ZLB
Zentrum für Lehrerbildung

Didaktik der Arithmetik

- Vorlesung Vertiefungsmodul LAGS-GSD-MA-VM1

Zahlen im Spiralcurriculum

Grundschuldidaktik Mathematik
Prof. Dr. phil. Birgit Brandt
Wintersemester 2024/25

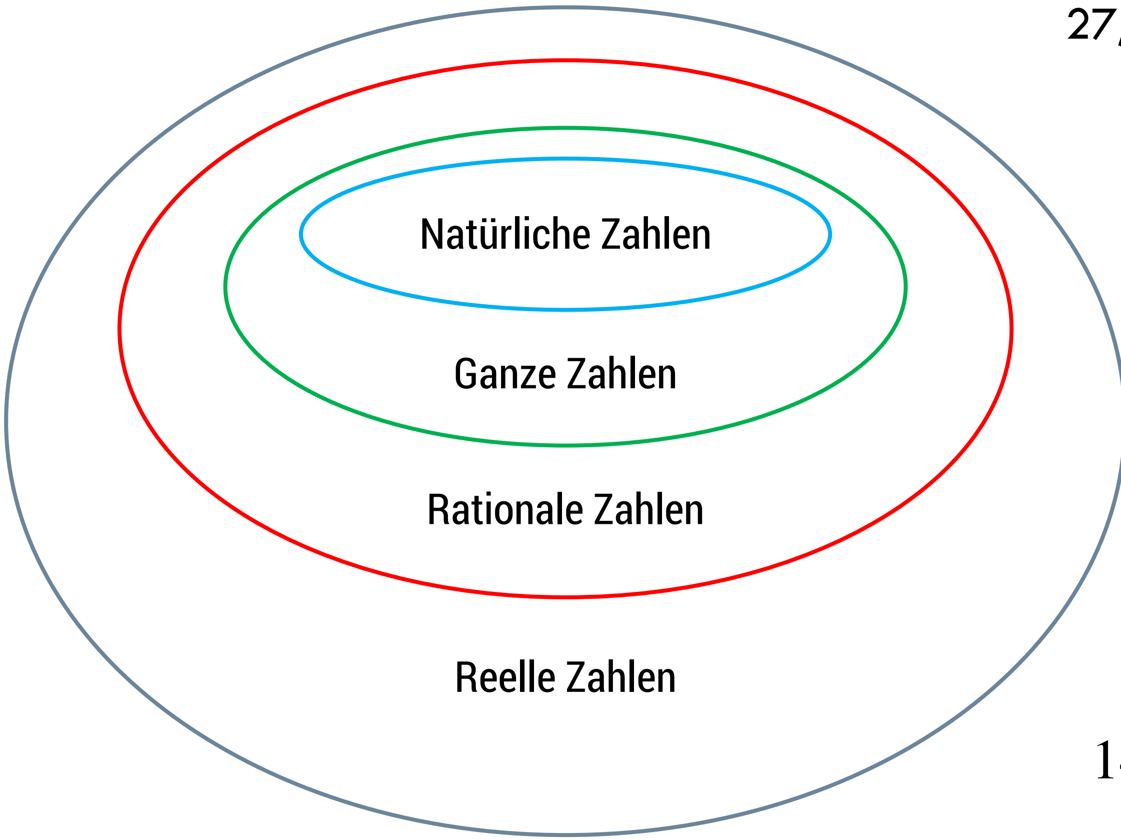
Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Zahlen unter Anwendung der Struktur des Zehnersystems dar (Prinzip der Bündelung, Stellenwertschreibweise)
- untersuchen und erläutern die strukturellen Beziehungen zwischen verschiedenen Zahldarstellungen an Beispielen
- nutzen Strukturen in Zahldarstellungen zur Anzahlerfassung im (erweiterten) Zahlenraum
- orientieren sich im Zahlenraum durch Zählen in Schritten sowie durch Ordnen und Vergleichen von Zahlen nach vielfältigen Merkmalen
- entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen mit eigenen Worten/unter Verwendung von Fachbegriffen
  (z. B. ist Vorgänger/Nachfolger von, ist um 3 größer, ist die Hälfte/das Doppelte von, das Tausendfache)

Einbettung der natürlichen Zahlen

Die Zahlbereiche (Klasse 1 – 10)



$27{,}137$ $1{,}34\overline{921}$ $0{,}\overline{2183}$

$0{,}10100100010000....$

1011_2 $\sqrt{2}$ $\frac{15}{3}$

4801

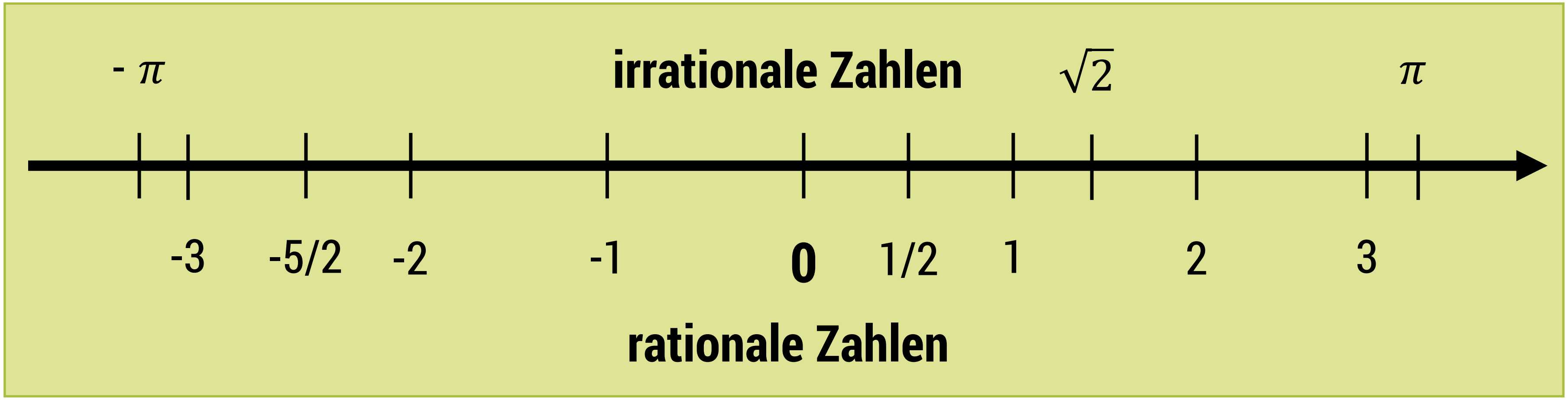
$\sqrt{298}$

$-4\frac{3}{5}$ -921

π^2

146×10^{-6} $\frac{5}{17}$

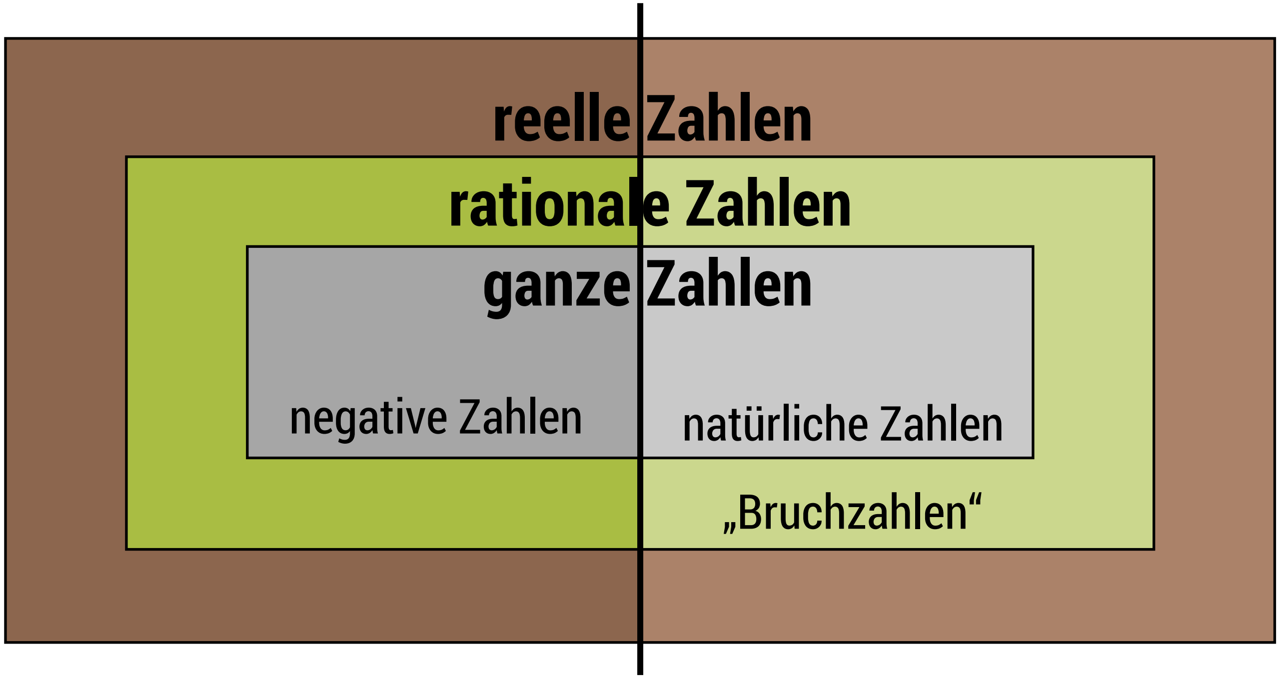
Darstellung an der Zahlengeraden



Orientierung
Vorgänger und Nachfolger
Zahl und Gegenzahl
Betrag einer Zahl
Vollständigkeit der Zahlengeraden

Curriculare Reihenfolge

- traditionell negative Zahlen als Unterrichtsgegenstand für das Gymnasium
- Beschränkung der Erweiterung auf positive rationale Zahlen („Bruchzahlen")
- natürliche Zahlen – „Bruchzahlen" – rationale Zahlen – reelle Zahlen



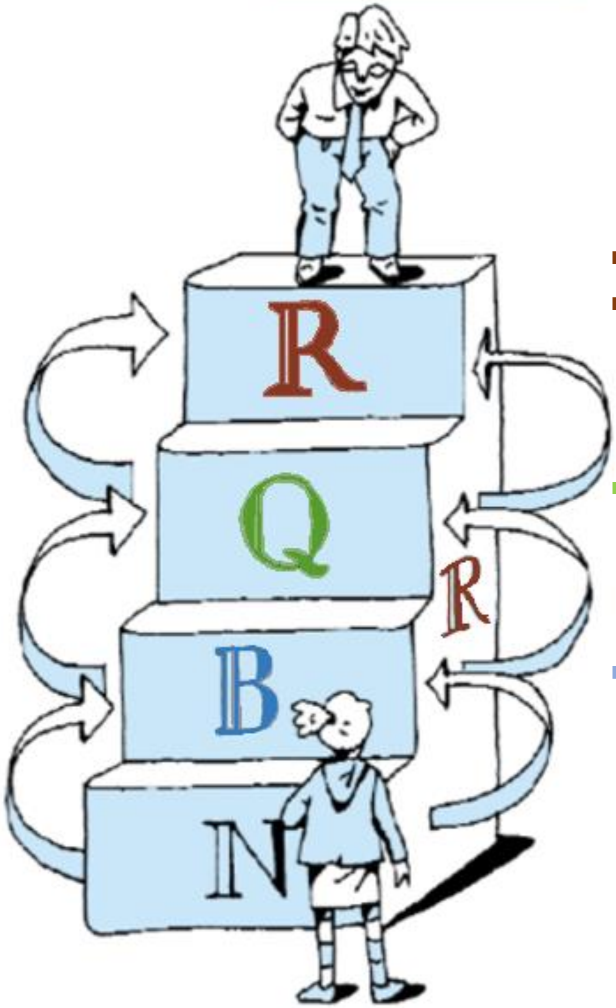
Curriculare Reihenfolge (2)

Beschreiben

- Alle theoretisch zugänglichen (auch inkommensurable) Längenverhältnisse
- Lückenlosigkeit der Zahlengeraden

- Beschreibung von Größen relativ zu ihrer willkürlich gewählten Vergleichsmarke (z.B. Wasserstände)

- Beschreibung von Anteilen, genaueres Messen



Operieren

- Gleichungen wie $x^2=2$ lösen
- Ausdrücken allgemeiner Lösungsformeln

- Lösen aller Gleichungen der Form ax + b = c

- Lösen aller Divisionsaufgaben und Gleichungen der Form Form ax = b

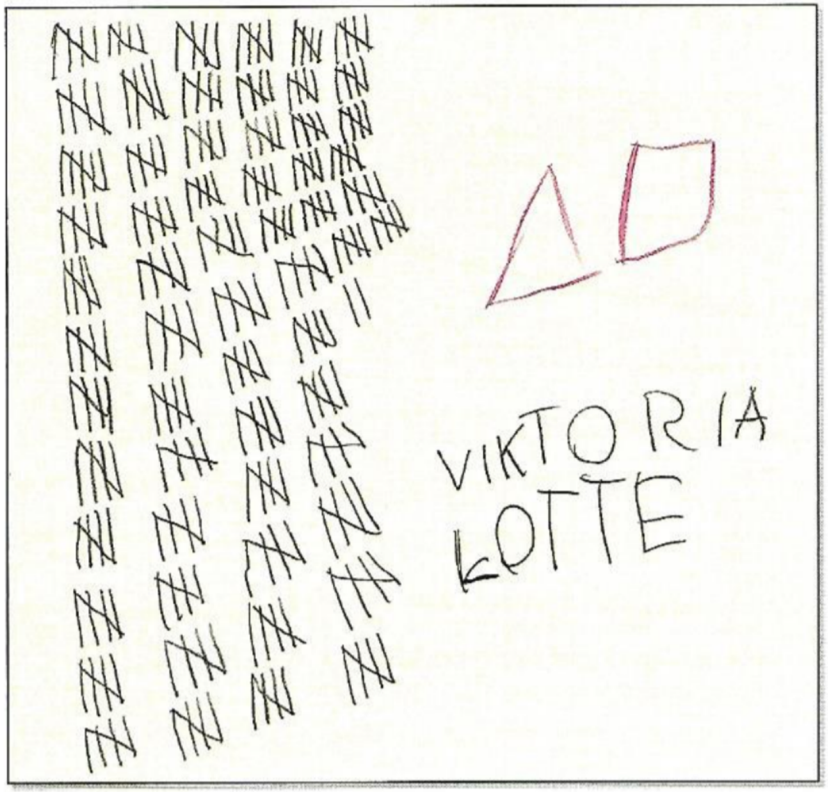
Zielorientierung

Zahlenräume

- **Klasse 1**
  Zahlenraum bis 20
- **Klasse 2**
  Zahlenraum bis 100
- **Klasse 3**
  Zahlenraum bis 1 000
- **Klasse 4**
  Zahlenraum bis 1 000 000

Arbeitsräume
- Systematische Erarbeitung
- Grundrechenarten

… nicht als Beschränkung



5 Bereits Schulanfänger sind von großen Anzahlen fasziniert …

Themenheft Zahlenräume, Grundschulzeitschrift Mathematik

http://www.schulimpulse.de/zahlenmauern-und-zahlentuerme-im-anfangsunterricht/

... und andere Zahlbereiche

Negative Zahlen als Option – nicht als „Stoff" für alle!

13.

$4 + 5 =$ ___
$5 - 4 =$ ___
$4 - 5 =$ ___
$5 + 4 =$ ___

Nutzbar als Rechenstrategie!

$64 - 37 = 27$

$60 - 30 = 30$
$4 - 7 = \bar{3}$

$4 + 5 =$ ___
$14 + 5 =$ ___
$4 + 15 =$ ___

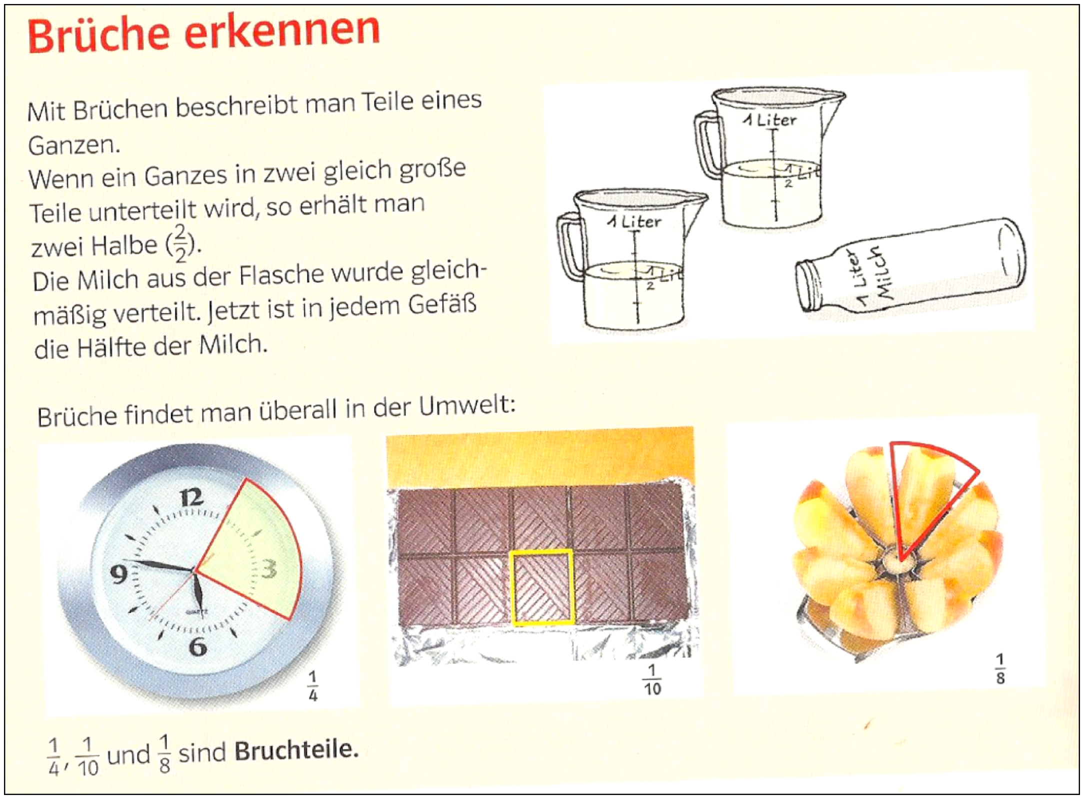
$10 - 7 =$ ___
$20 - 7 =$ ___
$20 - 11 =$ ___

$17 - 12 =$ ___
$7 - 2 =$ ___
$17 - 2 =$ ___

$14 - 5 =$ ___
$4 - 5 =$ ___
$14 - 15 =$ ___

Schulbuchbeispiele: Mathematikus 1, S. 53, 71
Rechnung: http://kira.dzlm.de/062#3,2

Brüche im Alltag



Brüche erkennen

Mit Brüchen beschreibt man Teile eines Ganzen.
Wenn ein Ganzes in zwei gleich große Teile unterteilt wird, so erhält man zwei Halbe ($\frac{2}{2}$).
Die Milch aus der Flasche wurde gleichmäßig verteilt. Jetzt ist in jedem Gefäß die Hälfte der Milch.

Brüche findet man überall in der Umwelt:

$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{8}$ sind **Bruchteile.**

In der Grundschule sollten Kinder geläufige Brüche in Sachkontexten kennen lernen. Der Maßzahlaspekt spielt dabei eine wesentliche Rolle.
Die Thematisierung der Rechenoperationen für den Maßzahlaspekt ist Grundlage für eine gute Anschlussfähigkeit bei der Einführung in die Bruchrechnung.

denkstark 5

Bruchzahlaspekte: Maßzahl, Skalenwert

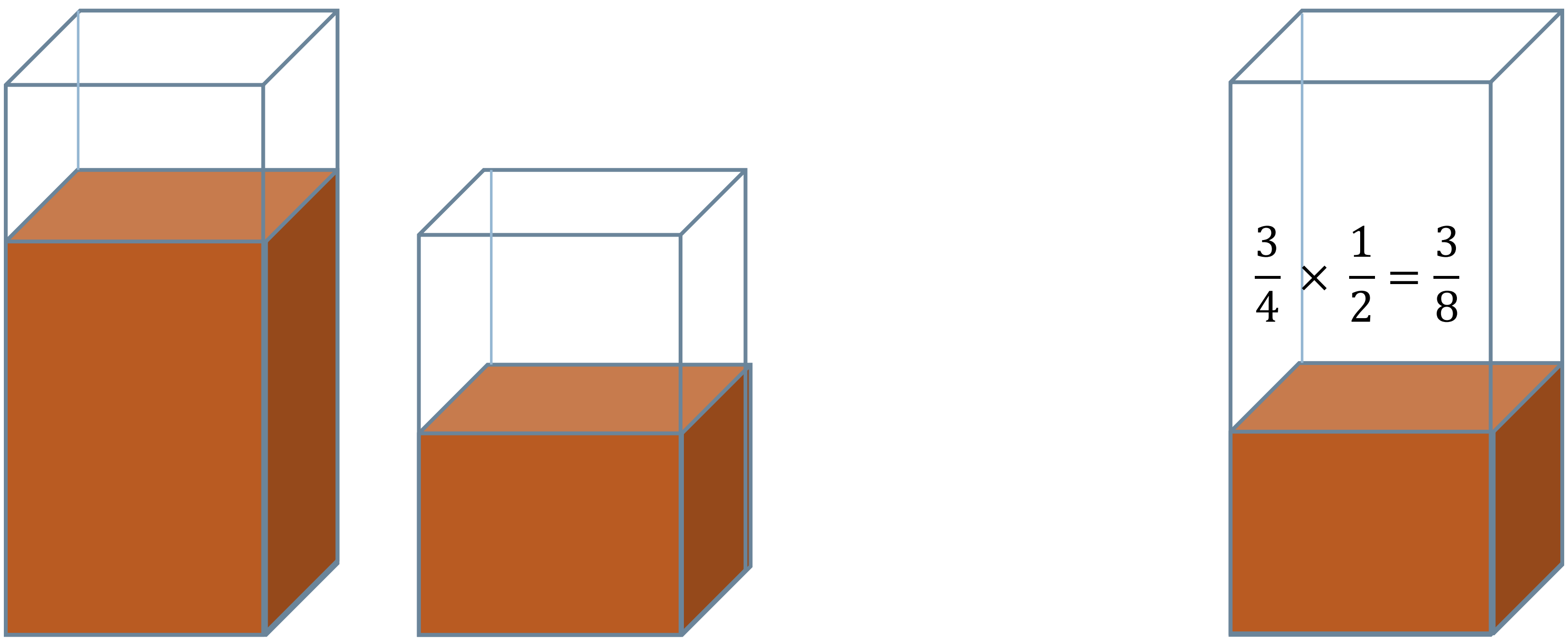
- Brüche als Bezeichnung von konkreten Größen:
  ½ Stunde, ¾ kg
- Brüche als genauere Bezeichnung
  von Stellen auf einer Skala:
  z.B. Tankskala im Auto

Padberg, F., 2009
https://www.moparshop.de/media/image/f9/46/36/art_6575_600x600.jpg
https://cdn.webshopapp.com/shops/258021/files/235855775/1200x1200x2/messbecher-3l.jpg

Bruchzahlaspekte: **Operatoraspekt**

Brüche zur knappen Beschreibung von Anwendungen multiplikativer Handlungsanweisungen auf Größen

„Nimm die Hälfte von 3/4 Liter Milch!“



$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Padberg, F., 2009, S. 29 f.

Praktische Umsetzung Zahlraumerweiterung

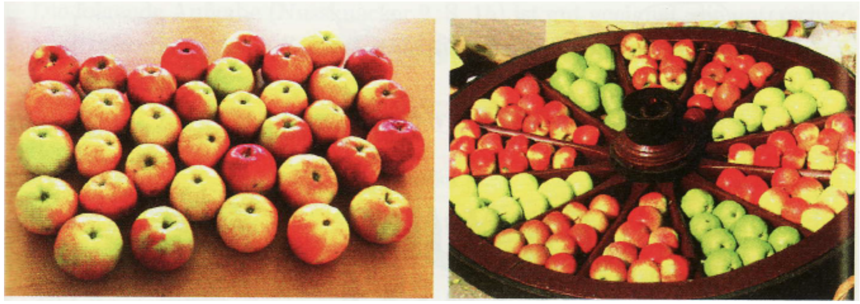
To-Do-Liste: Zahlenräume

- Bündeln/Bündelungsprinzip
- Stellenwertprinzip
- unterschiedliche Darstellungsformen
- Zahlvorstellung
- Orientierung im Zahlenraum
- schätzen, überschlagen, runden

Zahlenraum bis 100

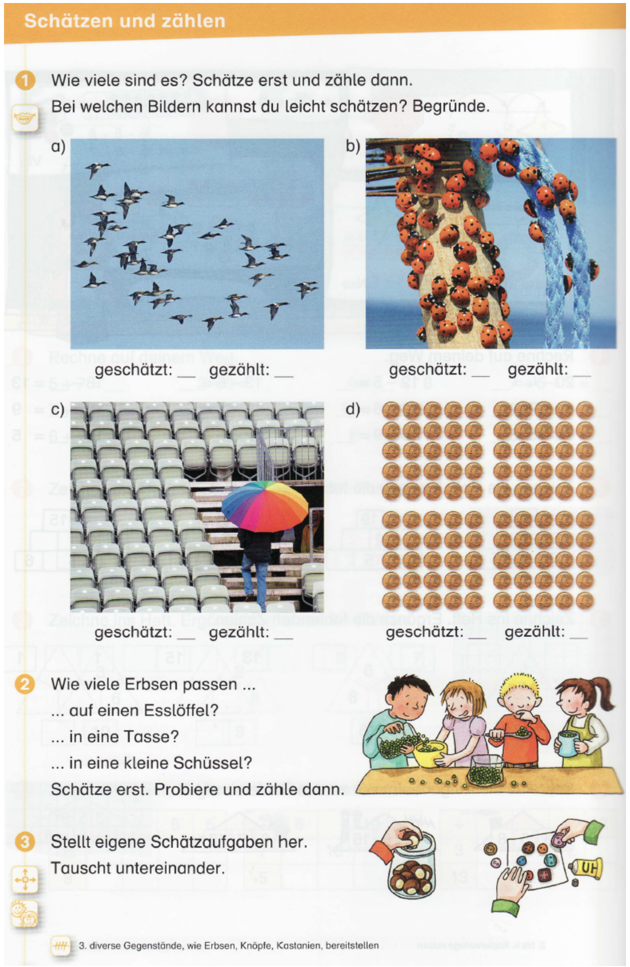
Einstieg in die systematische Thematisierung

- Auseinandersetzung mit größeren unstrukturierten Mengen
- Schätzen und Zählen
- Strukturieren und Bündeln,
  zunächst in beliebig große Bündel
- Zehnerbündel



Padberg, F. & Benz, C., 2011, S. 59

Zahlenraum bis 100



Schätzen und zählen

1 Wie viele sind es? Schätze erst und zähle dann.
Bei welchen Bildern kannst du leicht schätzen? Begründe.

a) geschätzt: __ gezählt: __
b) geschätzt: __ gezählt: __
c) geschätzt: __ gezählt: __
d) geschätzt: __ gezählt: __

2 Wie viele Erbsen passen ...
... auf einen Esslöffel?
... in eine Tasse?
... in eine kleine Schüssel?
Schätze erst. Probiere und zähle dann.

3 Stellt eigene Schätzaufgaben her.
Tauscht untereinander.

3. diverse Gegenstände, wie Erbsen, Knöpfe, Kastanien, bereitstellen

Bündeln und zählen

1 Wie viele Eier sind es?
Wie zählen die Kinder?

__ __ Anzahl aller Eier: __

2 Wie viele sind es?

a) 30 + 6 = 36
b) __ + __ = __
c) __ + __ = __

3 Wie viele Zehner und Einer sind es?

a)

Zehner	Einer

__ + __ = __

b)

Zehner	Einer

__ + __ = __

c)

Zehner	Einer

__ + __ = __

1. bis 3. Anzahlen durch Bündeln bestimmen; Begriffe „Zehner" und „Einer" anwenden

9

Duden Themenheft Zahlen und Rechnen 2

Zahlenraum bis 100

(Knappe) Darstellungsweisen

- Schreibweise mit Zehnern und Einern:
  4 Zehner 3 Einer bzw. kürzer *4Z 3E*

- Summenschreibweise
  40+3

- Zahlwortschreibweise
  dreiundvierzig

- Stellentafel *Z E*
  4 3

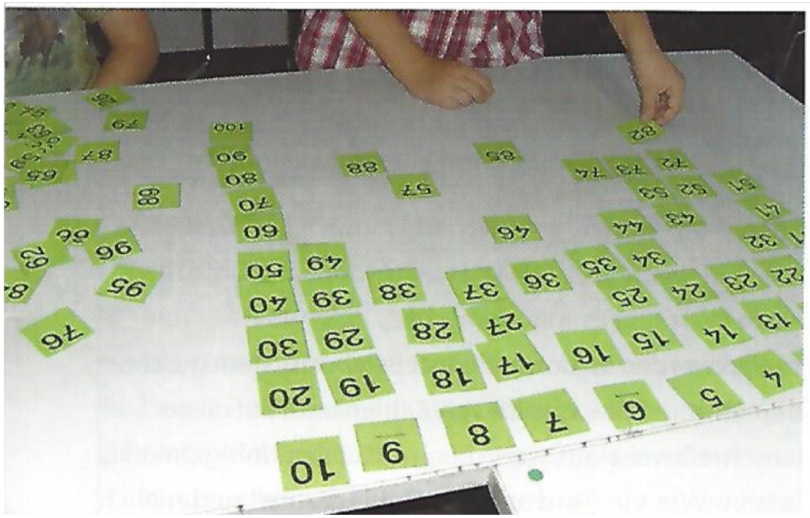
- Ziffernschreibweise *43* ← Stellenwertaspekt

Zahlenraum bis 100

Arbeit an/mit Material

- Rechengeld (Achtung: eigenes Lernfeld Geld)
- Rechenkette (Perlenmaterial)
- Rechenrahmen
- Systemblöcke
- Stellentafel
- Hundertertafel
- Hunderterpunktfeld
- Zahlenstrahl
- …

Die Hundertertafel



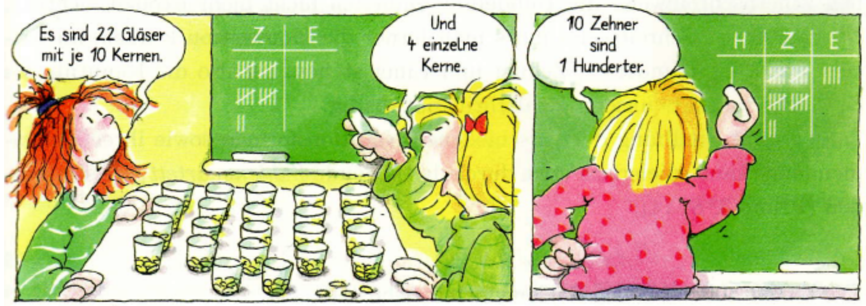
Themenheft Zahlenräume, Grundschulzeitschrift Mathematik

Zahlenraum bis 1000

Analoges Vorgehen

- Auseinandersetzung mit größeren unstrukturierten Mengen
- Schätzen und Zählen
- Strukturieren und Bündeln
- Strichlisten, Stellentafel
- Fortgesetztes Bündeln

Lotta und Jule haben auch Sonnenblumenkerne gesammelt und gezählt.
Wie viele sind es?



Duden 3, S. 15; Primo 3, S. 11

Zahlenraum bis 1000

Systematische Erarbeitung des Tausenderraumes

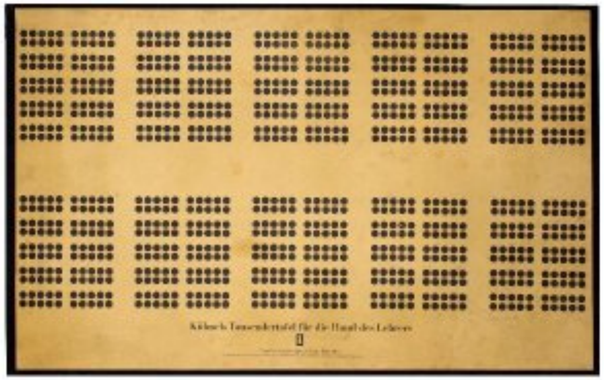
- Dezimales Stellenwertsystem (Bündeln und Stellenwertaspekt)
- Notationsformen und Darstellungsweisen
- Orientierung im Tausenderraum

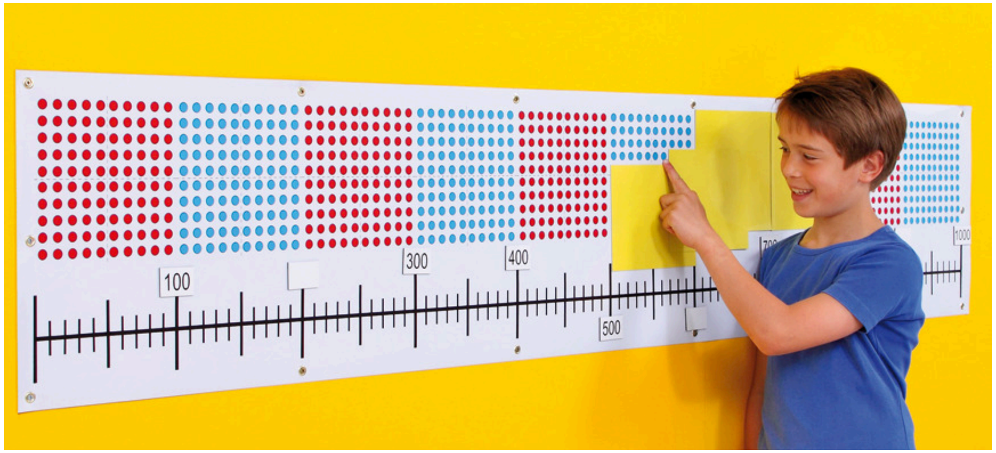
- **Wichtig: Arbeiten mit Material**

Zahlenraum bis 1000

Systematische Erarbeitung des Tausenderraumes

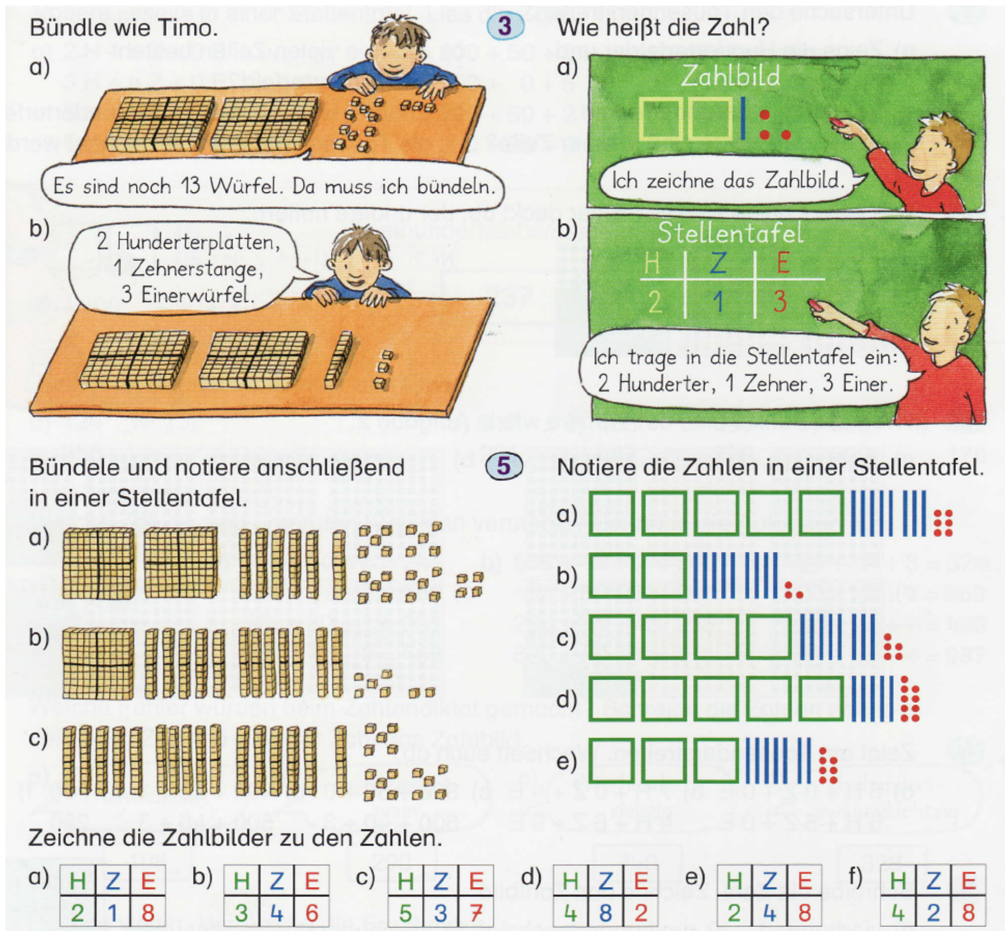
- Arbeiten mit Material
  - Tausenderblöcke
  - Tausenderfeld
  - Tausendertafel
  - Tausenderstrahl





https://elkverlag.ch/media/catalog/product/cache/1/thumbnail/800x800/17f82f742ffe127f42dca9de82fb58b1/3/8/3860_001.jpg
http://dokbase.digicult-museen.net/eingabe/bilder/data/mitte/913/2007SSM1920a.jpg
https://asset.klett.de/assets/70c2d862/Coverbild%25203-12-199030-6.317923_800.jpg

Zahlenraum bis 1000


Bündle wie Timo.
a)
Es sind noch 13 Würfel. Da muss ich bündeln.
b)
2 Hunderterplatten, 1 Zehnerstange, 3 Einerwürfel.

3 Wie heißt die Zahl?
a) Zahlbild
Ich zeichne das Zahlbild.
b) Stellentafel

H	Z	E
2	1	3

Ich trage in die Stellentafel ein: 2 Hunderter, 1 Zehner, 3 Einer.

Bündele und notiere anschließend in einer Stellentafel.
a)
b)
c)

5 Notiere die Zahlen in einer Stellentafel.
a)
b)
c)
d)
e)

Zeichne die Zahlbilder zu den Zahlen.

a)

H	Z	E
2	1	8

b)

H	Z	E
3	4	6

c)

H	Z	E
5	3	7

d)

H	Z	E
4	8	2

e)

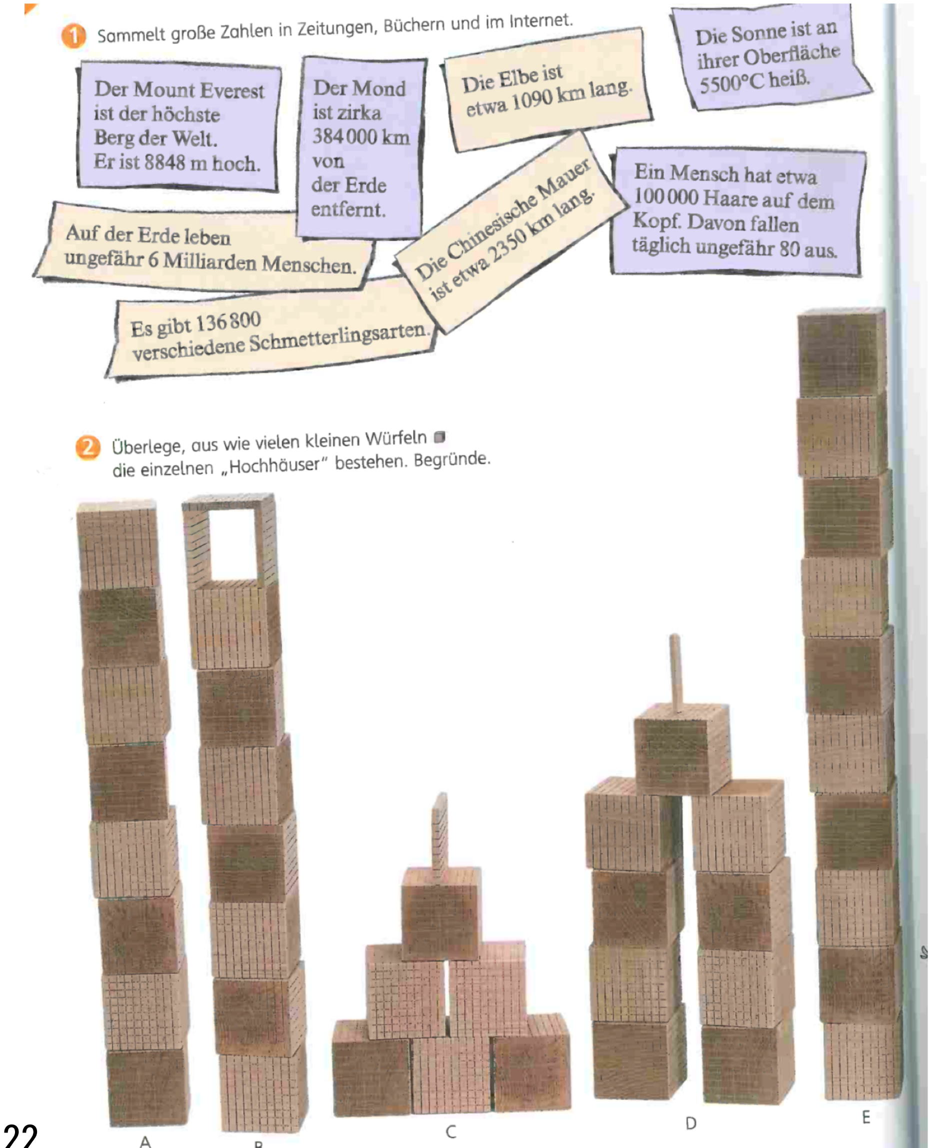
H	Z	E
2	4	8

f)

H	Z	E
4	2	8

Duden 3, S. 15

Auf dem Weg zur Million!


1 Sammelt große Zahlen in Zeitungen, Büchern und im Internet.

Der Mount Everest ist der höchste Berg der Welt. Er ist 8848 m hoch.

Der Mond ist zirka 384 000 km von der Erde entfernt.

Die Elbe ist etwa 1090 km lang.

Die Sonne ist an ihrer Oberfläche 5500°C heiß.

Auf der Erde leben ungefähr 6 Milliarden Menschen.

Die Chinesische Mauer ist etwa 2350 km lang.

Ein Mensch hat etwa 100 000 Haare auf dem Kopf. Davon fallen täglich ungefähr 80 aus.

Es gibt 136 800 verschiedene Schmetterlingsarten.

2 Überlege, aus wie vielen kleinen Würfeln die einzelnen „Hochhäuser" bestehen. Begründe.

A B C D E

Denken und Rechnen 4, S. 22

Zahlenraum bis 1 000 000

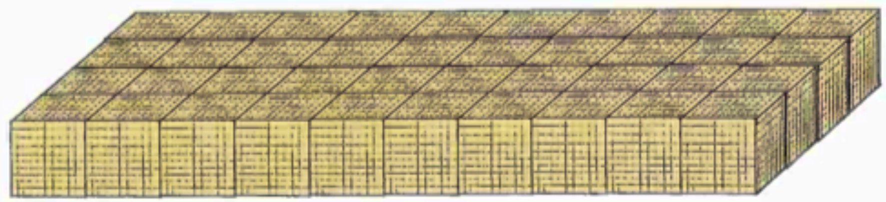
https://comps.canstockphoto.at/kies-haufen-stock-fotografie_csp4075040.jpg

Auf dem Weg zur Million

Von 10 000 bis 1 000 000

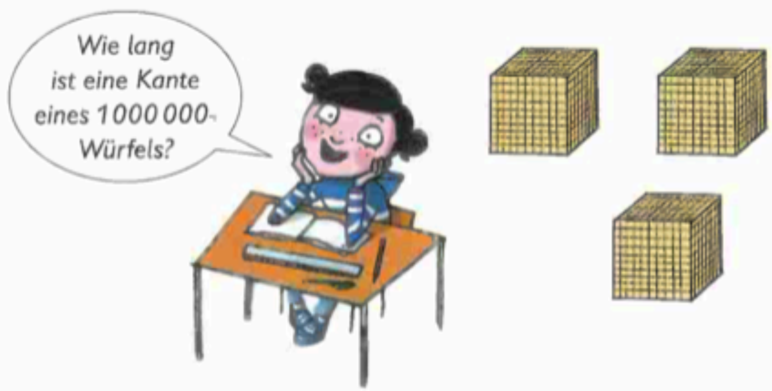
1 a) Wie viele 10 000er-Stangen sind eine 100 000er-Platte?

$10\,000 \xrightarrow{\cdot \square} 100\,000$



b) Wie viele 100 000er-Platten sind ein 1 000 000-Würfel?

$100\,000 \xrightarrow{\cdot \square} 1\,000\,000$

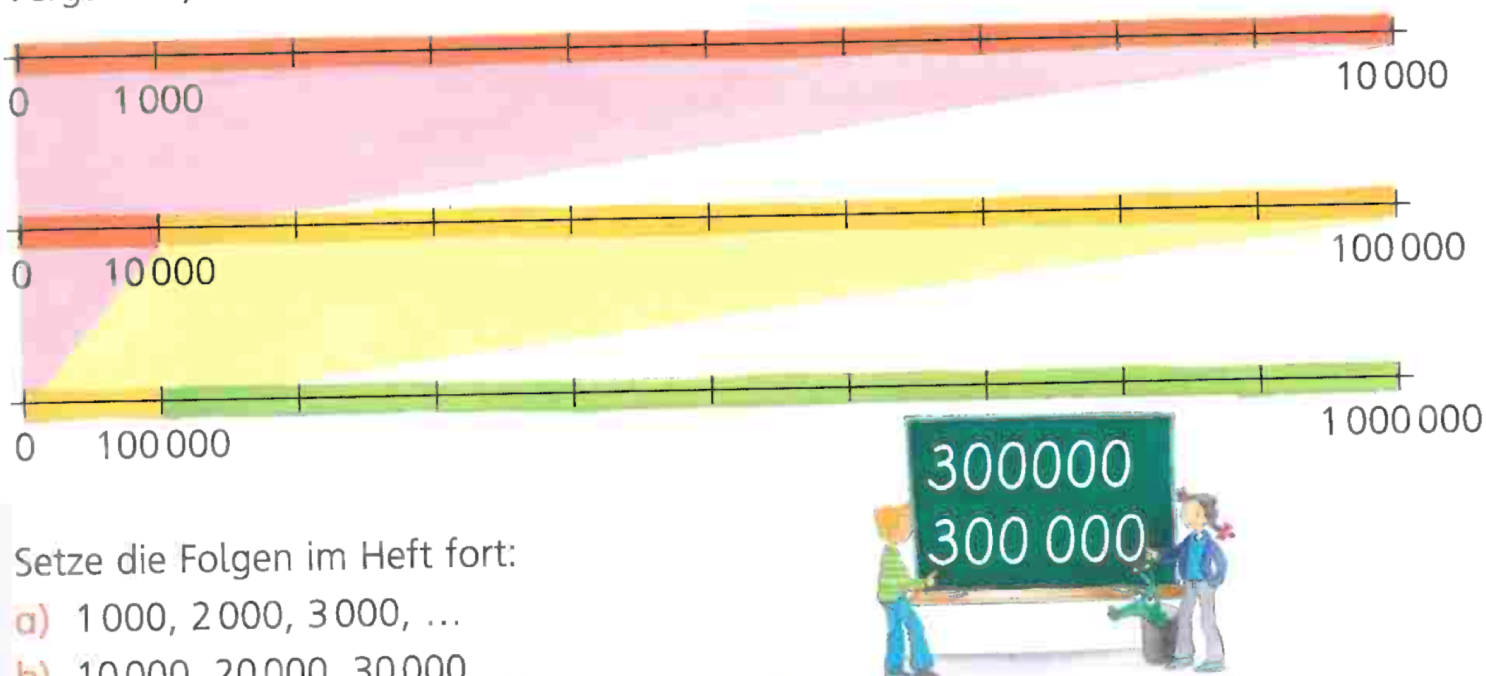


c) Ergänze im Heft!

$\boxed{1} \xrightarrow{\cdot 10} \square \xrightarrow{\cdot 10} \square \xrightarrow{\cdot 10} \square \xrightarrow{\cdot 10} \square \xrightarrow{\cdot 10} \square \xrightarrow{\cdot 10} \square$

Rechenwege 4, S. 21

Zahlenstrahl



Zahlen bis 1 000 000

1. Vergleiche, beschreibe und erkläre.

2. Setze die Folgen im Heft fort:

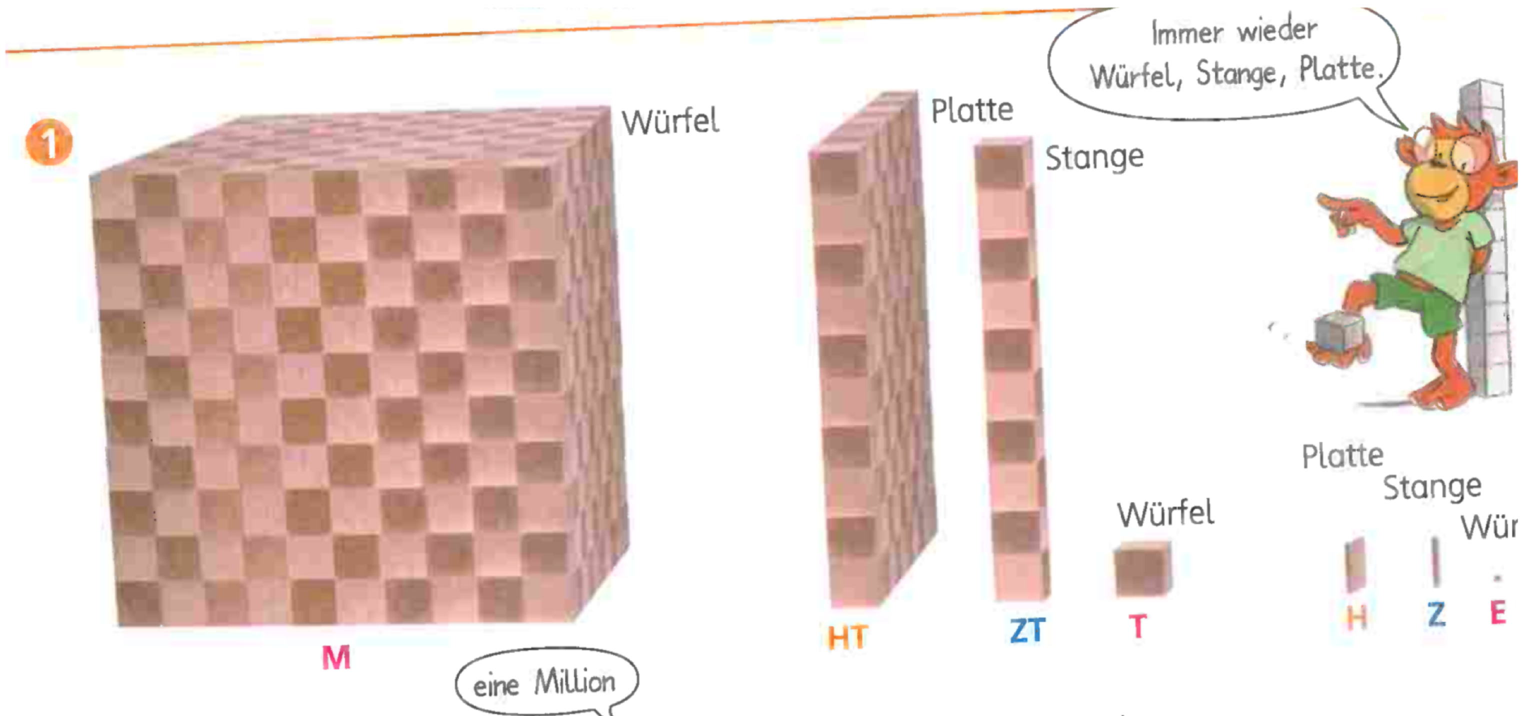
a) 1 000, 2 000, 3 000, …

b) 10 000, 20 000, 30 000, …

Mathematikus 4, S. 7

Der Millionenwürfel

1



Dieser große Würfel könnte aus 1 000 000 kleiner Würfel gebaut werden.
Erkläre.
Kannst du dir vorstellen, wie es weitergeht?

Denken und Rechnen 4, S. 32

Zahlenraum bis 1 000 000

Arbeitsmittel im Zahlenraum bis 1.000 000

Pia und Maxi haben nur einen Würfel.
Sie würfeln abwechselnd und schreiben ihre gewürfelte Ziffer jeweils in die Stellentafel.
Pia würfelt beim dritten Wurf eine 5.
Kann sie gewinnen?

Pia und Jan spielen mit einem Würfel „Große Hausnummer". Pia hat schon eine 2 und eine 4 geworfen. Jan hat 5 T und 6 H eingetragen. Pia würfelt eine 1.
Jan behauptet: „Jetzt hast du schon verloren". Hat Jan Recht?

Primo 4, S. 14

Zahlenraum bis 1 000 000

Runden

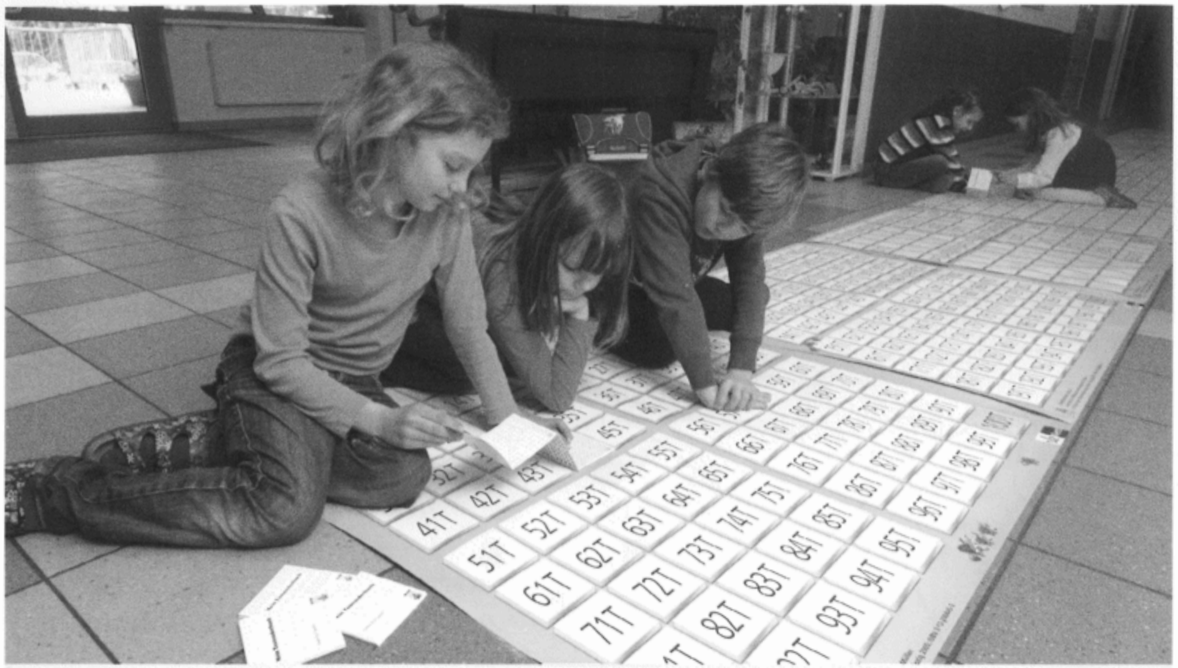
- 23.254.365
  - auf Millionen:
    Bestimmung der Nachbarmillionen. **Welche liegt näher?**
  - auf Zehntausender
  - auf Hunderter

Achtung: Die Rundungsregel über Endziffern ist lediglich eine algorithmische Umsetzung!

- Veranschaulichung:
  - Bedeutung vom Runden am Zahlenstrahl
  - 254.000 ist eine auf Tausender gerundete Zahl.
    - Nenne verschiedene Zahlen, die durch Runden auf Tausender 254.000 ergeben.
    - Welches sind die größtmögliche und die kleinstmögliche Zahl?

Zahlenraum bis 1 000 000

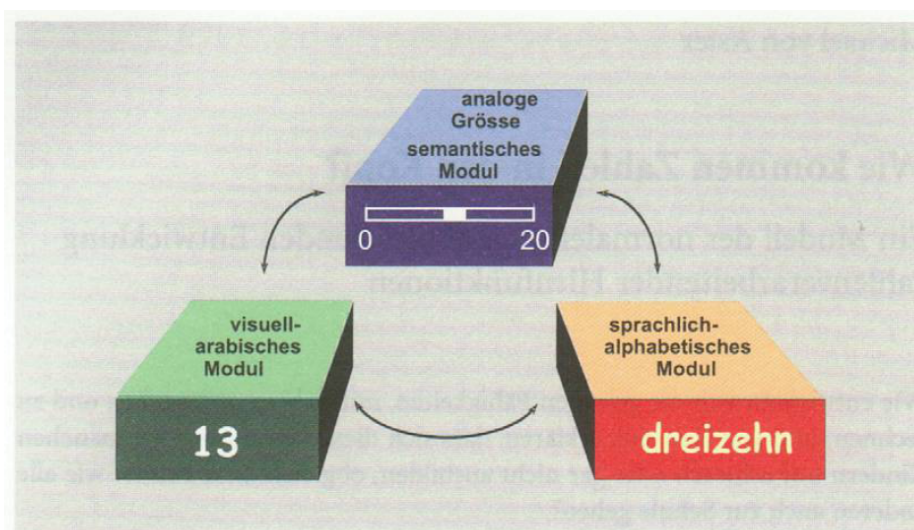
Millionbuch



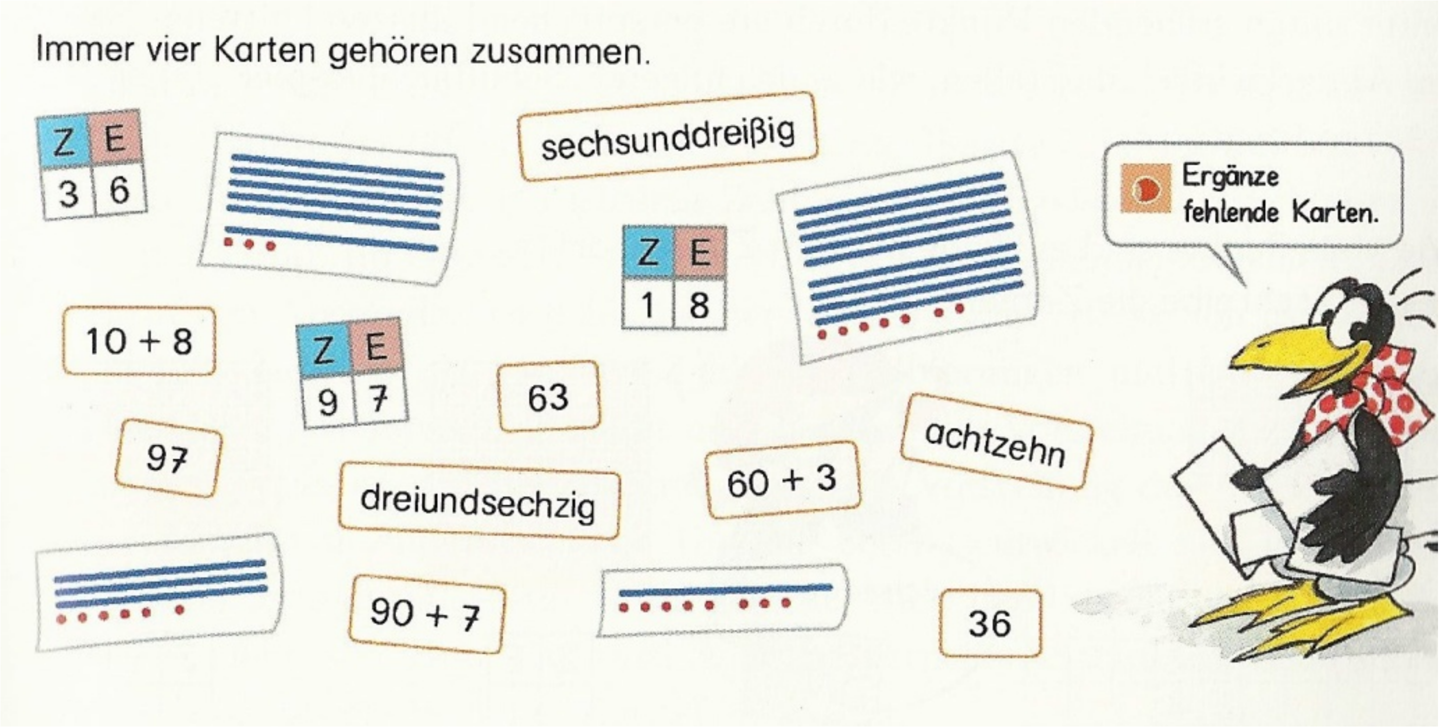
Das Millionbuch hat 1 000 Felder.
Auf jedem Feld liegt 1 Tausenderbuch.
In jeder Zeile liegen 10 Tausenderbücher.
Auf jeder Seite liegen 100 Tausenderbücher.
Jede Zahl von 1 bis 1 000 000 hat im Millionbuch ihren bestimmten Platz.

Das Zahlenbuch 4, S. 38

Zahlwortbildung



Darstellungsformen in der Schule



Rabenwerkstatt

Zahlwortbildung

Zahlzeichen	Bezeichnung von Kindern	mögliche Bezüge
10	einszig nullzehn	vierzig vierzehn
12	zehnzwei zweiundzehn zweizehn	hundertzwei zweiundzwanzig dreizehn
20 30 103	zweizig zweizehn dreizehn dreihundert	vierzig zweihundert dreihundert dreizehn
1000	zehnhundert	zehntausend

Tab. 1/2: Sprachschöpfungen zu Zahlwörtern (vgl. Spiegel 1996)

Demant, D., 2011, S. 134

Zahlenraum bis 100

Inversionsfehler

- 43 – vierunddreißig
  dreiundfünfzig – 35
- ‚Lösung': Schreibrichtungsinversion

- Aber:
  - Problem beim Schreiben größerer Zahlen (Lücken)
  - Probleme bei Tastaturen

Zahlwortbildung und Muttersprache

- Sprachen, in denen das Positionssystem klar abgebildet wird, erleichtern das Verständnis für die Zahlwortbildung
  - z. B.: Chinesische (Miller und Stiegler 1987)
- Beziehung verbale Repräsentation – Repräsentation in arabischen Ziffern in der deutschen Sprache:
  - Multiplikativ und additiv
    - Hundert–drei *versus* drei–hundert
    - Vier–zehn *versus* vier–zig
  - Inversion: zweiundvierzig – 42
  - Stufenzahlen: Zehn – Hundert – Tausend
    - regelmäßige „Dreier-Bündelung“ setzt sich fort (Million – Milliarde, Billion – Billiarde ...)

NAME IN WORTEN	SYMBOLE	SO KOMMT DIE ZAHL ZUSTANDE
Hundert	100	10 • 10
Tausend	1 000	10 • 10 • 10
Million	1 000 000	10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10
Billion	1 000 000 000 000	Multipliziere 12-mal 10 mal 10 = 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10
Billiarde	1 000 000 000 000 000	Multipliziere 15-mal 10 mal 10 = 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10
Trillion		Multipliziere 18-mal 10 mal 10
Trilliarde		Multipliziere 21-mal 10 mal 10
Quadrillion		Multipliziere 24-mal 10 mal 10
Quadrilliarde		Multipliziere 27-mal 10 mal 10
Quintillion		Multipliziere 30-mal 10 mal 10
Quintilliarde		Multipliziere 33-mal 10 mal 10
Sextillion		Multipliziere 36-mal 10 mal 10
Sextilliarde		Multipliziere 39-mal 10 mal 10
Septillion		Multipliziere 42-mal 10 mal 10
Septilliarde		Multipliziere 45-mal 10 mal 10
Oktillion		Multipliziere 48-mal 10 mal 10
Oktilliarde		Multipliziere 51-mal 10 mal 10
Nonillion		Multipliziere 54-mal 10 mal 10
Nonilliarde		Multipliziere 57-mal 10 mal 10
Dezillion		Multipliziere 60-mal 10 mal 10
Dezilliarde		Multipliziere 63-mal 10 mal 10
Googol		Multipliziere 100-mal 10 mal 10
Googolplex		Multipliziere Googol-mal 10 mal 10

Potenzschreibweise:

Million: 10^{6}
Billion: 10^{12}
Trillion: 10^{18}
Quadrillion: 10^{24}
.
.
.
Dezillion: 10^{60}

Googol: 10^{100}

Quelle unbekannt

Literaturverzeichnis

- Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (Hrsg.) (2006). *Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern - Zahlvorstellungen wandeln*. PM, 48(11).
- Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag
- Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Springer.
- Demant, D. (2011). Eine Null im Alltag. Die erstaunliche Welt der Mathematik. Würzburg: Arena

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!