
Mathematik für Ingenieure - WS2023/24

Übungsblatt 3

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Nähern Sie die Sinuskurve zur Funktion

$$f : x \mapsto \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

in der Umgebung ihres ersten Maximums x_0 im positiven x -Bereich durch eine Parabel an.

- (a) Entwickeln Sie dazu die Taylor-Reihe $P_f(x)$ zu $f(x)$ um die Stelle x_0 und brechen Sie diese nach dem quadratischen Glied ab.
- (b) Zeigen Sie, dass für das Taylor-Polynom $P_2(x)$ zweiten Grades von $f(x)$ in x_0 gilt:

$$P_2(x_0) = f(x_0), \quad P_2'(x_0) = f'(x_0), \quad P_2''(x_0) = f''(x_0).$$

- (c) Skizzieren Sie den Verlauf von $f(x)$ und $P_2(x)$ in der Umgebung von x_0 .

Aufgabe 2: Für den freien Fall mit Luftwiderstand gilt das Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \ln\left(\cosh\left(\frac{gt}{v_0}\right)\right)$, wobei g die Fallbeschleunigung und v_0 die Grenzggeschwindigkeit $v_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ ist.

Geben Sie für die Funktion s das Taylorpolynom T_2 mit der Entwicklungsstelle $t_0 = 0$ an und überzeugen Sie sich, dass dieses Polynom das Weg-Zeit-Gesetz ohne Luftwiderstand liefert. Warum ist es sinnvoll, die Entwicklungsstelle $t_0 = 0$ zu wählen?

Aufgabe 3: Sei die Funktion

$$f : (x, y) \mapsto z = f(x, y) \quad \text{mit} \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

in Umgebung von $(x_0, y_0) \in D$ mindestens $(k+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\begin{aligned} P_k(x, y) = & f(x_0, y_0) + \\ & + \frac{1}{1!} \left(f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^1 + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^1 \right) \\ & + \frac{1}{2!} \left(f_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right) \\ & + \dots + \frac{1}{k!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \cdot f(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (1)$$

das Taylor-Polynom k -ter Näherung, des Weiteren

$$R_k(x, y) = \frac{1}{(k+1)!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{k+1} \cdot f(\xi_0, \chi_0), \quad (\xi_0, \chi_0) \in D \quad (2)$$

das Restglied k -ter Näherung.

(a) Schätzen Sie die folgenden Funktionen an der Stelle (x_0, y_0) durch ein Taylor-Polynom $P_3(x, y)$ dritten Grades in x und y ab.

(i) $f(x, y) = e^x \cdot \sin y, (x_0, y_0) = (0, 0)$ (ii) $f(x, y) = \sin x \cdot \cos y, (x_0, y_0) = (0, 0)$.

(b) Bilden Sie für (i) und (ii) jeweils formal das Restglied.

Hinweis: Die Stelle $(\xi_0, \chi_0) \in D$ hängt von (x, y) ab und ist nicht zu berechnen.

(c) Stellen Sie jeweils die Graphenflächen zu f und P_3 zusammen graphisch dar.

Aufgabe 4: Gegeben sei das (von $x > 0$ abhängige) Integral

$$I(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{3}$$

welches auch als *Gaussches Fehlerintegral* bezeichnet wird.

(a) Entwickeln Sie den Integranden an der Stelle $t = 0$ in seine Potenzreihe. Brechen Sie die Reihenentwicklung nach dem dritten (von Null verschiedenen) Glied ab.

(b) Berechnen Sie näherungsweise das gegebene Integral durch Verwendung der Näherung in (a).

(c) Geben Sie $I(1)$ auf vier Dezimalen nach dem Komma an. Veranschaulichen Sie den Wert als Flächeninhalt im Koordinatensystem.

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Entwickeln Sie die Funktionen f um die Stelle x_0 in eine Taylor-Reihe.

(a) $f : x \mapsto y = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{3}$ (b) $f : x \mapsto y = e^{-x}, x_0 = 1$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und untersuchen Sie dann die Reihe auf Konvergenz in den Randpunkten. Geben Sie den Konvergenzbereich an.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^{k(k+1)}}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!(x+1)^k}{4^k}$
 (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k^k}$ (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(3x-2)^k}{2k-1}$ (f) $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{\ln(k) \cdot (6x+3)^k}{6^k \cdot \sqrt{k}}$

Hinweis 1: Bringen Sie die Potenzreihen bei (e) und (f) zuerst in die Form $\sum_k a_k(x - x_0)^k$.

Hinweis 2: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(k)}{\ln(k+a)} = 1$ für konstantes a

Aufgabe 7: Wird ein Körper der Länge l_1 um die Temperaturdifferenz ΔT erwärmt, so vergrößert sich seine Länge auf l_2 nach der Formel $l_2 = l_1 \sqrt[3]{1 + \gamma \Delta T}$ (γ – Materialkonstante). Zeigen Sie, dass bei geringer Erwärmung die Näherungsformel $l_2 \approx l_1(1 + \frac{\gamma}{3} \Delta T)$ angewendet werden kann.

Hinweis: Setzen Sie $x = \gamma \Delta T$ und nutzen Sie Aufgabe 2.