



Didaktik der Arithmetik

Vorlesung Vertiefungsmodul LAGS-GSD-MA-VM2

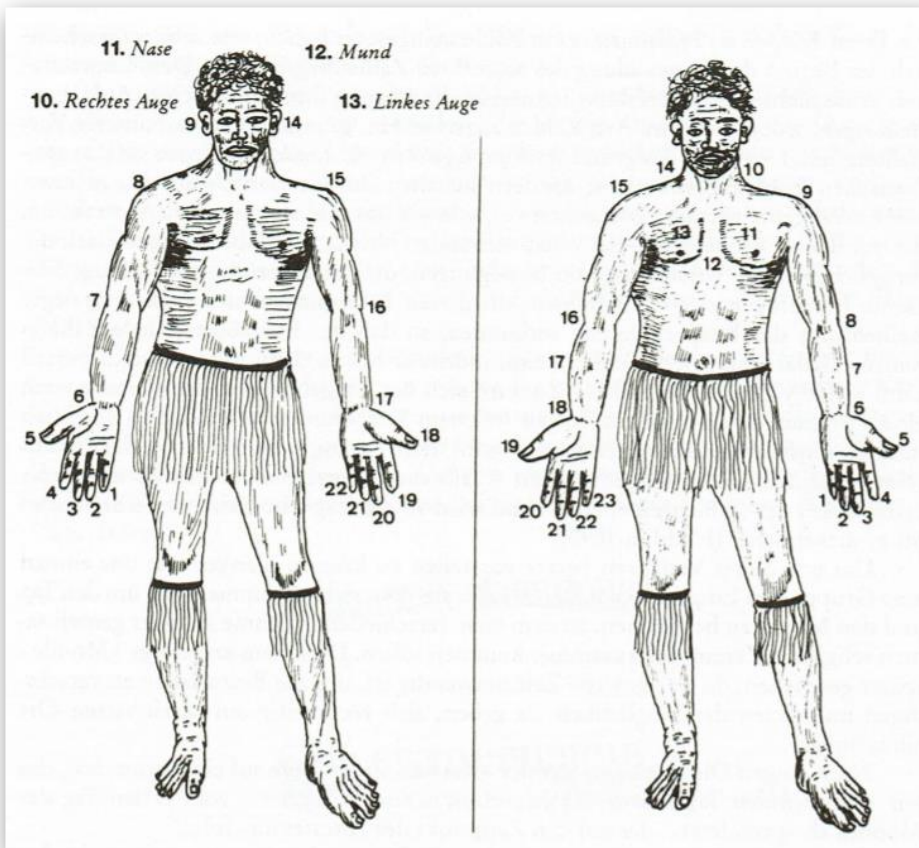
3. Zahldarstellungen und Zahlzeichen

Grundschuldidaktik Mathematik
Prof. Dr. phil. Birgit Brandt
Wintersemester 2024/2025



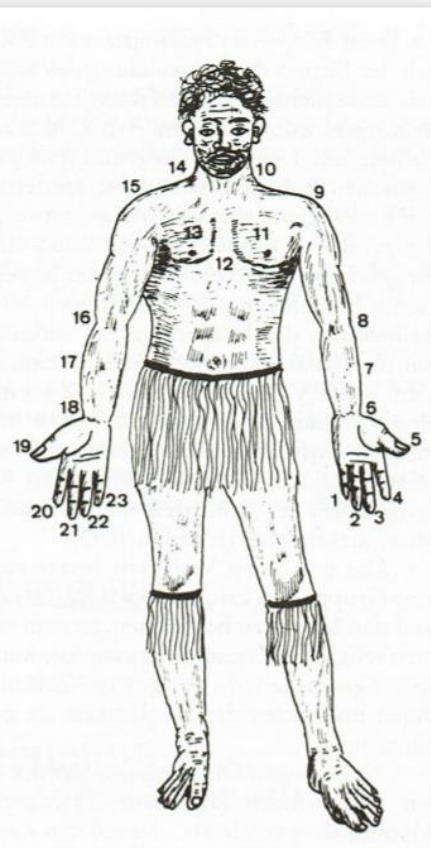
Körperbezogene Zahldarstellungen

Körperzahlen: Zählidialekte (I)

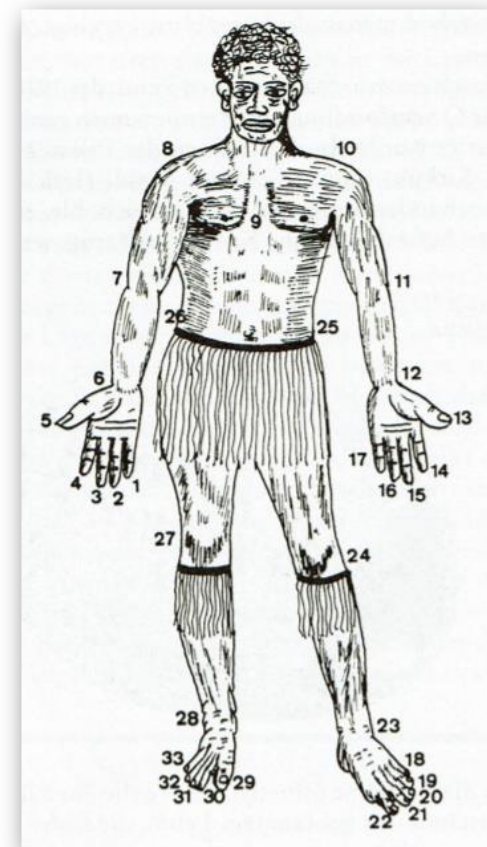


Papua-Neuguinea

Ifrah, G., 2010, S. 30 f

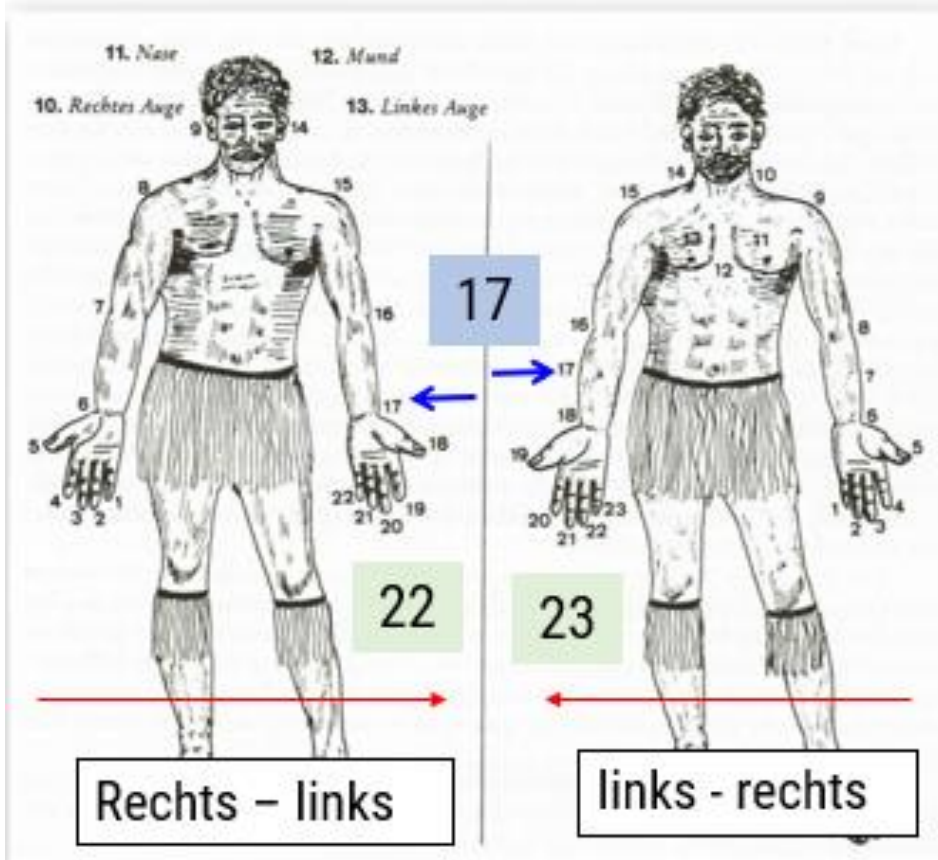


Elma-Neuguinea



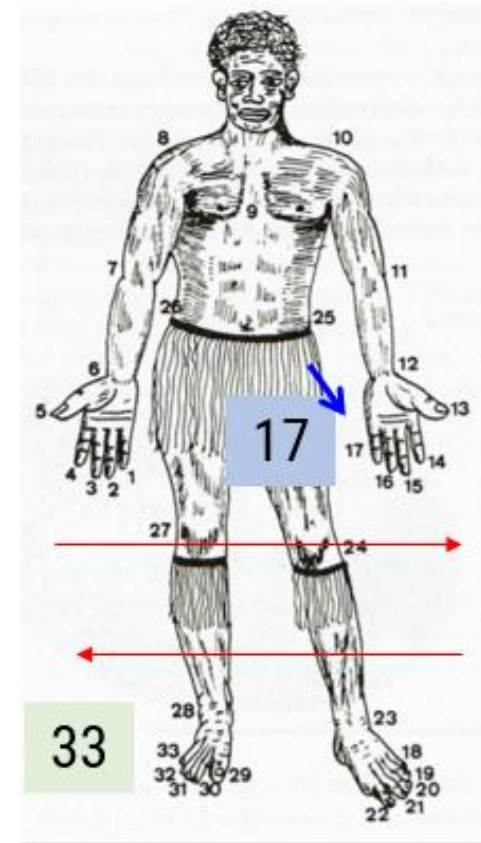
Murray-Inseln (Torres-Straße)

Körperzahlen: Zählidialekte (II)



Papua-Neuguinea

Elma-Neuguinea

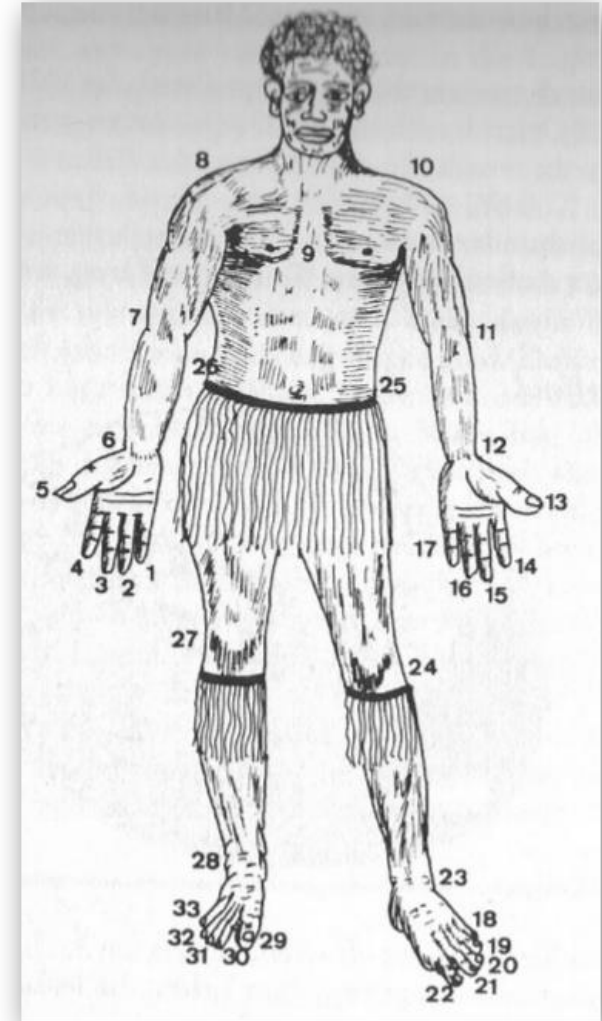


Murray-Inseln (Torres-Straße)

Ifrah, G., 2010, S. 30 f

Abzählen mit Körperzahlen

- Anzahlen werden „körperlich“ ermittelt und als „Körpererfahrung“ gemerkt (ggf. durch Körpermarkierungen).
- Kontrollen findet durch wiederholtes „Abzählen“ statt.
- Das „Zählergebnis“ wird mit dem Körperteil bezeichnet – es gibt zunächst keine Zahlworte – Mehrdeutigkeiten lassen sich nur durch Gesten ausschließen.



Körperzahlen in der Realität



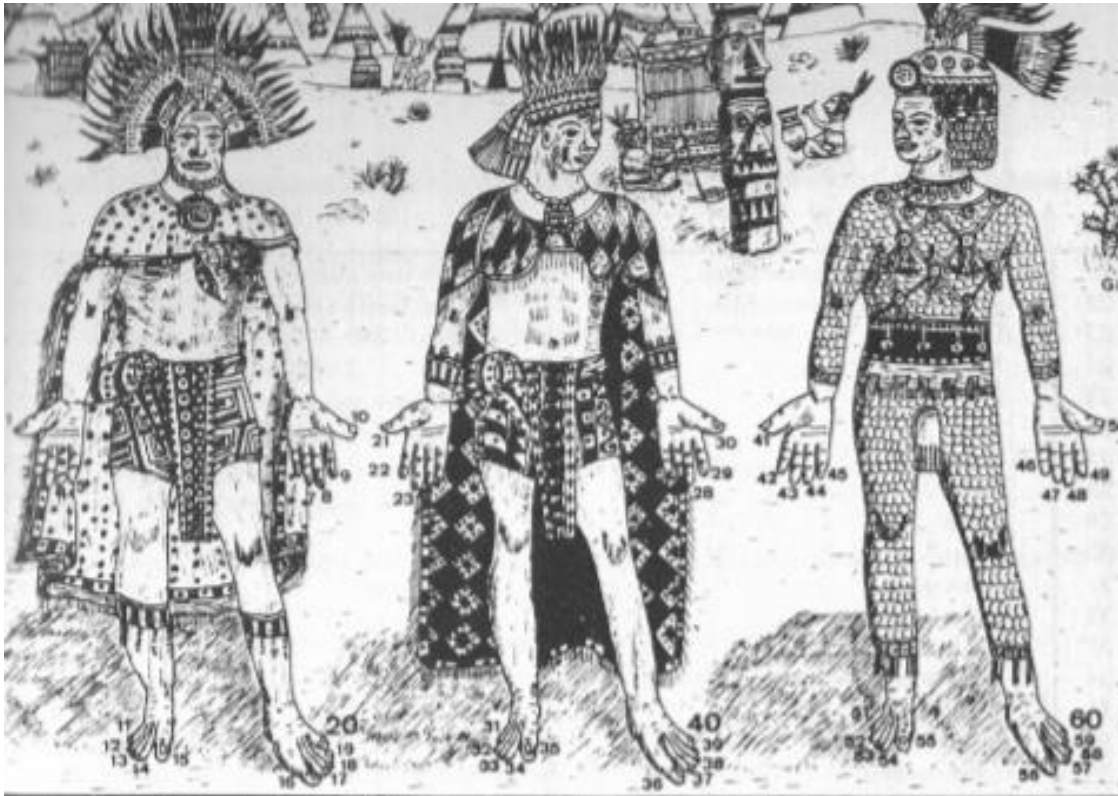
Abb. 28: Körperzahlen „10“, „13“ und „15“ der Eipo im zentralen Hochland von Neuguinea (nach Koch 1984)

- Körperzahlen (Zahl als Körpererfahrung; hier: links à rechts, bis 25)
 - Fortsetzung der Zahlenreihe durch Wiederholung (additiv)
 - betont ordinalen Charakter der natürlichen Zahlen

Damerow/Schmidt, 2004

„Große“ Zahlen - additiv

„auf dem anderen Fuß eins beim dritten Mann“

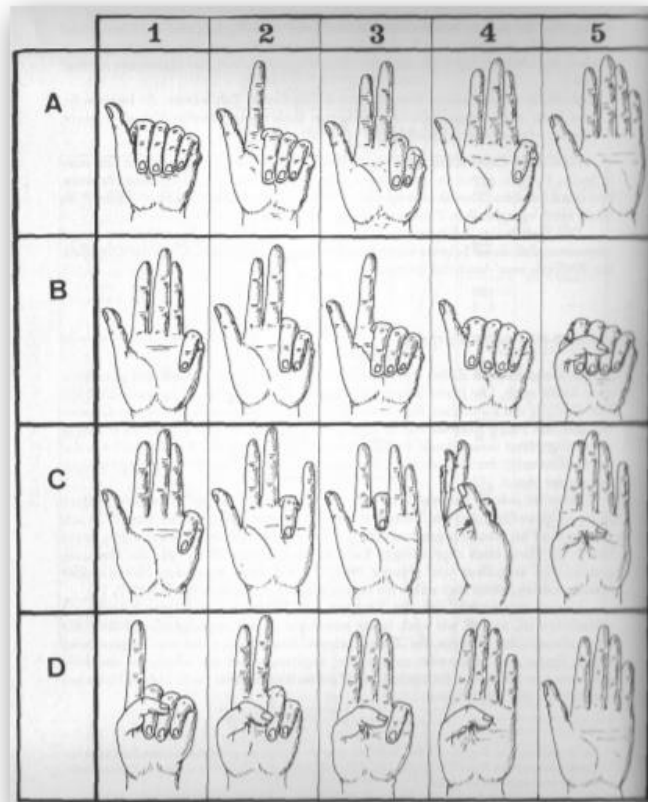


13	Zehn-Drei
20	Ein-Mann (Zwanziger)
25	Fünf nach dem ersten Mann (Fünf vom zweiten Mann)
40	Zwei Mann
49	Neun nach dem zweiten Mann (Neun vom dritten Mann)
56	Zehn-Sechs nach dem zweiten Mann (Zehn-Sechs vom dritten Mann)

Maya – Dialekte

Ifrah, G., 2010, S. 67

„Große“ Zahlen – Die Zahlen bis 10 an zwei Händen



aus der Hand rauszählen;
Daumen zuerst

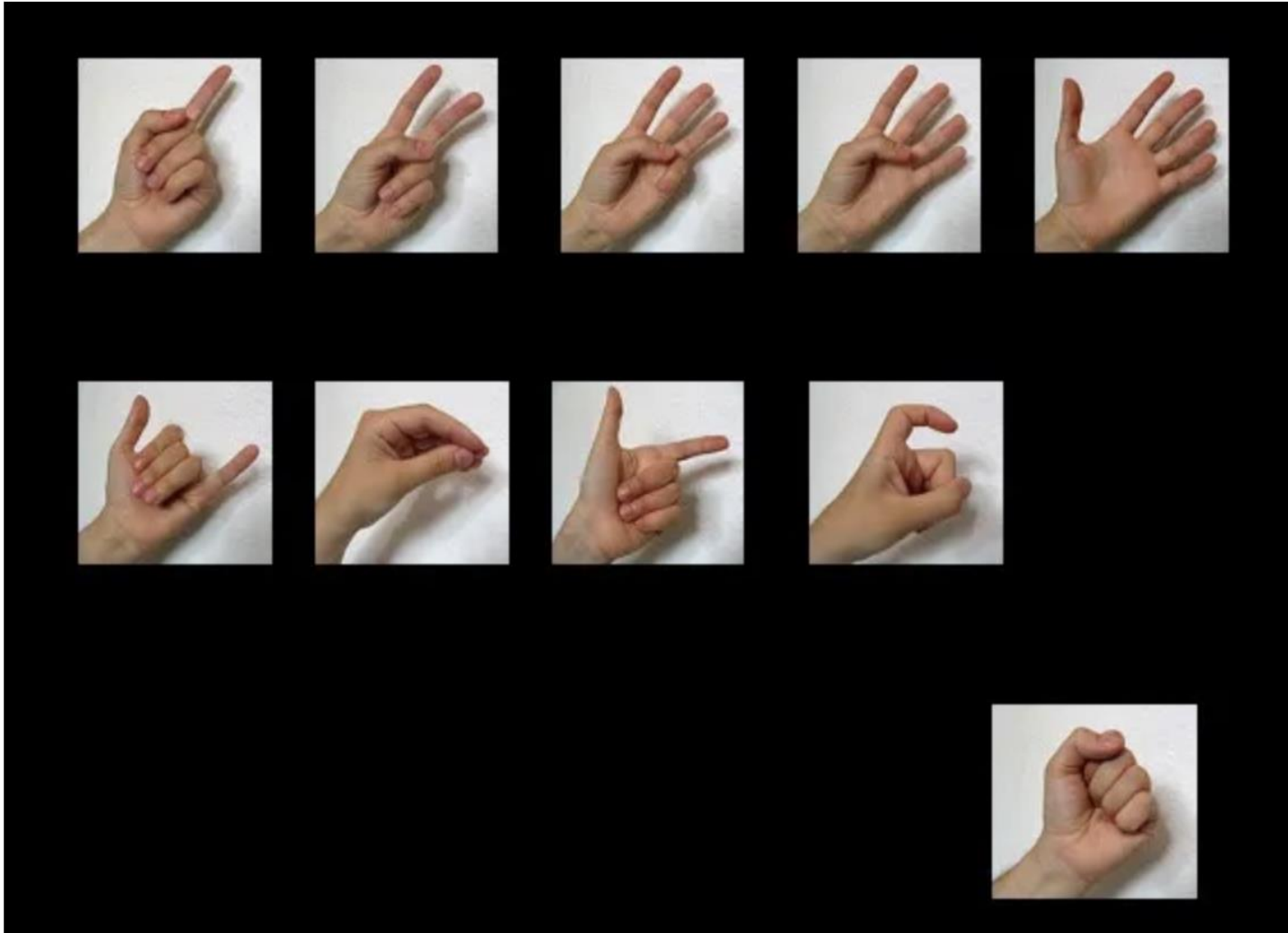
in die Hand reinzählen

Fingerzuordnung

aus der Hand rauszählen:
Daumen zum Schluss

Ifrah, G., 2010, S. 67

Fingerzahlzeichen: Chinesisch



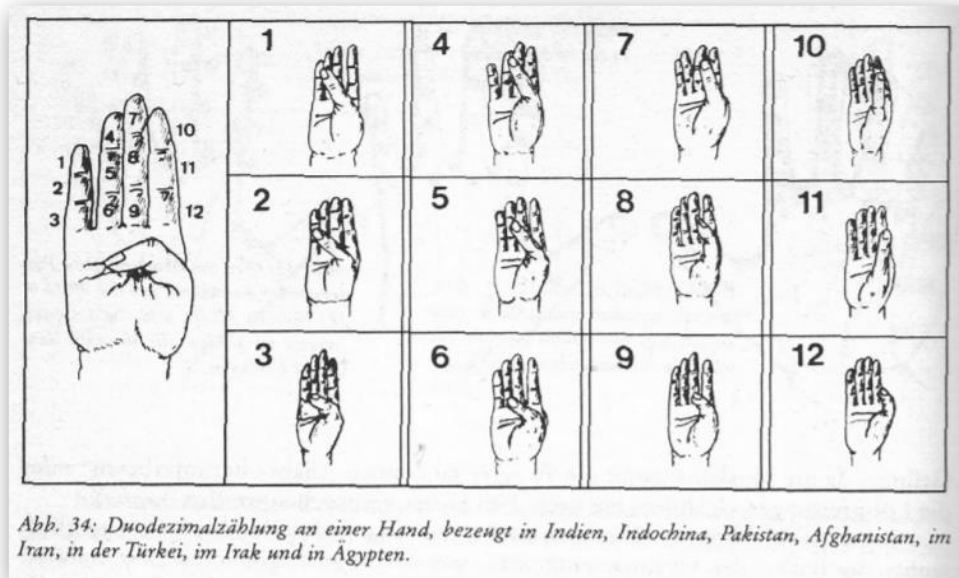
© 2023 Bambooblog Hamburg
<https://www.bambooblog.de/chinesisch-bis-zehn-zaehlen/>

Fingerzählen auf Chinesisch mit einer Hand



[www.youtube.com /watch?v=nkc03aBRZn8](https://www.youtube.com/watch?v=nkc03aBRZn8)

Duodezimalsystem an einer Hand

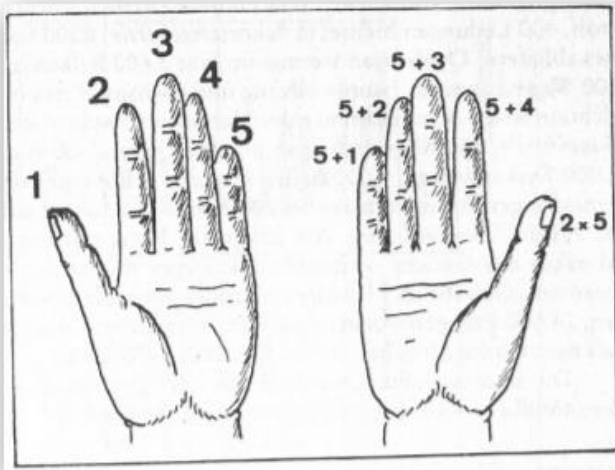


- Elf und Zwölf als Zahlwort
- Duzend und Gros bei Mengenangaben
- Unze (Zwölftel) bei Münzen
- Zusammenhang zum Sexagisimalsystem (Basis 60)

Fingerknöchel zuordnen

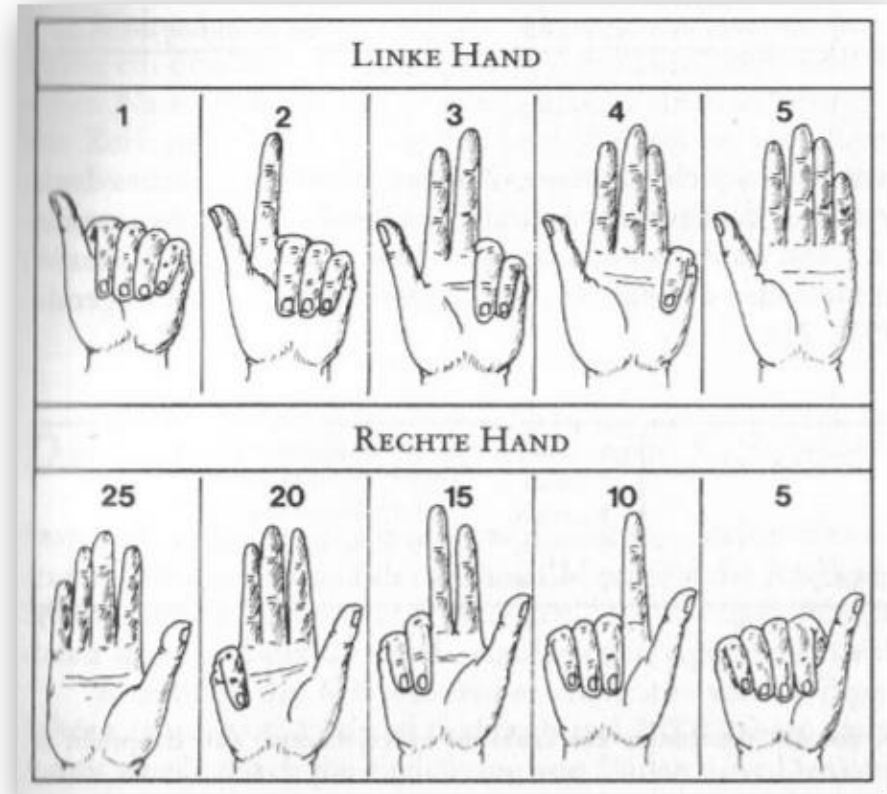
Ifrah, G., 2010, S. 90

Quinäres Fingerzählen



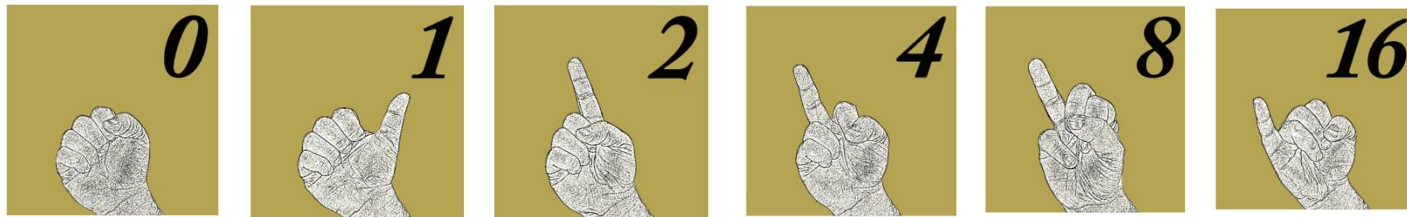
1	: ce
2	: ome
3	: yey
4	: nauí
5	: <i>chica</i> (oder <i>macuilli</i>)
6	: <i>chica-ce</i> (5 + 1)
7	: <i>chic-ome</i> (5 + 2)
8	: <i>chicu-ey</i> (5 + 3)
9	: <i>chic-nauí</i> (5 + 4)

Azteken
(Mexiko)

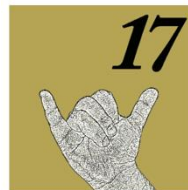


Fingerzählen in Bombay

Ifrah, G. 2010, S. 59, 61



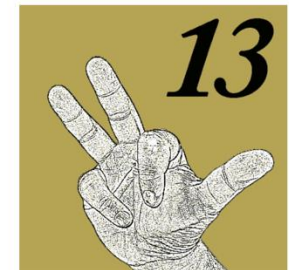
$$1 + 2 = 3$$



$$1 + 16 = 17$$



$$1 + 2 + 4 = 7$$



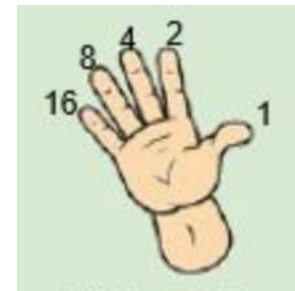
Screenhots von: <https://community.eeducation.at/course/view.php?id=194>
Werk von Wolfgang Wimleitner (überarbeitet von Christian Wurzer) für www.digikomp.at (CC BY 3.0)

10 Finger im Dualsystem (I)

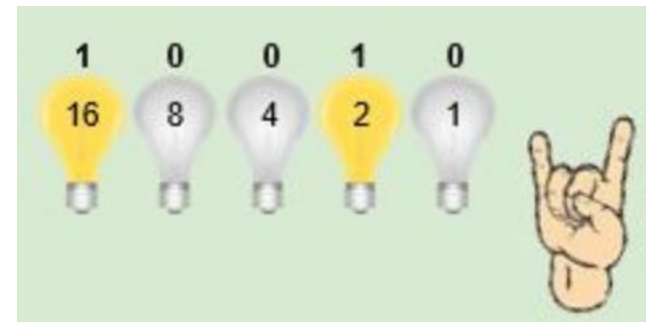
Im Dualsystem kann man mit 10 Fingern noch viel weiter zählen. Das Grundprinzip entspricht *an – aus* bzw. *gestreckt – nicht gestreckt*.

Dem gestreckten Daumen wird die 1 zugeordnet, dem gestrecktem Zeigefinger die duale Ziffernfolge 10, entspricht dezimal daher der 2. Der gestreckte Mittelfinger entspricht der dualen Ziffernfolge 100, erhält dezimal also den Wert 4. Der Ringfinger erhält so den Wert 8 und der kleine Finger den Wert 16, jeweils im Dezimalsystem.

Die abgebildete Hand mit gestrecktem Zeigefinger und gestrecktem kleinem Finger entspricht also der Ziffernfolge 10010 im Dualsystem und somit $16+2=18$ im Dezimalsystem.



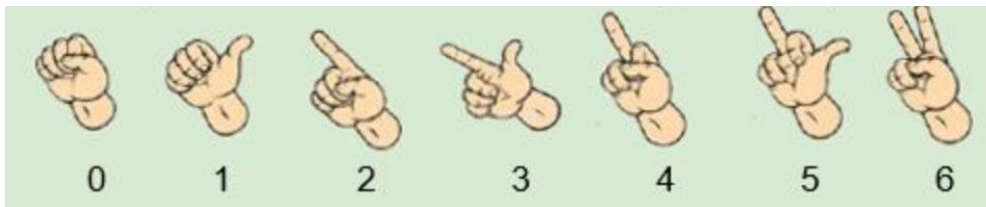
Alle Finger einer Hand gestreckt ist also 11111 im Dualsystem und damit $1+2+4+8+16=31$



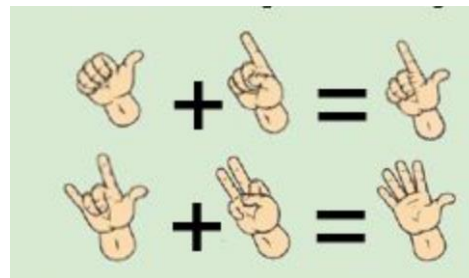
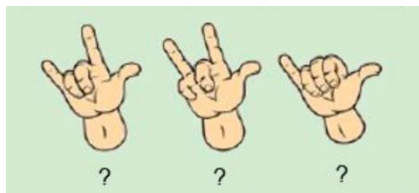
Abbildungen (auch nächste Folie):
<https://mia.phsz.ch/Informatikdidaktik/BinaerZaehlen>

10 Finger im Dualsystem (II)

Hier die Fingerdarstellung im Dualsystem bis zur Zahl 6:



Jetzt sind Sie dran. Lösen Sie zunächst folgende Aufgaben für eine Hand.



Die Lösungen folgen im Video – also entweder vorher lösen oder kurz stoppen.

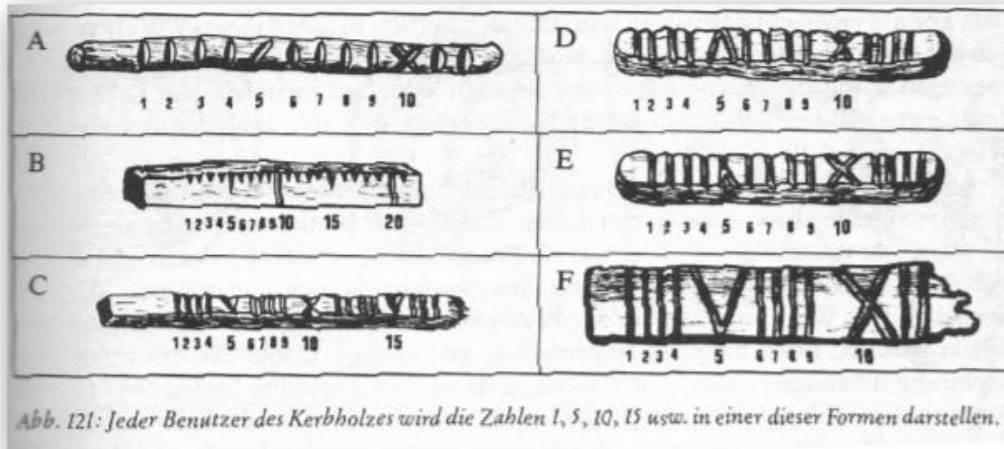
Und für zwei Hände:

1. Welcher Zahlenwert ist der größte, den man so mit zwei Händen darstellen kann?
2. Welche Zahl wird mit zwei ausgetreckten Mittelfingern angezeigt.

