



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

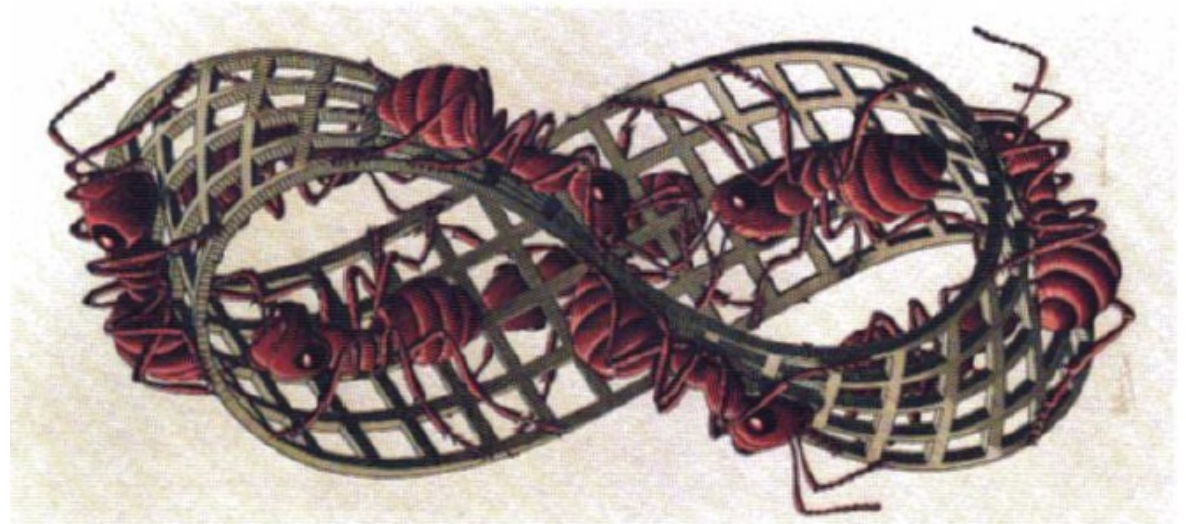
Zentrum für Lehrer*innenbildung und Unterrichtsforschung
Professur Grundschuldidaktik Mathematik



Didaktik der Geometrie

- Vorlesung Basismodul LAGS-GSD-MA-VM2

5.1 Ebene Figuren und 5.2 Körper



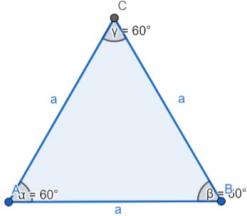
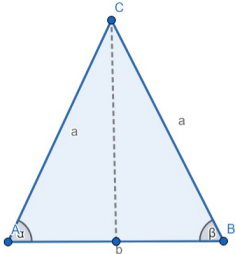
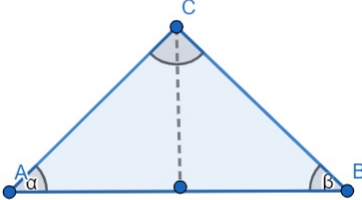
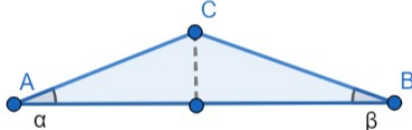
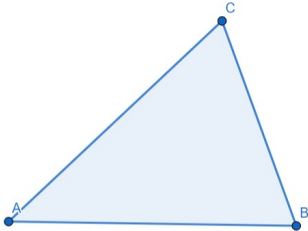
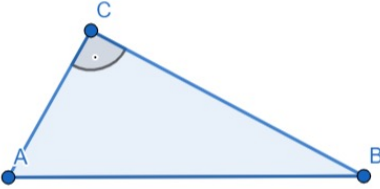

Grundschuldidaktik Mathematik
Prof. Dr. phil. Birgit Brandt
Sommersemester 2024/25

Denkentwicklung anregen: Aufgabe für „Lernpartnerschaften“

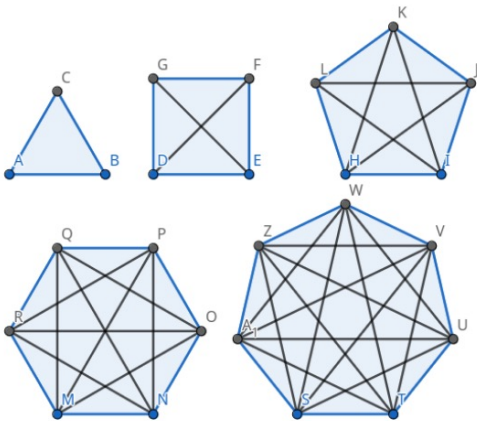
- Starten Sie mit einem Dreieck.
- Zeichnen Sie nun im Wechsel weitere Dreiecke, die jeweils paarweise zueinander verschieden sind.

Es sollen also im Laufe des Kooperationsprozesses lauter unterschiedliche Dreiecke auf dem Papier entstehen.



Winkel	Spitzwinklig 3 Winkel $< 90^\circ$	Rechtwinklig 1 Winkel = 90°	Stumpfwinklig 1 Winkel $> 90^\circ$
Seiten Gleichseitig 3 Seiten gleich lang 3 Winkel = 60°			
Gleichschenklig 2 Seiten gleich groß 2 Winkel gleich groß			
Beliebig 3 Seiten unterschiedlich lang			

5.1. Anzahl der Diagonalen in Polygonen

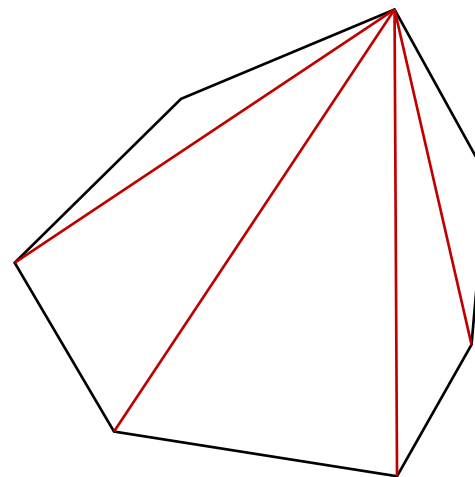


Erstellt in Geogebra - A. Kirsche, CC BY-NC-SA 4.0

Feststellung

(vgl. z.B. [Wikipedia, Diagonale \(Geometrie\)](#))

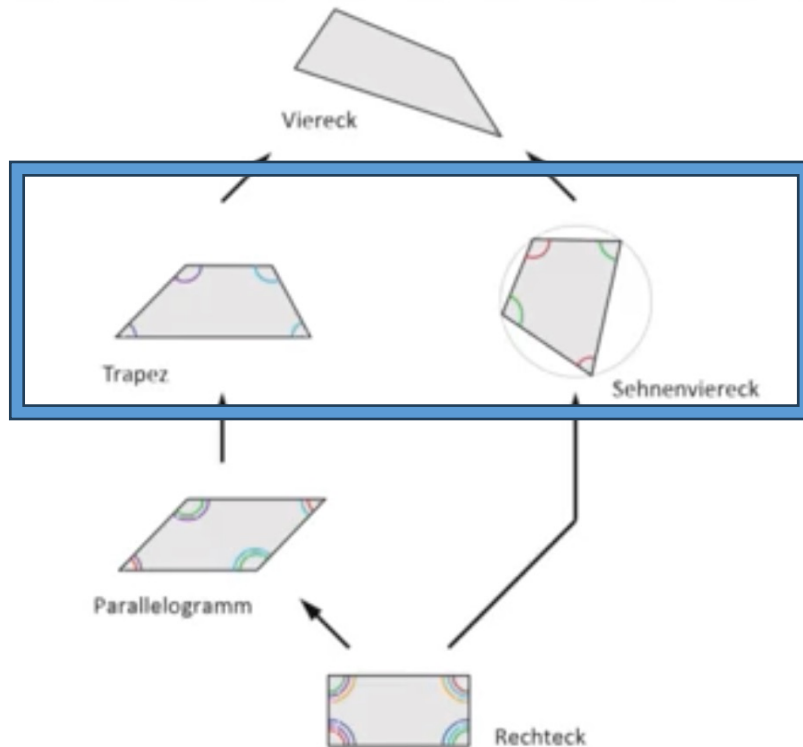
Ein n -Eck besitzt $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.



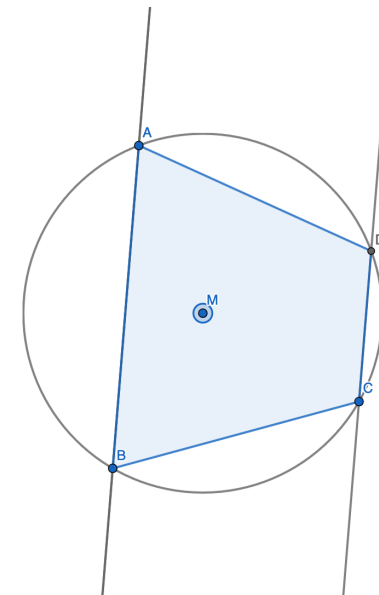
Anzahl der
Diagonalen einer
Ecke

Problemlösen: Ähnliche Probleme

Typisieren von Vierecken: Winkeleigenschaften



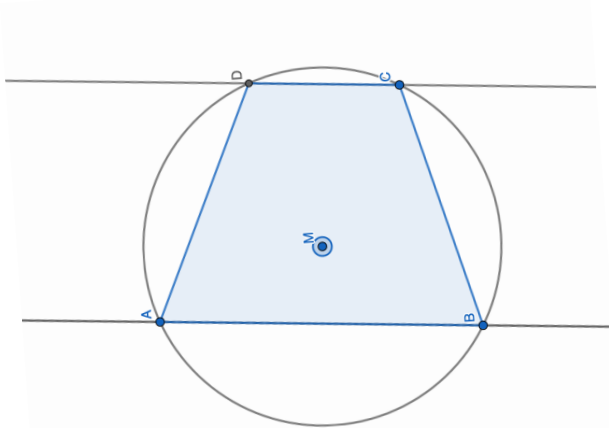
Oder: Wenn zwei parallele Geraden (g und h) einen Kreis schneiden und man die Schnittpunkte im Uhrzeigersinn miteinander verbindet, so entsteht ein symmetrisches Trapez.



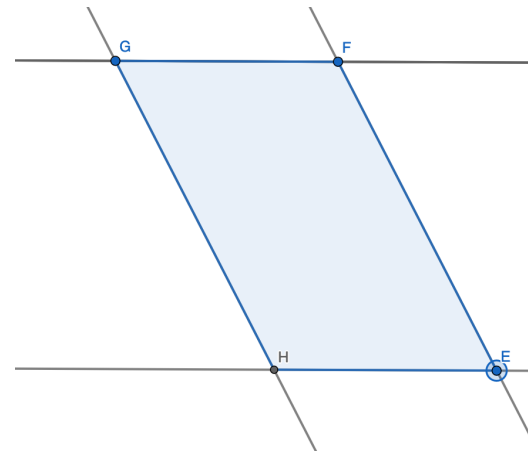
Ein Trapez, das auch ein Sehenviereck ist, ist ein symmetrisches Trapez.

Oder: Wenn ein Trapez einen Umkreis besitzt, so ist es ein symmetrisches Trapez.

Typisieren von Vierecken: Winkeleigenschaften



Symmetrisches Trapez:
gleichgroße Basiswinkel



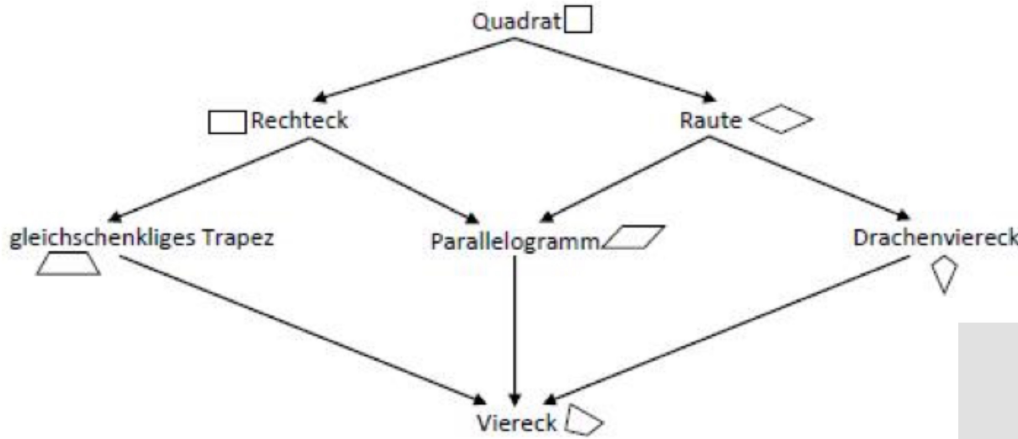
Parallelogramm: Winkel
nebeneinander ergänzen sich
zu einem gestreckten Winkel

Ein symmetrisches Trapez, das auch ein Parallelogramm ist, ist ein **Rechteck**.

Oder: *Wenn ein Parallelogramm einen Umkreis hat, dann ist es ein Rechteck.*

Symmetrisches Trapez – Gleichschenkliges Trapez

primakom.dzlm.de/552



Begriffshierarchie im "Haus der Vierecke"

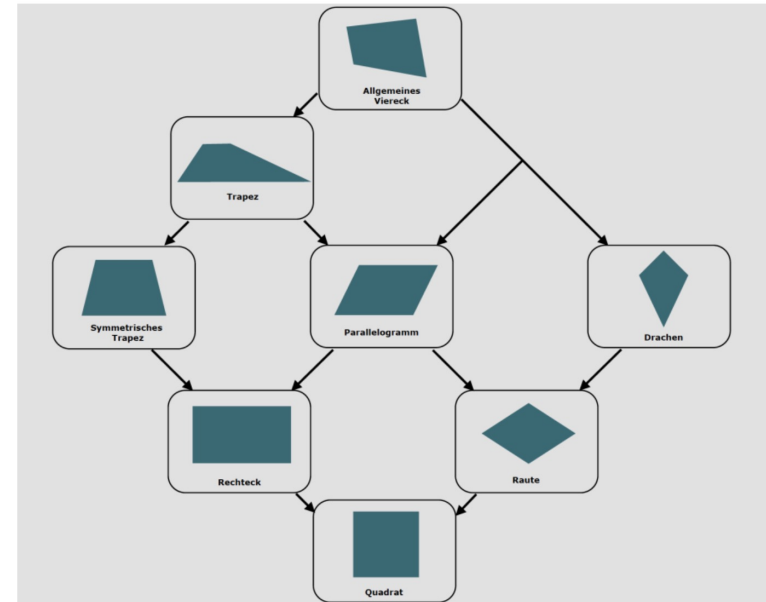
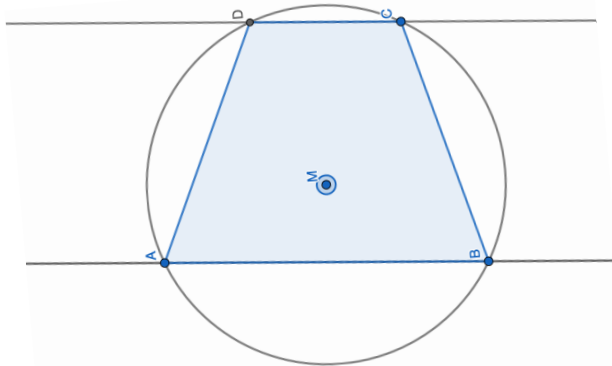


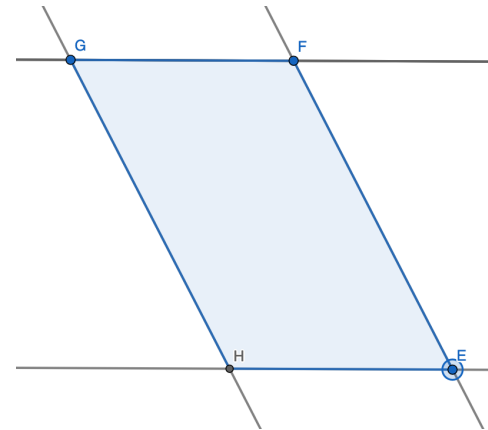
Abb. 9: Das Haus der Vierecke (in Anlehnung an Benz et al. 2015, S.186)

<https://pikas-mi.dzlm.de/inhalte/formen-erkunden/hintergrund>

Typisieren von Vierecken: Winkeleigenschaften



Gleichschenkliges Trapez:
gleichlange Seiten



Parallelogramm: Winkel nebeneinander
ergänzen sich zu einem gestreckten
Winkel

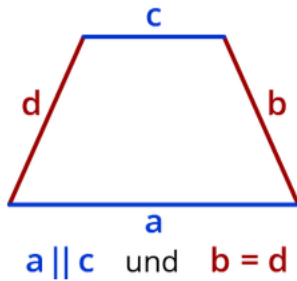
Ein Parallelogramm ist ein gleichschenkliges Trapez.

Wenn ein Parallelogramm einen Umkreis hat, dann ist es ein Rechteck.

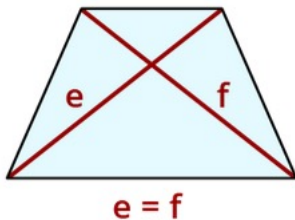
Ein gleichschenkliges Trapez, das eine Symmetrieachse hat, ist ein symmetrisches Trapez.

Gleichschenkliges Trapez als spezielles Trapez

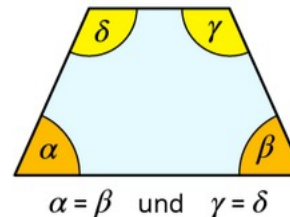
Seiten: ein Paar gegenüberliegender Seiten ist parallel, das andere Paar gleich lang



Diagonalen: sind gleich lang



Innenwinkel: an parallelen Seiten gleich groß



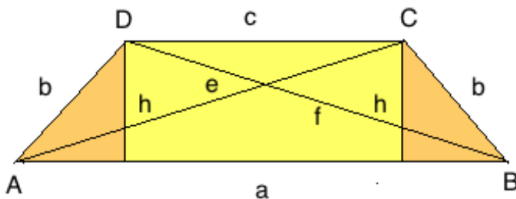
<https://www.kapiert.de/trapez-eigenschaften/>

Gleichschenkliges Trapez | Formeln & Beispiele

Hier erhältst du eine Lerneinheit zum Thema: **gleichschenkliges Trapez | Formeln & Beispiele**

Ein gleichschenkliges Trapez ist ein Viereck mit zwei gleich langen Seiten.

Lerneinheiten: [Tests](#) | [Übung](#) | [Quiz](#) | [10 Fragen](#) | [Aufgaben](#) | [Übungsblätter](#) | [Vierecke](#)



Bezeichnungen:

Seitenlängen: a , b und c

Flächenhöhe: h

Diagonalen e und f

Eigenschaften:

Fläche:

Das gleichschenklige Trapez ist eine viereckige Fläche.

Die Seiten a und c sind parallel.

Die Seiten b und d , die nicht parallel sind, nennt man Schenkel und sind gleich lang.

Der Normalabstand zwischen den parallelen Seiten ist die Höhe h .

Das gleichschenklige Trapez hat einen Umkreis.

Die Beschriftung der Eckpunkte erfolgt gegen den Uhrzeigersinn.

Winkel:

Die Winkelsumme aller 4 Winkel beträgt 360° .

Die Winkel an einem Schenkel z.B. α und δ ergeben zusammen 180° (sie sind supplementär).

Die Winkel α und β sowie γ und δ sind jeweils gleich groß.

Diagonalen/Symmetrie:

Die Diagonalen e und f sind gleich lang und halbieren sich.

Jedes gleichschenklige Trapez ist achsensymmetrisch zur Mittelsenkrechten der beiden parallelen Seiten.

<https://mein-lernen.at/geometrie-theorie/vierecke/gleichschenkliges-trapez/gleichschenkliges-trapez/>

Gleichschenkliges Trapez als spezielles Trapez

Gleichschenkliges und symmetrisches Trapez [Bearbe

In Lehrbüchern finden sich mehrere Varianten zur Charakterisierung eines **gleichschenkligen Trapezes**, insbesondere:[3]

- Ein Trapez heißt gleichschenklilig, wenn die beiden Seiten, die nicht Grundseiten sind, gleich lang sind.[2]
- Ein Trapez heißt gleichschenklilig, wenn die beiden **Innenwinkel** an einer der parallelen Seiten gleich groß sind.[4][5]
- Ein Trapez heißt gleichschenklilig, wenn es eine zu einer Seite senkrechte **Symmetrieachse** besitzt.[3]

[https://de.wikipedia.org/wiki/Trapez_\(Geometrie\)#cite_note-6](https://de.wikipedia.org/wiki/Trapez_(Geometrie)#cite_note-6)

5.2 Typisieren von Vierecken

Gleichlange Seiten:

2 gleichlange Seiten nebeneinander:

2 gleichlange Seiten gegenüber:

2 Paar gleichlange Seiten nebeneinander:

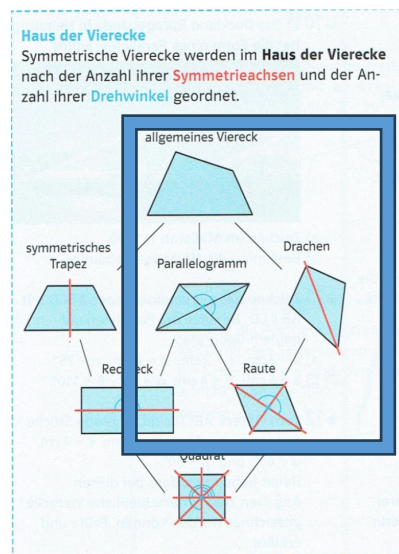
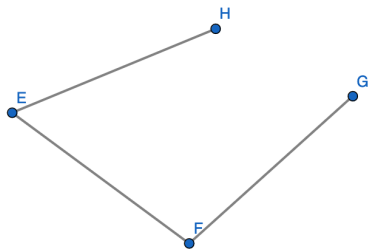
2 Paar gleichlange Seiten gegenüberliegend:

3 gleichlange Seiten:

Je 2 Paar gleichlange Seiten nebeneinander/gegenüber:

4 gleichlange Seiten:

-
-
- Drachenviereck
- Parallelogramm
-
- Raute
- Raute



Haus der Vierecke (Symmetrie)

Quelle: Schnittpunkt Mathematik 7 (Klett, 2019), S. 138

5.2 Typisieren von Vierecken

Senkrechte Seiten:

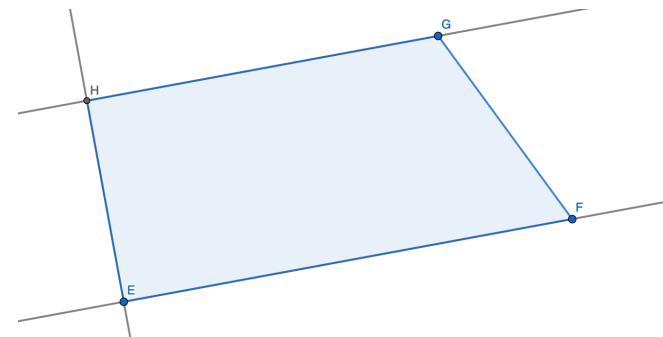
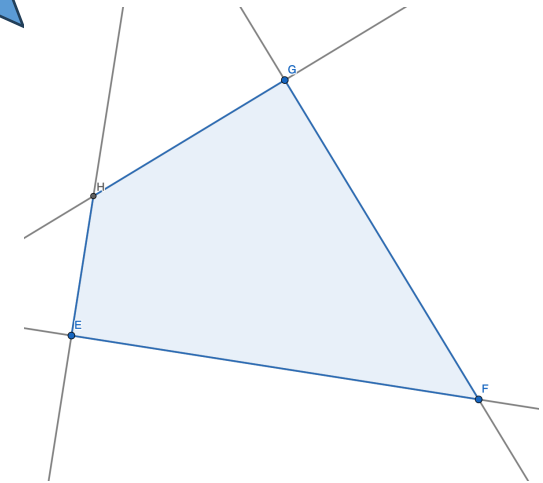
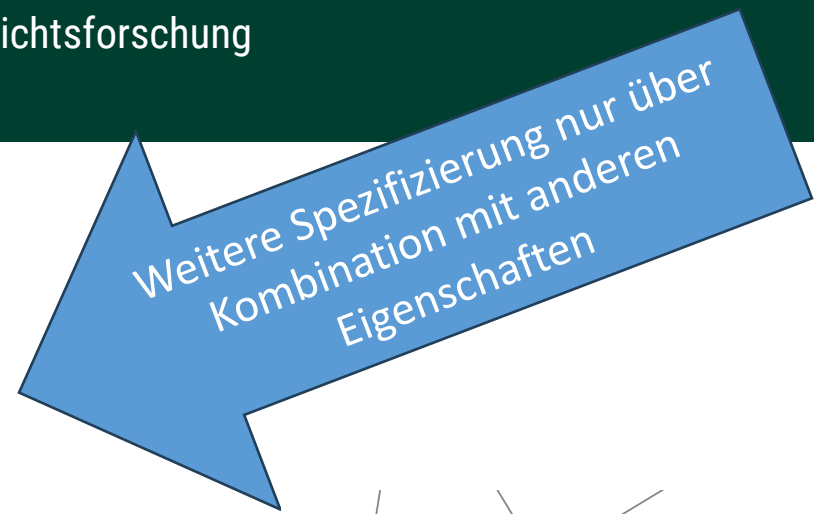
Ein Paar Seiten: —

