LAG N5.2 Hausaufgabe

Josua Kowalzik

18. November 2021

1 Aufgabenstellung

Die Ziffern ihrer 7-stelligen Immatrikulationsnummer seien (von links nach rechts gelesen) die Ziffern $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$.

Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$(x_1, 1x_2, x_3), (x_4, a, x_5), (x_6, x_7, a) \in \mathbb{R}^3$$

linear abhängig bzw. linear unabhängig sind.

Machen Sie die Probe, indem Sie die von Ihnen gefundenen Zahlen a einsetzen! (Nur dafür dürfen Sie deinen Taschenrechner benutzen.)

2 Lösung

Matrikelnummer: 5040486
Vektoren: $v_1 := (5, 0, 4) \quad v_2 := (0, a, 4) \quad v_3 := (8, 6, 4)$

Linear unabhängig sind die drei Vektoren für alle a, bei denen das lineare Gleichungssystem

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0_3$$

mit den Variablen $k_1, k_3, k_3 \in \mathbb{R}$ mehr als eine Lösung hat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & a & 6 & 0 \\ 4 & 4 & a & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & a & 6 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a}{4} - \frac{8}{5} & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS welches durch letztere Matrix dargestellt wird hat genau dann mehrere Lösungen, wenn mindestens zwei der drei Zeilen "die selben Informationen enthalten", also sich nur um einen Faktor unterscheiden. Da Zeile z_1 an der ersten Stelle eine 5 enthält und die beiden anderen Zeilen hier eine 0 stehen haben bleiben nur z_2 und z_3. Für lineare Abhängigkeit muss also gelten:

$$z_2 = z_3 \cdot l \quad \text{mit } l \in \mathbb{R}$$

Es ergeben sich die beiden Gleichungen

$$a = 1 \cdot l \quad \Rightarrow \quad a = l \tag{1}$$
$$6 = \left(\frac{a}{4} - \frac{8}{5}\right) \cdot l \tag{2}$$

Durch einsetzen von (1) in (2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} & & 6 &= \left(\frac{a}{4} - \frac{8}{5}\right) \cdot a \\ &\Rightarrow & 0 &= \frac{a^2}{4} - \frac{8a}{5} - 6 \\ &\Rightarrow & 0 &= \frac{1}{4}\left(a^2 - \frac{32}{5}a - 24\right) \end{aligned}$$

mit der p-q-Formel ergeben sich für a die beiden Lösungen

$$a_1 = \frac{16}{5} + \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 + 24} = \frac{16 + 2\sqrt{214}}{5}$$
$$a_2 = \frac{16}{5} - \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 + 24} = \frac{16 - 2\sqrt{214}}{5}$$

Die drei Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind also linear abhängig für $a = \dfrac{16 \pm 2\sqrt{214}}{5}$
$\Rightarrow$ linear unabhängig für $a \in \left\{x \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{16\pm2\sqrt{214}}{5}\right\}\right\}$

<u>Probe:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & \frac{16\pm2\sqrt{214}}{5} & 6 & 0 \\ 4 & 4 & \frac{16\pm2\sqrt{214}}{5} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & \frac{16\pm2\sqrt{214}}{5} & 6 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-8\pm\sqrt{214}}{10} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{\frac{16\pm2\sqrt{214}}{5}} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-8\pm\sqrt{214}}{10} & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-8\pm\sqrt{214}}{10} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-8\pm\sqrt{214}}{10} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-8\pm\sqrt{214}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses Lineare Gleichungssystem in Zeilenstufenform mit drei Variablen hat nun eine echte Nullzeile und nur noch zwei Stufen. Es gibt also mehr als eine Lösung.
$\Rightarrow$Die drei Vektoren sind linear abhängig.