Zahlzeichen

Kerbhölzer und andere Zahlzeichen

Römische Zahlzeichen



Einteilung auf dem Kerbholz

Ifrah, G., 2010, S. 175, 181

ETRUSKER		RÖMER	
1	I	I	1
5	∧	V	5
10	X oder / oder +	X	10
50	∧	V	50
100	* (with a dot)	(*)	100

Römische Zahlschrift (I)

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000



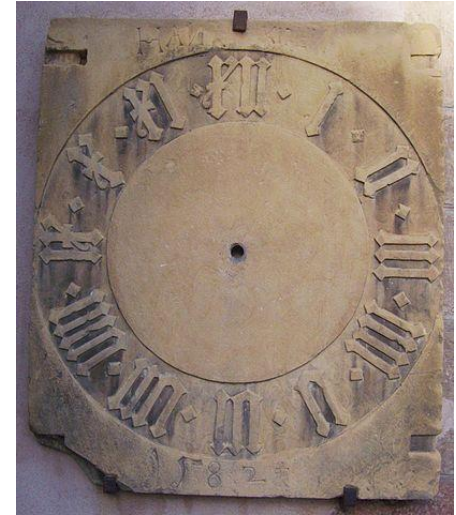
https://en.wikipedia.org/wiki/File:She-wolf_suckles_Romulus_and_Remus.jpg

- Zeichen transportiert den Wert weitgehend unabhängig von der Position
- Alternierende Bündelung (Fünfer-Zweier)
- Ikonische Darstellung (I, II, III) und symbolisches Bündelungszeichen (V, X, L, ...)
- Additive Grundregel
 - Zeichenfolge von rechts nach links aufsteigend
 - Wiederholung der Zeichen (max. 4 pro Stufe)

Römische Zahlschrift (II)

Kompakte Schreibweise - Subtraktionsregeln

- Vermeidung von vier gleichen Zahlzeichen
- Kennzeichen: kleineres Zahlzeichen links: maximal zwei Zeichen
- nur Zeichen der Zehnerbündelung werden subtrahiert
- nur von den beiden nächsten Bündelungszeichen wird abgezogen (Ausnahme: I und X)
- zu römischen Zeiten nur vereinzelt
- Konvention erst ab Mittelalter
- gemischte Anwendungen (z.B. Zahlzeichen auf Uhren)



Römische Zahlschrift (III)

Kompakte Schreibweise

3499

Achtung: Fehlerteufel



VIII = IX = 9

2987

Ordnen Sie die römischen Zahlen den beiden Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem mit indisch-arabischen Ziffern zu! Die Lösung folgt im Video – also kurz stoppen!

MMCMXXCVII

MMMCCCCLXXXVIII

MMCMXXCLVII

MMMCDIC

MMCMLXXXVII
MMMMCDXCIX

MMDCCCCLXXXVII

MMXXMVII



Nebenjob Schule – Starte dein eigenes GTA

Im Studium Praxiserfahrung sammeln und gleichzeitig Geld verdienen - das ist mit einem Ganztagsangebot (GTA) an sächsischen Schulen möglich. Du hast Lust darauf, aber dir fehlen Infos und eine passende Schule?

Dann melde dich über den QR zum „Schooldating - Nebenjob GTA“ an!

12. November 2024 von 14:00 bis 17:00 Uhr
Zentrales Hörsaal- und Seminargebäude der TU Chemnitz



Römische Zahlschrift (IV)

Große Zahlen - Multiplikationsregeln



CCCCIƆƆƆƆ CCCIƆƆƆ	XII	̄IC̄CXXXIVDLXVII
CCCCIƆƆƆⓉⓉⓉⓉⓉⓉDLXVII	ⓉⓉⓉM̄DLXVII	

- „Klammern“ (Apostrophus) um Einzelzeichen: Faktor 1.000
 - Wiederholte Verwendung: Faktor 10
 - Einseitige Verwendung: Hälfte der vollständigen „Klammerung“
- Rahmen (auch um Zeichenfolgen): Faktor 100.000
 - *teilweise auch komplett oder nur seitlich gerahmt*
- Überstrich (Vinculum; auch über Zeichenfolgen): Faktor 1.000
 - „Doppelstrich“: 1.000 x 1.000

https://de.wikipedia.org/wiki/R%C3%B6mische_Zahlschrift#/media/Datei:Westerkerk_MDCXXX.jpg
https://de.wikipedia.org/wiki/R%C3%B6mische_Zahlschrift

Römische Zahlschrift (V)

Große Zahlen – Multiplikationsregeln



Können Sie jetzt diese römischen Zahldarstellungen entziffern? Die Lösung folgt im Video – also wieder kurz stoppen, wenn Sie sich selbst ausprobieren wollen!

CCCCIƆƆƆƆ CCCIƆƆƆ
CCCIƆƆƆ④④④④DIƆLXVII

$$1 \times 1000 \times 10 \times 10 \times 10 = 1.000.000$$

$$2 \times 1000 \times 10 \times 10 = 200.000$$

$$3 \times 1000 \times 10 = 30.000$$

$$1/2 \times 1000 \times 10 - 1000 = 4.000$$

$$1/2 \times 1000 = 500$$

$$50 + 10 + 7$$



$$12 \times 100.000 = 1.200.000$$

$$3 \times 1000 \times 10 = 30.000$$

$$1/2 \times 1000 \times 10 - 1000 = 4.000$$

$$500 + 50 + 10 + 7$$

ICXXXIVDLXVII

$$1 \times 1000 \times 1000 = 1.000.000$$

$$(200 + 30 + 4) \times 1000 = 234.000$$

$$500 + 50 + 10 + 7$$

... und im Schulbuch

 **Römische Zahlzeichen**




Vor etwa 2000 Jahren benutzten die Römer für Zahlen andere Zahlzeichen als heute. Diese römischen Zahlzeichen werden auch heute noch verwendet.

① a) Wo hast du schon solche Zahlzeichen gesehen? Erzähle.
b) Wie viele römische Zahlzeichen findest du auf den Fotos?

Merke dir sieben römische Zahlzeichen und ihre Bedeutung:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

②



Ordne den römischen Zahlzeichen auf den Uhren unsere Zahlen zu.











Schreibe so:

I = 1 II = ■ III = ■■ IV = ■ ... XII = ■■■

Mathematikus 4

Ägyptische Zahlzeichen (I)

						
1	10	100	1000	10000	100000	10^6
Ägyptische Zahlen-Hieroglyphen						


Ägyptische Zahlschrift (ca. 1800 v. Chr.)
<http://www.spasslernen.de/geschichte/ges1.htm>

- Zeichenwert von Position unabhängig
- Bündelung (Zehnersystem)
- ikonisch / symbolisch
- additiv

Hieratische Zahlzeichen:

	1	∧	10	—	100	⋈	1000
	2	⋈	20	— —	200	⋈⋈	2000
	3	X	30	— — —	300	⋈⋈⋈	3000
—	4	⋈	40	— — — —	400	⋈⋈⋈⋈	4000
⌒	5	⋈	50	— — — — —	500	⋈⋈⋈⋈⋈	5000
2	6	⋈	60	— — — — — —	600	⋈⋈⋈⋈⋈⋈	6000
↗	7	>	70	— — — — — — —	700	⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈	7000
=	8	⋈	80	— — — — — — — —	800	⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈	8000
2	9	⋈	90	— — — — — — — — —	900	⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈	9000

<http://kryptografie.de/kryptografie/chiffre/hieratische-zahlen.htm>

 („nichts“)

Ägyptische Zahlzeichen (II)

Dezimale Struktur – rein additiv

	Eins		Zehntausend
	Zehn		Hunderttausend
	Hundert		Million, Unendlich
	Tausend		




Strich (Finger)
Huf (Gespann)
Messschnur
Lotusblume
(gekrümmter) Finger
Kaulquappe (Frosch)
Heh (Gottheit)




<http://members.chello.at/beanie/zahlen.htm>











Welche Zahlen sind hier dargestellt? Und wie schreibt man 2024 in ägyptischen Hieroglyphen? Die Lösung folgt wieder im Video!

	<input type="text"/>		<input type="text"/>
	<input type="text"/>		<input type="text"/>








... und im Schulbuch

 ③ Überlege: 1  ist so viel wert wie 10 .












Wie viele  oder  sind dann so viel wert wie 1  ?

Überlege auch: 1  → ...  1  → ...  1  → ...  1  → ...  1  → ... 

④ Vergleiche die ägyptischen Zeichen mit unserer Stellentafel.

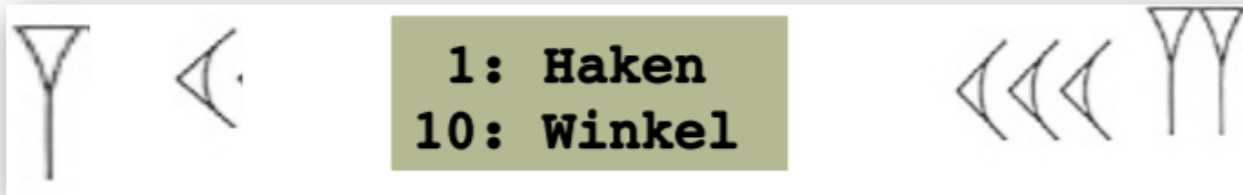
Millionen M	Hundert- tausender HT	Zehn- tausender ZT	Tausender T	Hunderter H	Zehner Z	Einer E
						
1	4	6	2	5	3	6

⑤ Wie schreibt man mit unseren Zahlen ...

a)  b)  c)  999 d)     e)     ?

Die Matheprofis 3

Babylonische Keilschrift (I)



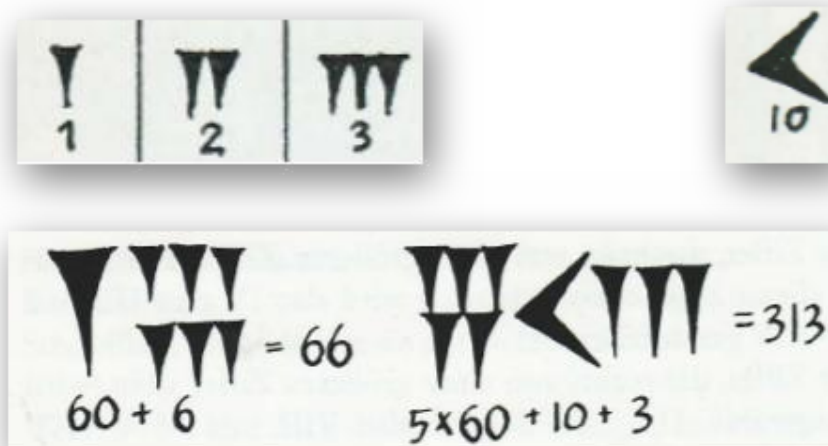
𐎗 1	𐎗𐎗 11	𐎗𐎗𐎗 21	𐎗𐎗𐎗𐎗 31	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 41	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 51
𐎗𐎗 2	𐎗𐎗𐎗 12	𐎗𐎗𐎗𐎗 22	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 32	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 42	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 52
𐎗𐎗𐎗 3	𐎗𐎗𐎗𐎗 13	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 23	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 33	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 43	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 53
𐎗𐎗𐎗𐎗 4	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 14	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 24	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 34	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 44	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 54
𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 5	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 15	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 25	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 35	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 45	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 55
𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 6	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 16	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 26	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 36	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 46	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 56
𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 7	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 17	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 27	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 37	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 47	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 57
𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 8	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 18	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 28	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 38	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 48	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 58
𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 9	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 19	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 29	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 39	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 49	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 59
𐎗 10	𐎗𐎗 20	𐎗𐎗𐎗 30	𐎗𐎗𐎗𐎗 40	𐎗𐎗𐎗𐎗𐎗 50	

Babylonische Keilschrift
- ca. 3200 v. Chr.

<http://www.spasslernen.de/geschichte/ges4.htm>

Babylonische Zeitschrift (II)

- Bündelung (Sexagesimalsystem)
- Positionssystem: Wert eines Zeichens ist abhängig von seiner Position
- Ikonische Zeichen und symbolische Bündelungszeichen



Babylonische Keilschrift (III)

Stellenwertsystem zur Basis 60



$$2018 = 33 \times 60 + 38 = (33 \ 38)_{60}$$

Um Babylonische Zahlzeichen in das Dezimalsystem umzurechnen, muss man zunächst die „Ziffern“ identifizieren. Dazu muss man die Schreibregel der Ziffern beachten: „Zehner-Winkel“ links (bzw. vorne) und „Einer-Haken“ links (bzw. hinten). Hier hat man also zwei „Ziffern“, blau bzw. rot markiert. Diese muss man dann stellengerecht mit der entsprechenden 60'Potenz multiplizieren.

