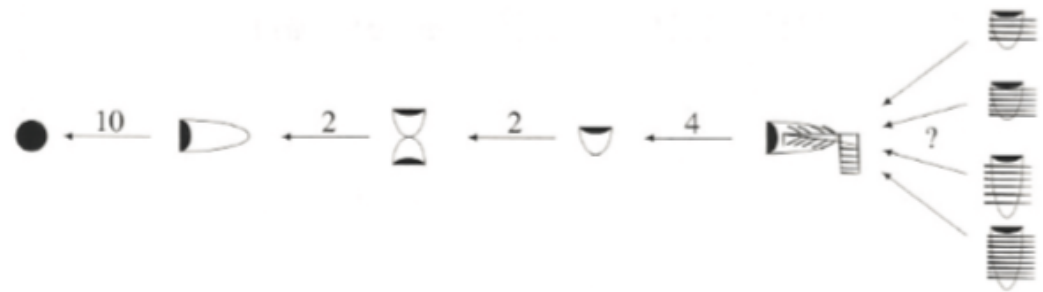
$2k+1$

- ② Teilbarkeit: „Punktbild“ versus „ausmessen“



Entwicklungsstufen der Arithmetik

- archaische Arithmetik (3200 v. Chr.): kontextgebundene Zahlzeichen, arithmetische Techniken






- primäre (explizite) Arithmetik (3000 v. Chr.): kontextunabhängige Zahlenzeichen, noch kein ideeller Zahlbegriff



- abstrakter Zahlbegriff (550 v. Chr.): Arithmetik der Spielsteine, ideeller Zahlbegriff (Zahldefinition, Zahleigenschaften)



Entwicklung des Zahlbegriffs

Beispiele	Stufen der Zahlbegriffsentwicklung	Zeitliche Einordnung
	Präoperative Stufe: Erste Zuordnungen von gleichartigen, relativ abstrakten Symbolen zu Objekten, jedoch keine systematischen Strukturierungen.	etwa 40 000 bis 10 000 vor Christus Jungpaläolithikum
	Protoarithmetische Stufe: Kontrolle von Quantitäten mit Hilfe eindeutiger Zuordnungen zwischen Objekten und Symbolen. Tradierung standardisierter Symbolsysteme. Einführung höherer Einheiten durch Bündelung.	ab etwa 10 000 vor Christus Vorschriftliche seßhafte Kulturen
	Archaische Arithmetik: Entwickelte arithmetische Techniken, jedoch noch keine kontextunabhängige Bedeutung der „Zahlzeichen“.	um 3 200 vor Christus Nachschriftliche seßhafte Kulturen
	Primäre Arithmetik: Universelle Zahldarstellung, explizite Arithmetik, jedoch kein darstellungsunabhängiger Zahlbegriff. Keine auf Zahlen als ideelle Objekte bezogenen Begriffsbildungen.	ab etwa 3 000 vor Christus Frühe Hochkulturen
	Abstrakter Zahlbegriff: Begriffliche Bestimmung der Zahlen als ideelle Objekte. Definition von Zahlen und Beweis von Zahleigenschaften.	ab etwa 500 vor Christus Griechische Antike

**Vielen Dank für Ihr Interesse
und Ihre Aufmerksamkeit!**

Literaturverzeichnis (I)

- Damerow, P.; u.a. (1988). Die ersten Zahldarstellungen und die Entwicklung des Zahlbegriffs. *Spektrum der Wissenschaft*, (3), S. 46-55.
- Damerow, P. & Schmidt, S. (2004). Arithmetik im historischen Prozess: Wie „natürlich“ sind die „natürlichen Zahlen“? In: P. G. Müller, H. Steinbring & E. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 131-182). Seelze: Kallmeyer.
- Ifrah, G. (2010). *Universalgeschichte der Zahlen*. Frankfurt, M: Tolkemitt bei Zweitausendeins.
- Everett, D. (2010). Das glücklichste Volk. Sieben Jahre bei den Pirahã-Indianern am Amazonas. München: Pantheon
- Ball, J. (2006). *Die verrückte Welt der Zahlen*. Starnberg: Dorling Kindersley
- Krall, K. (1912). Denkende Tiere. Beiträge zur Tierseelenkunde auf Grund eigener Versuche [Web-Dokument]. Zugriff am 28.09.2019. Verfügbar unter <https://archive.org/details/denkendetierebei00kral>
- Wynn, K. (1992): Addition and subtraction by human infants. *Natur*, Vol 358, S. 749-750. Verfügbar unter: https://www.researchgate.net/publication/21647991_Addition_and_Subtraction_by_Human_Infants

Literaturverzeichnis (II)

- Mack, W. (2002). Die Wahrnehmung kleiner Anzahlen und die Entwicklung des Zahlenverständnisses beim Kleinkind [PDF-Dokument]. Zugriff am 28.09.2019. Verfügbar unter https://www.unibw.de/hum-psychologie/ap/mack_texte/habilitext_mack.pdf
- Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser