

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2023/24

8. Übung: Fourier- und Laplacetransformation

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen. Es sei stets $a > 0$.

$$\text{a) } f_1(x) = \begin{cases} 1, & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{b) } f_2(x) = e^{-a|x|} \quad \text{c) } f_3(x) = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) - y''(t) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit Hilfe der Fouriertransformation. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Wenden Sie die Fouriertransformation auf beide Seiten der Gleichung an und finden sie eine explizite Formel für die Fouriertransformierte \hat{y} der Lösung y .
- Bestimmen Sie y aus \hat{y} unter Verwendung des Faltungssatzes und den Ergebnissen der vorherigen Aufgaben.

Hinweis: Eine direkte Berechnung der inversen Fouriertransformation zur Bestimmung von y ist nicht notwendig.

Aufgabe 3

- Stellen Sie folgende Funktion mit Hilfe der Heaviside-Funktion ohne Fallunterscheidung dar und bestimmen Sie ihre Laplacetransformierte:

$$f(t) = \begin{cases} t - 1, & 1 \leq t \leq 3, \\ 8 - 2t, & 3 \leq t \leq 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $(t - a)H(t - a)$, $a > 0$.

- Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Laplace-Transformierte $F(z)$ von $\sin(t)$ und $\cos(t)$ definiert und wie lautet sie?

Hinweis: Erinnern Sie sich an $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

- Was passiert mit der Laplace-Transformierten, wenn wir im Originalbereich eine positive Verschiebung um $a > 0$ haben? D.h., wie verhält sich $\mathcal{L}f(t + a)$ zu $\mathcal{L}f(t)$ für $a > 0$?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie Lösung folgender Anfangswertprobleme mittels der Laplace-Transformation:

$$\text{(a) } y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, \quad \text{(b) } y'' + y' = e^{-2t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$