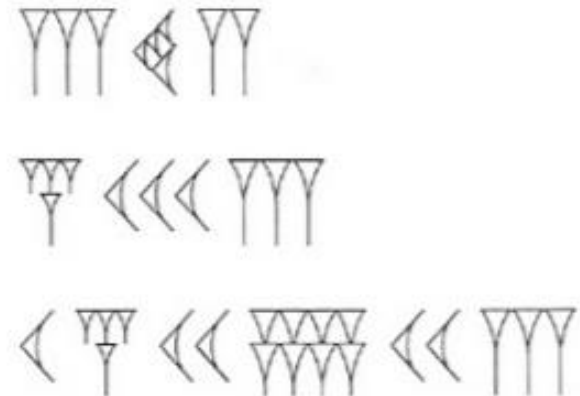
Wie schreibt 2024 in babylonischer Keilschrift?

Babylonische Keilschrift (IV)

Stellenwertsystem zur Basis 60



Welche Zahlen sind hier dargestellt? Die Lösung folgt wieder im Video!



Babylonische Keilschrift (V)

Stellenwertsystem zur Basis 60



Welche Zahlen sind hier dargestellt? Die Lösung folgt wieder im Video!

Babylonische Keilschrift (VI)

Stellenwertsystem zur Basis 60

Doppeldeutigkeit durch fehlende „0“



– steht dies für „70“ („60 + 10“) oder für „3610“ („60² + 10“)?



– steht dies für „2“ oder für „61“ oder für „120“?



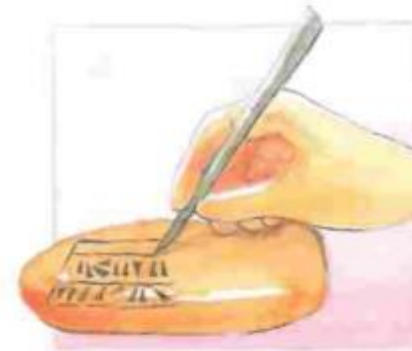
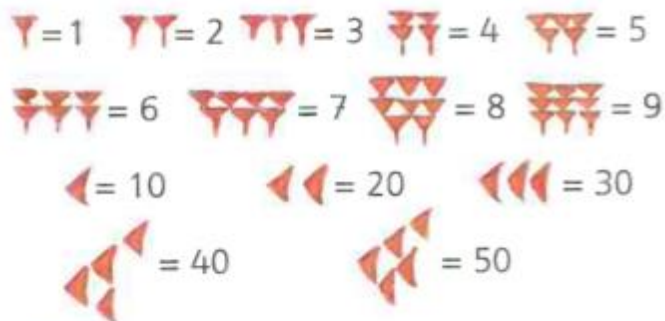
– steht dies für „2 · 60 + 2“ oder für „2 · 60² + 2“ oder für „2 · 60² + 2 · 60“?

Bei Verwendung der Zahlzeichen in Sachkontexten kann der Sachzusammenhang Aufklärung geben über den Wert der Zahlzeichen. Dennoch wurden in späteren Texten teilweise ein „Fehlzeichen“ bzw. eine Lücke eingefügt, um diese Doppeldeutigkeit zu vermeiden.

... und im Schulbuch

• So schrieben die Babylonier Zahlen.

Vor mehr als 4000 Jahren lebten zwischen den beiden Flüssen Euphrat und Tigris in Kleinasien die Babylonier. Sie kannten die Zahlen und hatten eine eigene Schrift, die sie mit Keilen in Tontafeln drückten. Wir nennen sie deshalb Keilschrift. Die Zahlen bildeten sie aus zwei Zeichen: dem Keil und dem Winkelhaken.



a) Welche Zahlen sind das?



b) Schreibe in babylonischen Zahlzeichen.

11

26

32

















57

49

Mathematikus 2

Gut geeignet für fachübergreifende
Projekte!! (Deutsch, Kunst Sachunterricht)

Vigesimalsystem (Basis 20) (I)

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
	• 	•• 	••• 	•••• 
10	11	12	13	14
	• 	•• 	••• 	•••• 
15	16	17	18	19
	• 	•• 	••• 	•••• 

<http://www.mathezentrale.de/>

Zahlzeichen Maya-Kultur

- Für Zahlen bis 20 werden Zeichen für 1 und 5 werden kombiniert
- Basiert vermutlich auf der Verwendung von Händen und Füßen
- Einführung eines Zahlzeichens für Null (vermutlich klassische Phase, 3. Jh.)

Vigesimalsystem (Basis 20) (II)

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
	•	••	•••	••••
10	11	12	13	14
	•	••	•••	••••
15	16	17	18	19
	•	••	•••	••••

Darstellung größerer Zahlen:

- von unten nach ob aufsteigende Stellenwerte
- Addition ↓

20^3	8000er
20^2	400er
20^1	20er
20^0	1er

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \hline \hline \end{array} 11 \times 20^0$$

11

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \hline \hline \end{array} 11 \times 20^1$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \hline \hline \end{array} 11 \times 20^0$$

231

Auch bei den Mayazahlen muss man zunächst die „Ziffern“ identifizieren und dann mit dem entsprechenden Stellenwert multiplizieren und schließlich addieren.

Vigesimalsystem (Basis 20) (III)



0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
	•	••	•••	••••
10	11	12	13	14
	•	••	•••	••••
15	16	17	18	19
	•	••	•••	••••













Welche Zahlen sind hier dargestellt? Die Lösung folgt wieder im Video!

	<input type="text"/>		<input type="text"/>		<input type="text"/>
	<input type="text"/>		<input type="text"/>		<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

20^2	400er
20^1	20er
20^0	1er

Vigesimalsystem (Basis 20) (IV)

<http://www.mathezentrale.de/>

144000er					
7200er					
360er		•			•••
20er	•	•			
1er				••••	
Zahl	32	389	4645	63264	1081086

$$389 = 360 + 20 + 9$$

$$4645 = 12 \times 360 + 16 \times 20 + 5$$

$$1081086 = 7 \times 144000 + 10 \times 720 + 3 \times 360 + 0 \times 20 + 6$$

← 18 „Zwanziger“

Für Kalenderzahlen findet eine Anpassung statt. Dafür wird einmalig die Umbündelung schon nach 18 Zwanzigern vorgenommen. So hat man an der dritten Stellenposition den Wert 360 (statt 400).

Vigesimalsystem (Basis 20) (V)

Europäische Sprachen



Von Elisabeth Hamel, CC BY 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=24726567>

Französisch:

80 – quatre-vingts

90 – quatre-vingts-dix

Dänisch: 20 = *tyve*

50 – halvtreds (*halvtredsindstyve*)

60 – tres (*tredsindstyve*)

70 – halvfjerds (*halvfjerdsindstyve*)

80 – firs (*fjerdsindstyve*)

90 – halvfems

Vigesimalsystem (Basis 20) (VI)

Baskisch

1	bat	11	hamaika	30	hogeita hamar
2	bi	12	hamabi	40	berrogei
3	hiru	13	hamahiru	50	berrogeita hamar
4	lau	14	hamalau	60	hirurogei
5	bost	15	hamabost	70	hirurogeita hamar
6	sei	16	hamasei	80	laurogei
7	zazpi	17	hamazazpi	90	laurogeita hamar
8	zortzi	18	hemezortzi	100	ehun
9	bederatzi	19	hemeretzi		
10	hamar	20	hogei		

An den baskischen Zahlwörtern lässt sich die additive und multiplikative Verknüpfung mit der Basiszahl 20 ablesen. „ta“ steht für „und“; der Multiplikator wird einfach davor gesetzt. Teilweise finden Lautanpassungen für die Bindung im Wort statt.

hogeita-hamar: $30 = 20 + 10$

berrogei: $40 = 2 \times 20$

Hiru-rogei: $60 = 3 \times 20$

$90 = 4 \times 20 + 10$

https://de.wikipedia.org/wiki/Baskische_Sprache#Zahlw%C3%B6rter

Vigesimalsystem (Basis 20) (VII)



Baskisch

1	bat	11	hamaika	30	hogeita hamar
2	bi	12	hamabi	40	berrogei
3	hiru	13	hamahiru	50	berrogeita hamar
4	lau	14	hamalau	60	hirurogei
5	bost	15	hamabost	70	hirurogeita hamar
6	sei	16	hamasei	80	laurogei
7	zazpi	17	hamazazpi	90	laurogeita hamar
8	zortzi	18	hemezortzi	100	ehun
9	bederatzi	19	hemeretzi		
10	hamar	20	hogei		

Können Sie diese Zahlwörter übersetzen?

hogei-ta-lau

hogei-ta-hama-lau

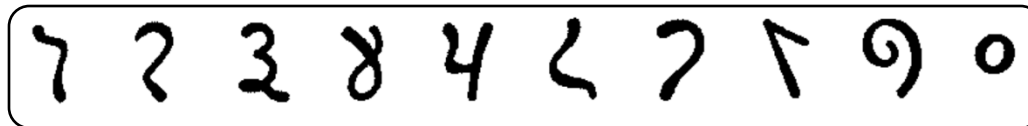
hiru-rogei-ta-hama-hiru

lau-rogei-ta-hemeretzi

80 und 18
60 und 13
20 und 14
20 und 4

https://de.wikipedia.org/wiki/Baskische_Sprache#Zahlw%C3%B6rter

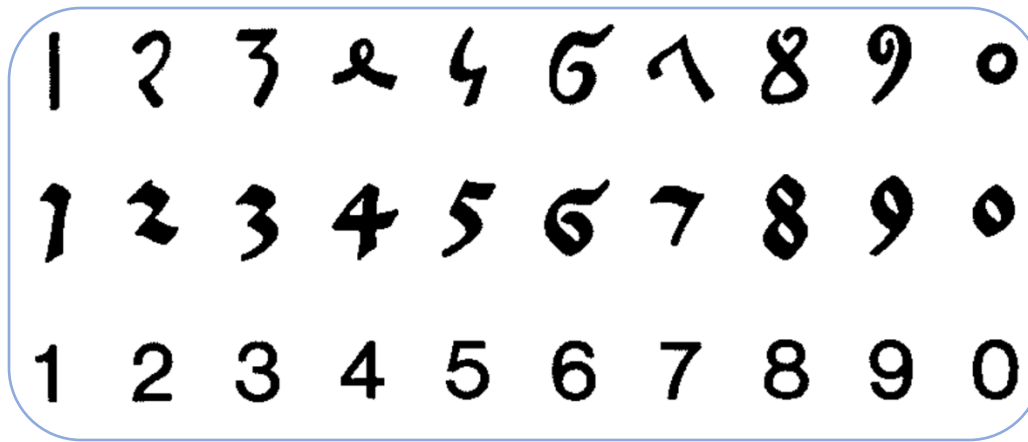
Indisch-arabische Zahlzeichen (I)



Indien



Arabien

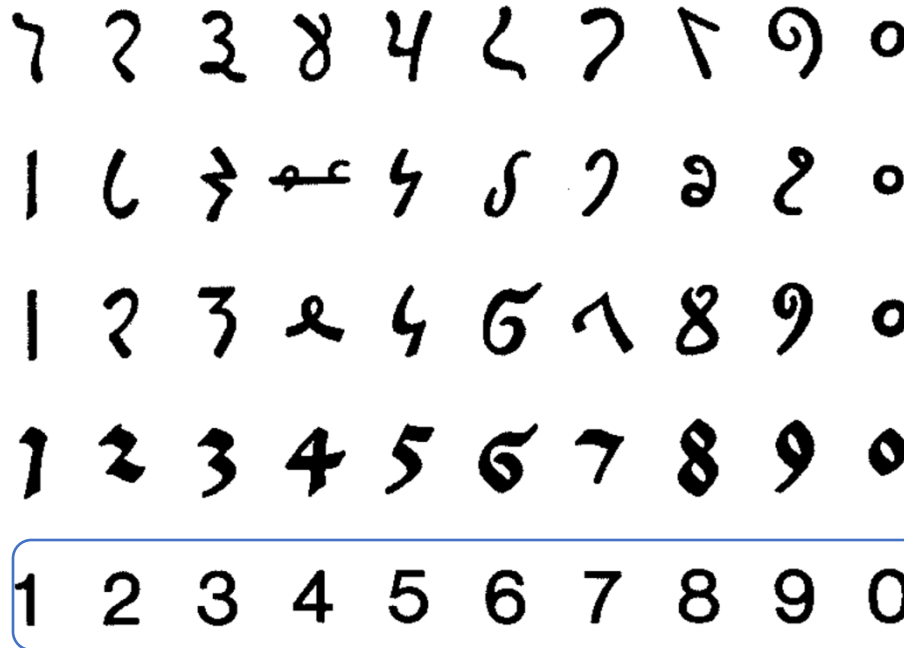


Europa (ab 1500)

Unsere Ziffern haben ihren Ursprung in Indien. Da sie jedoch über Arabien zu uns gekommen sind, werden sie meist als arabische Ziffern bezeichnet.

http://sfabel.tripod.com/mathematik/themen_arithmetik_hz.html

Indisch-arabische Zahlzeichen (II)

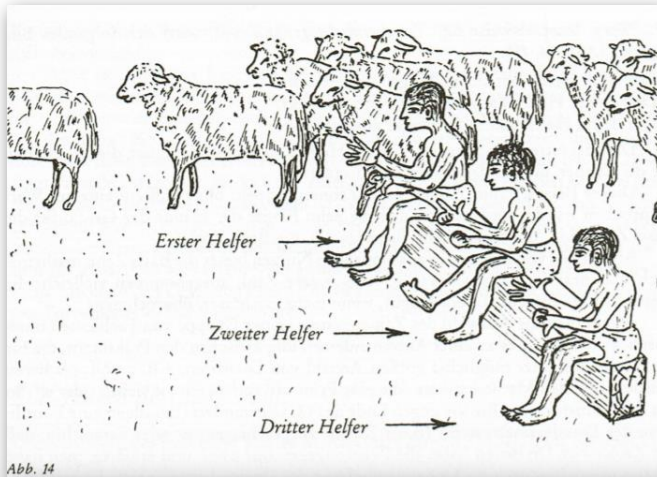


Albrecht Dürer (1471-1528) hat wesentlich an der optischen Gestaltung gewirkt. Das Rechnen mit diesen Ziffern beschreibt Adam Ries (1492-1559) in seinem Buch „Rechen mit der Feder“. Der Einzug der indisch-arabischen Zahlzeichen hat den Gebrauch der römischen Zahlzeichen und damit das „Rechnen auf der Linie“ abgelöst.

Dezimalsystem

Das dezimale Stellenwertsystem und Variationen

Dezimalsystem – mit Händen ...



Einer
Zehner
Hunderter

627 Schafe – 15 Finger

Dritter Helfer		Zweiter Helfer		Erster Helfer	
links	rechts	links	rechts	links	rechts
6		2		7	
600		20		7	

Große Anzahlen lassen sich so ohne Zahlwörter bestimmen. Die Anzahlen sind präzise und lassen sich überprüfen. Zählergebnisse ermöglichen eine Mengenvorstellung und lassen sich vergleichen. „Stellenwert“ der Finger über Bündelung von Einheiten.

Finger als Rechenmaschine: **10er-System**

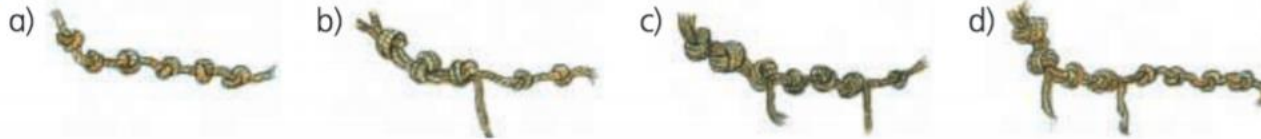
Ifrah, G., 2010, S.57

... mit Knoten

- 2** Anamaya hat drei Schnüre genommen und die Zahl 324 geknotet. Die Knoten sind verschieden dick. Wie hat Anamaya die Knoten gemacht?



- 3** Anamayas Geschwister haben auch Zahlen geknotet. Kannst du sie lesen?



- 5** Am Abend am Lagerfeuer hat Anamaya Zahlenrätsel gestellt. Findest du die Zahl? Eine Knotenschnur kann dir helfen.

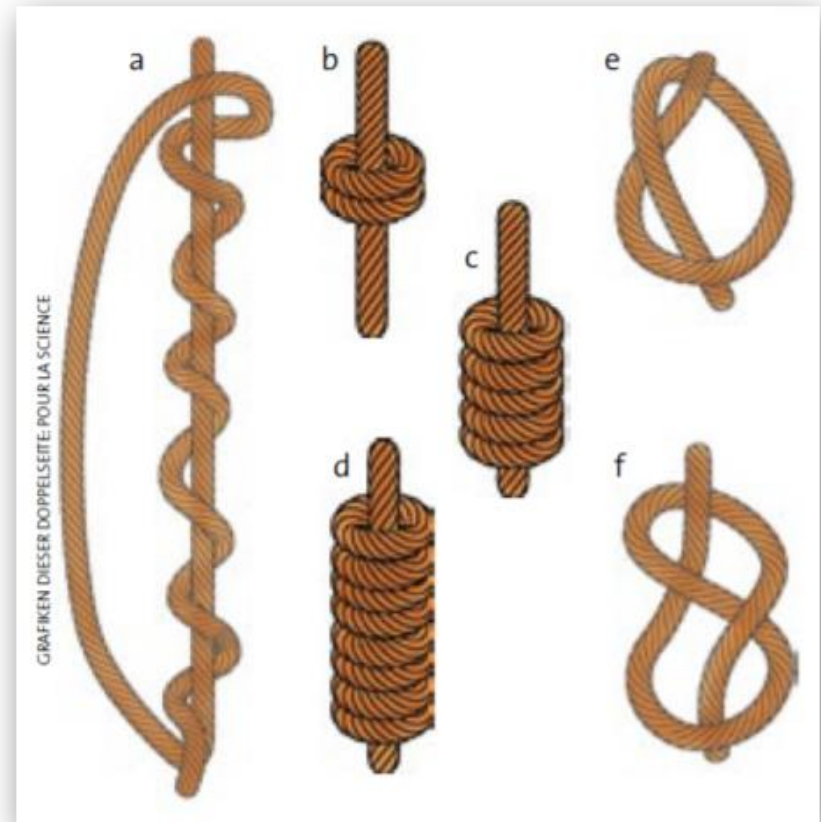


Welt der Zahl 3

Hintergrund: Quipus der Inka (I)

Knotenarten

Hintergrund dieser Schulbuchseite sind die Knotenzahlen der Inka. Dabei werden bestimmte Knotentechniken eingesetzt. Die „Einer“ werden mit Langknoten dargestellt (a-d). Für höhere Potenzen wurden einfach Knoten in der entsprechenden Anzahl verwendet (e). Der Achterknoten (f) steht für die 1.



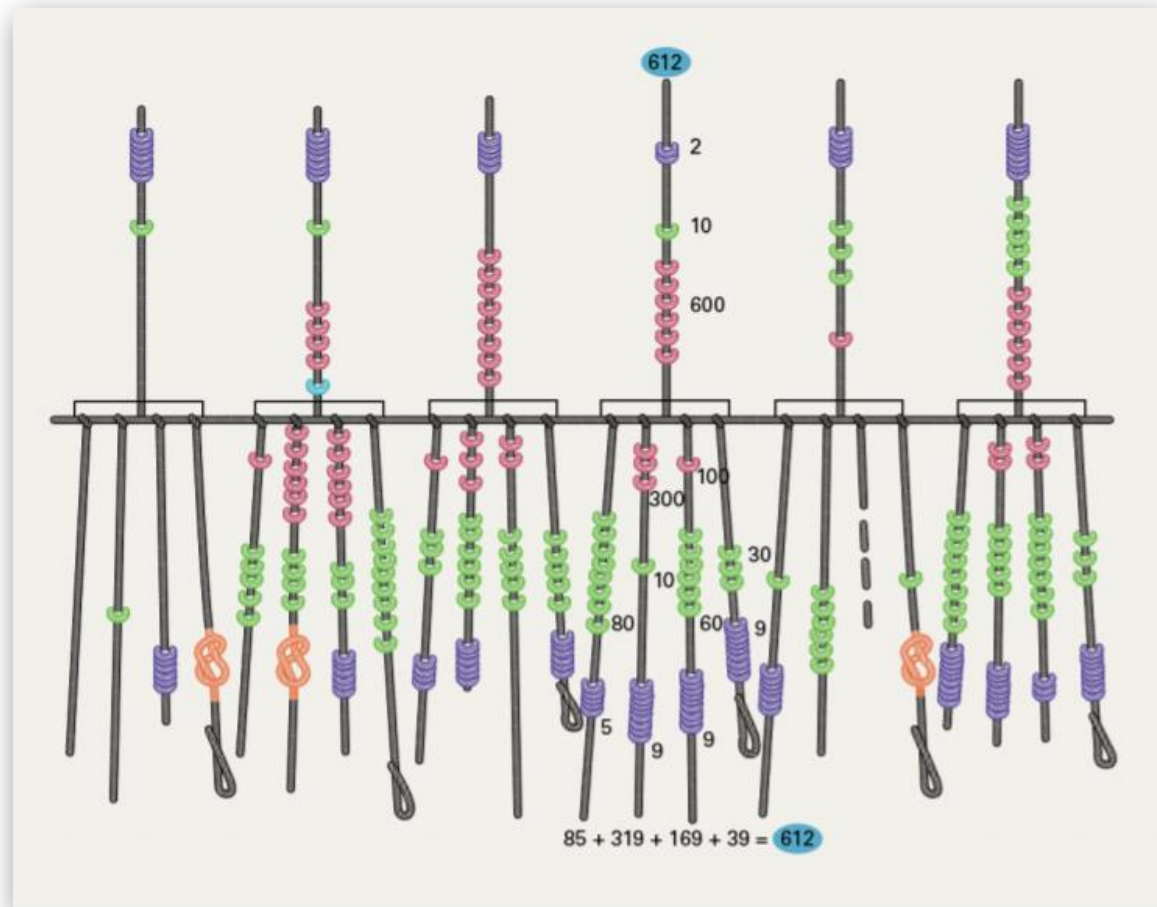
Loic Mangin (2013); siehe Lesebox

Hintergrund: Quipus der Inka (II)

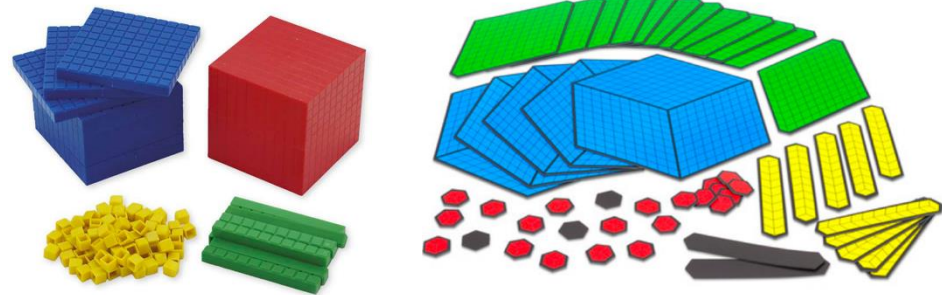
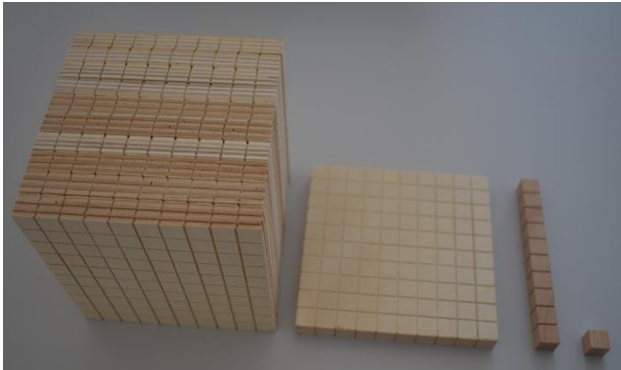
Knotenposition

Die Rechenschüre wurden an einer Hauptschnur zur Aufgaben gebündelt. Der Stellenwert wird über die Entfernung der Knoten von der „Hauptschnur“ bestimmt.

An der Beispielaufgabe $85 + 319 + 169 + 39 = 612$ lässt sich dieses Vorgehen nachvollziehen. (Die Farben dienen nur der deutlicheren Markierung.)

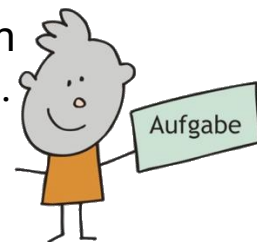


... Systemblöcke (I)



Die Systemblöcke (Dienesmaterial) bestehen aus „Einerwürfel“, „Zehnerstange“, „Hunderterplatte“ und „Tausenderwürfel“. Sie dienen im Unterricht zur enaktiven Erkundung und Darstellung des Dezimalsystems. Zu Zeiten der neuen Mathematik gab es dieses Material auch zu anderen Basiszahlen!

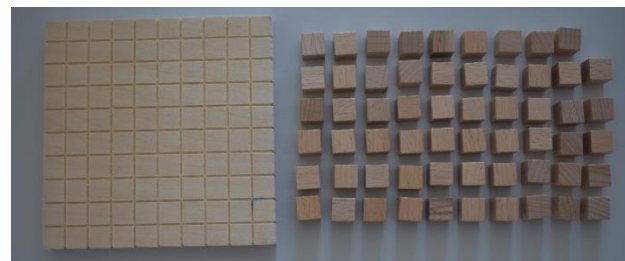
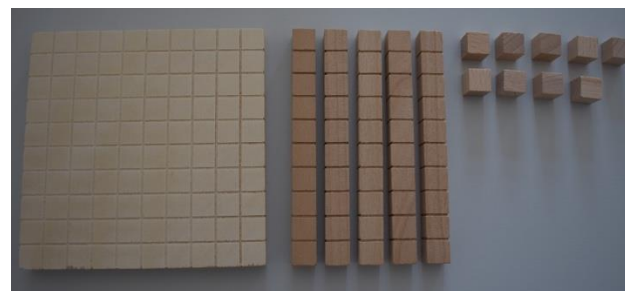
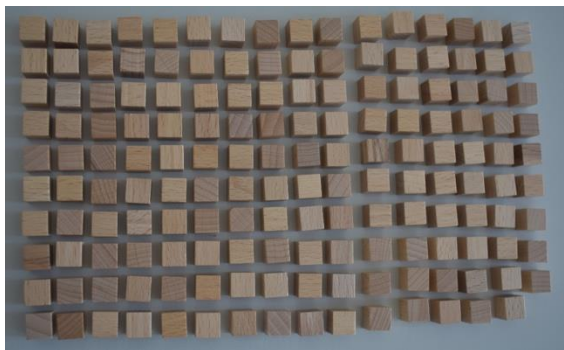
Heute gibt es dieses Material auch in verschiedenen Farben und mit passendem magnetischen Demonstrationsmaterial für die Tafel bzw. auch in digitaler Form.



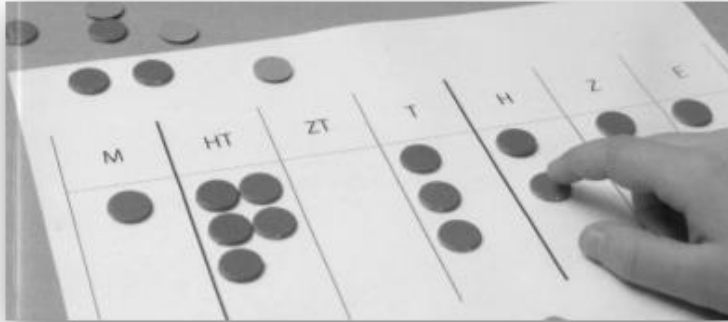
Wie lässt sich die Zahl 159 in verschiedenen Bündelungen mit Systemblöcken darstellen?

... Systemblöcke (II)

159 in verschiedenen Bündelungen



... Rechenplättchen und Ziffernkarten



Million	Hunderttausend	Zehntausend	Tausend	Hundert	Zehner	Einer
M	HT	ZT	T	H	Z	E
	••	•	•••	•••••	•••	••••
	2	1	3	5	3	4
zweihundertdreizehntausend fünfhundertvierunddreißig						

M	HT	ZT	T	H	Z	E
	<u>4</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>9</u>	<u>1</u>	<u>3</u>
vierhundertsevenundsechzigtausend neunhundertdreizehn						

Zahlenbuch 4

... und mit Ziffern

HT	ZT	T	H	Z	E
1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7
0	0	9	5	8	2
1	1	0	0	2	2

$$\sum a_i 10^i$$

$$a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

Ohne führende Nullen ist die Darstellung für natürliche Zahlen eindeutig!

$$10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 = 111.111$$

$$2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 234567$$

$$0 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 = 9582$$

$$1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 = 110022$$

10^e Tabulag ita stabel

1	1	2	2 ⁰
10	2	4	2 ¹
100	4	8	2 ²
1000	8	16	2 ³
10000	16	32	2 ⁴
100000	32	64	2 ⁵
1000000	64	128	2 ⁶
10000000	128	256	2 ⁷
100000000	256	512	2 ⁸
1000000000	512	1024	2 ⁹
10000000000	1024		2 ¹⁰

Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek, Hannover,
Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=14726138> (aktuell nicht zugänglich)



Videovorlesung 1

Stellenwertsysteme

Stellenwertsysteme: Basis und Ziffern

dezimales Stellenwertsystem,
arabische Ziffern $\{0,1,\dots,9\}$

duales Stellenwertsystem
arabische Ziffern $\{0,1\}$

Stellenwertsystem zur beliebigen
Basis g $\{0, z_1, z_2, \dots, z_{g-1}\}$

Stellenwertsystem zur Basis 8
arabische Ziffern $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

hexadezimaler Stellenwertsystem
arabische Ziffern und Buchstaben
 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$

Bilden Sie
„Zahlworte“ (BAD) und
berechnen Sie den Wert
im Dezimalsystem!

$$\sum a_i 10^i$$

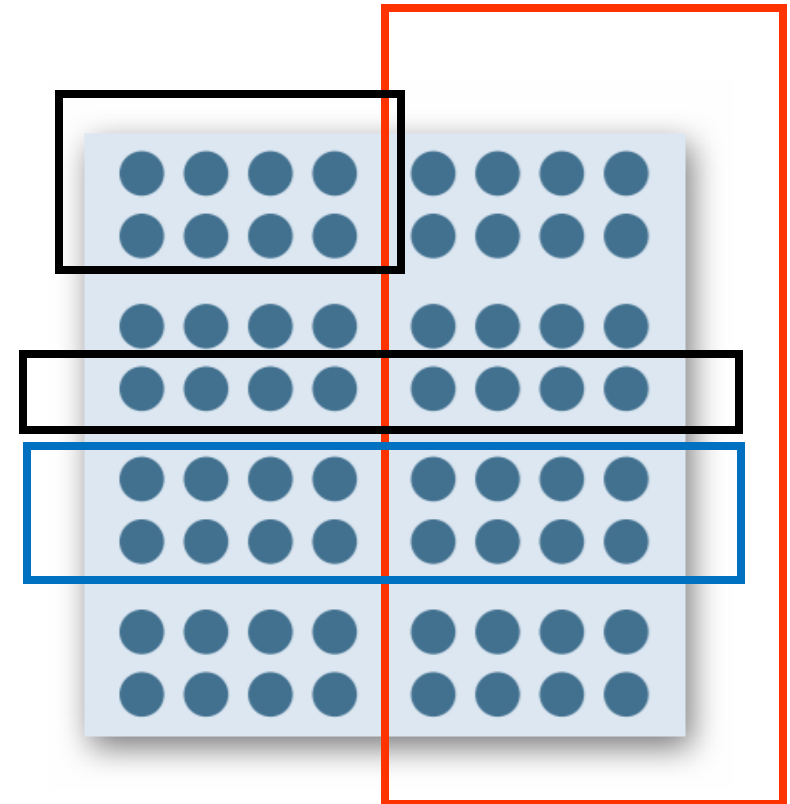
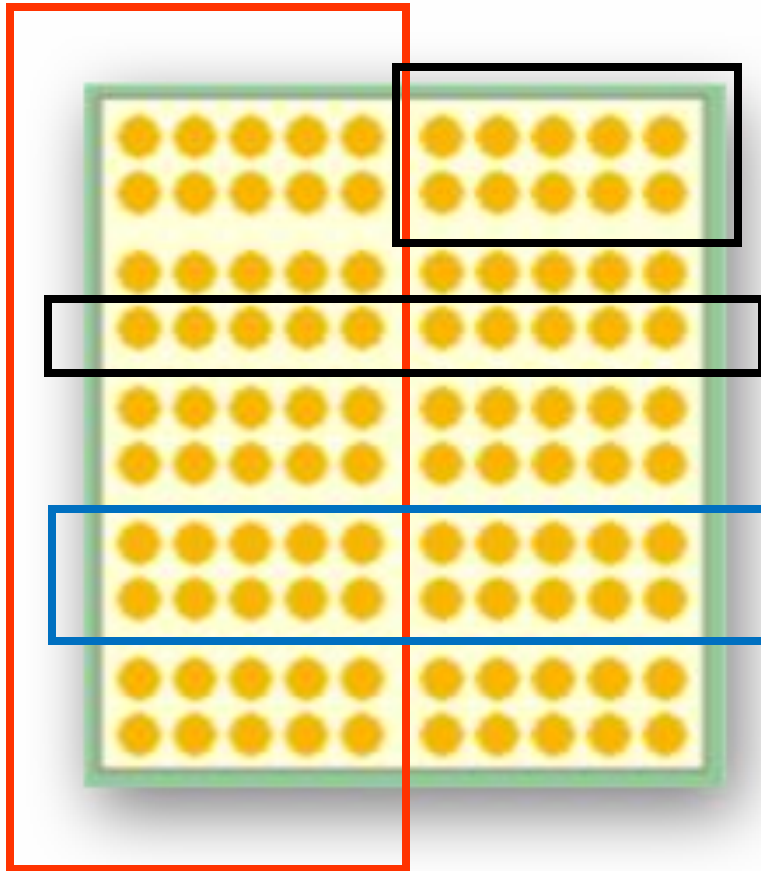
$$\sum a_i 8^i$$

$$\sum a_i 2^i$$

$$\sum a_i 16^i$$

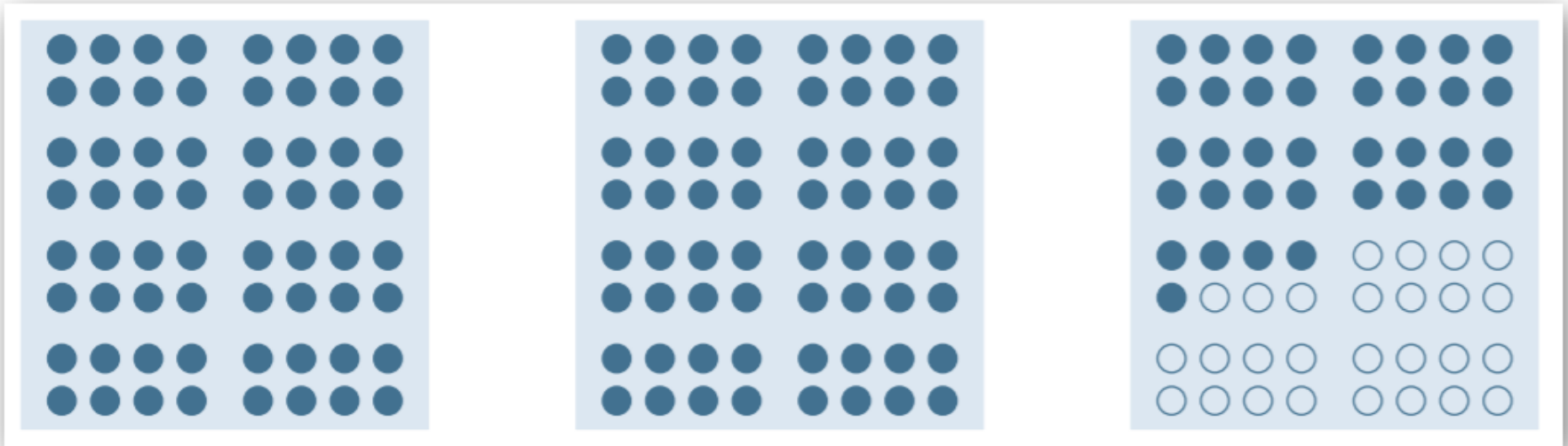
$$\sum a_i g^i$$

Oktalsystem – 100 Feld (I)



10_8
 20_8
 40_8

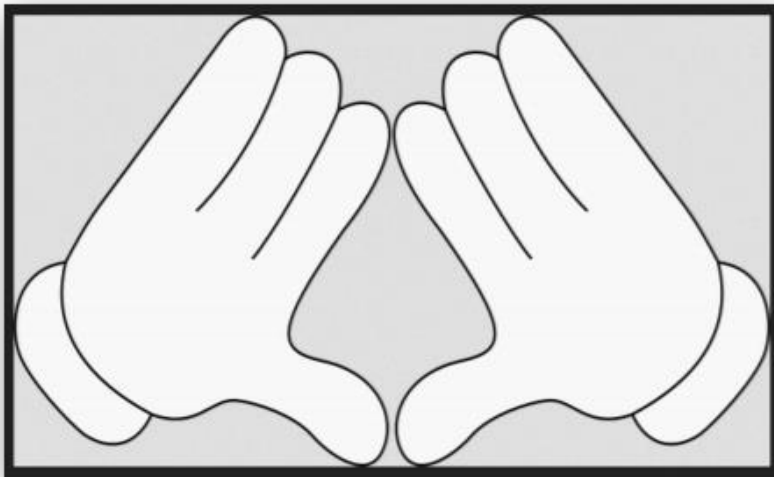
Oktalsystem – 100 Feld (II)



Welche Zahl ist hier dargestellt (oktal und dezimal)?

Stellen Sie die Zahl 475_8 am 100-Feld im Oktalsystem /
Dezimalsystem dar!

Oktalsystem – Rechnen mit Fingern



$$\begin{aligned}4_8 + 1_8 &= 5_8 \\4_8 + 2_8 &= 6_8 \\4_8 + 3_8 &= 7_8 \\4_8 + 4_8 &= 10_8\end{aligned}$$

Quelle unbekannt

$$6_8 + 6_8$$

$$35_8 + 7_8$$

$$23_8 + 12_8$$

$$26_8 + 15_8$$

$$12_8 - 6_8$$

$$35_8 - 15_8$$

Rechenaufgaben im Oktalsystem

$$1_8 + 7_8 =$$

$$2_8 + 7_8 =$$

$$3_8 + 7_8 =$$

$$4_8 + 7_8 =$$

$$17_8 + 2_8 =$$

$$15_8 + 4_8 =$$

$$13_8 + 6_8 =$$

$$11_8 + 10_8 =$$

$$14_8 + 11_8 =$$

$$15_8 + 11_8 =$$

$$16_8 + 11_8 =$$

$$17_8 + 11_8 =$$

$$17_8 - 5_8 =$$

$$15_8 - 5_8 =$$

$$13_8 - 5_8 =$$

$$11_8 - 5_8 =$$

$$2_8 + 7_8 =$$

$$13_8 + 7_8 =$$

$$24_8 + 7_8 =$$

$$35_8 + 7_8 =$$

$$34_8 - 12_8 =$$

$$33_8 - 13_8 =$$

$$32_8 - 14_8 =$$

$$31_8 - 15_8 =$$

Oktalsystem – Malfolgen in der „100 Tafel“

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

An der Hundertertafel lassen sich im Dezimalsystem Muster der Einmaleins-Reihen entdecken und damit auch Beziehungen zwischen den Reihen erkunden. Falls Sie das noch nie gesehen oder gemacht haben, sollten Sie mal einige Einmaleins-Reihen im Dezimalsystem erkunden - und dann ähnliches Muster im Oktalsystem an der „100-Tafel“ eintragen (Vorlage nächste Folie). Es lassen sich dabei Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen Oktal- und Dezimalsystem entdecken.

Muster in der $(100)_8$ –Tafel: 1x1 Reihen

1	2	3	4	5	6	7	10
11	12	13	14	15	16	17	20
21	22	23	24	25	26	27	30
31	32	33	34	35	36	37	40
41	42	43	44	45	46	47	50
51	52	53	54	55	56	57	60
61	62	63	64	65	66	67	70
71	72	73	74	75	76	77	100

Wie sehen die Reihen im Oktalsystem aus.

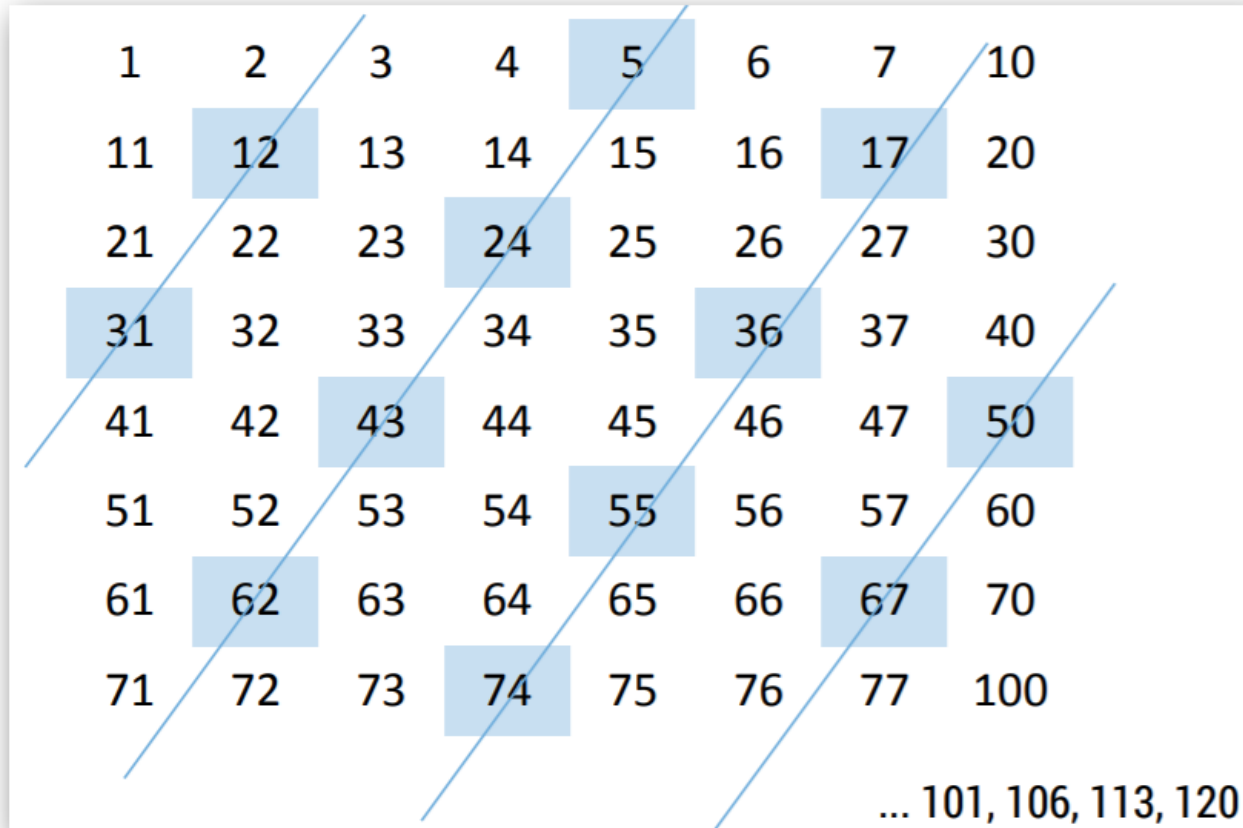
Es folgen einige Beispiele – vielleicht wollen Sie selber erst mal auf Erkundungstour gehen, bevor Sie die nachfolgenden Folien anschauen.

Vergleichen Sie die Muster mit den Mustern im Dezimalsystem!

Oktalsystem – Malfolgen in der „100 Tafel“

1	2	3	4	5	6	7	10	1	2	3	4	5	6	7	10
11	12	13	14	15	16	17	20	11	12	13	14	15	16	17	20
21	22	23	24	25	26	27	30	21	22	23	24	25	26	27	30
31	32	33	34	35	36	37	40	31	32	33	34	35	36	37	40
41	42	43	44	45	46	47	50	41	42	43	44	45	46	47	50
51	52	53	54	55	56	57	60	51	52	53	54	55	56	57	60
61	62	63	64	65	66	67	70	61	62	63	64	65	66	67	70
71	72	73	74	75	76	77	100	71	72	73	74	75	76	77	100

Malfolgen im Oktalsystem



Muster im Hunderterfeld (I)

$$10_{10} = 12_8$$

1	2	3	4	5	6	7	10
11	12	13	14	15	16	17	20
21	22	23	24	25	26	27	30
31	32	33	34	35	36	37	40
41	42	43	44	45	46	47	50
51	52	53	54	55	56	57	60
61	62	63	64	65	66	67	70
71	72	73	74	75	76	77	100

Welche Zahl im
Dezimalsystem hat ein
ähnliches Muster in
der Hundertertafel?
Was fällt auf? Was ist
anders?

12er Reihe dezimal:

12, 24, 36, 48, 60,
72, 84, 96, 108, 120

Muster im Hunderterfeld (II)

1	2	3	4	5	6	7	10	1	2	3	4	5	6	7	10
11	12	13	14	15	16	17	20	11	12	13	14	15	16	17	20
21	22	23	24	25	26	27	30	21	22	23	24	25	26	27	30
31	32	33	34	35	36	37	40	31	32	33	34	35	36	37	40
41	42	43	44	45	46	47	50	41	42	43	44	45	46	47	50
51	52	53	54	55	56	57	60	51	52	53	54	55	56	57	60
61	62	63	64	65	66	67	70	61	62	63	64	65	66	67	70
71	72	73	74	75	76	77	100	71	72	73	74	75	76	77	100
1	2	3	4	5	6	7	10	1	2	3	4	5	6	7	10
11	12	13	14	15	16	17	20	11	12	13	14	15	16	17	20
21	22	23	24	25	26	27	30	21	22	23	24	25	26	27	30
31	32	33	34	35	36	37	40	31	32	33	34	35	36	37	40
41	42	43	44	45	46	47	50	41	42	43	44	45	46	47	50
51	52	53	54	55	56	57	60	51	52	53	54	55	56	57	60
61	62	63	64	65	66	67	70	61	62	63	64	65	66	67	70
71	72	73	74	75	76	77	100	71	72	73	74	75	76	77	100

Muster im Hunderterfeld (III)

1	2	3	4	5	6	7	10
11	12	13	14	15	16	17	20
21	22	23	24	25	26	27	30
31	32	33	34	35	36	37	40
41	42	43	44	45	46	47	50
51	52	53	54	55	56	57	60
61	62	63	64	65	66	67	70
71	72	73	74	75	76	77	100



Bündelsystem in der Schule

	Riesengruppen	Große Gruppen	Kleine Gruppen	Restliche Kinder
Vierereinteilung		1	3	2
Dreiereinteilung	1	0	1	0

Bündeln nach der Dreierregel

1.



Wie viele Bälle sind in einer Dose? Wie viele Dosen sind in einem Karton?
 Wie viele Bälle sind in einem Karton?

Denken und Rechnen 2
 (Ausgabe 1994)

Literaturverzeichnis

Ifrah, G. (2010). *Universalgeschichte der Zahlen*. Berlin: Haffmans & Tolkemitt.

Damerow, P. & Schmidt, S. (2004). Arithmetik im historischen Prozess: Wie „natürlich“ sind die „natürlichen Zahlen“? In: P. G. Müller, H. Steinbring & E. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 131-182). Seelze: Kallmeyer.