Zwei Paar senkrechte Seiten (gegenüber): —

Drei Paar senkrechte Seiten:

Rechteck

**Zwei Paar senkrechte Seiten
nebeneinander oder auch ein
paar senkrechte Seiten und ein
paar parallele Seiten: Trapez mit
rechtem Winkel**



5.2 Typisieren von Vierecken

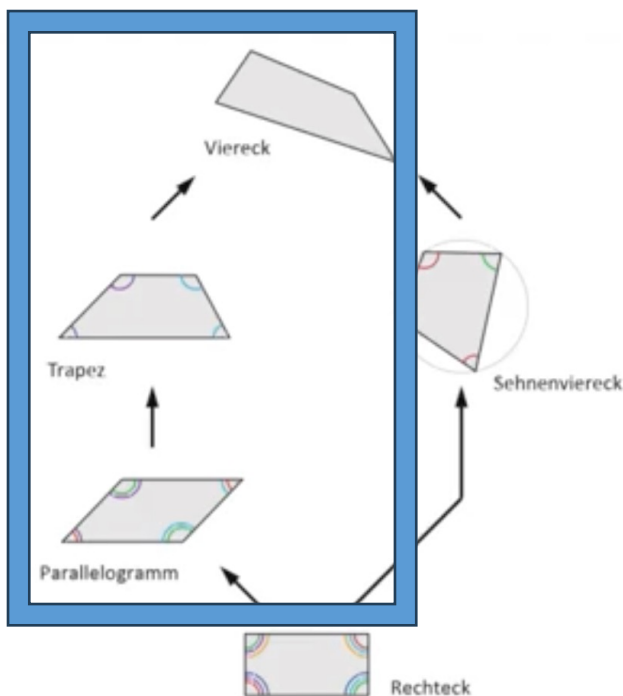
Parallele Seiten:

Ein Paar parallele Seiten:

Zwei Paar parallele Seiten:

Trapez

Parallelogramm



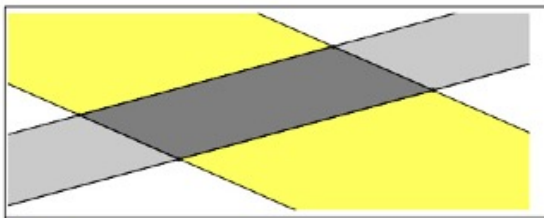
Weitere Spezifizierung nur über
Kombination mit anderen
Eigenschaften

5.3 Vierecke erzeugen durch sich schneidende Parallele

Induktives Prinzip: Begriffsbildung (didaktische Prinzipien)

Beispiel: Parallelogramm

- systematisches Erzeugen von Repräsentanten durch parallele Streifen
- untersuchen der entstehenden Repräsentanten



Wie lassen sich das Rechteck, die Raute und das Quadrat als spezielle Parallelogramme erzeugen?

5.4 Eigenschaften Quader

Der Quader

- ▶ Polyeder mit 6 Rechtecken als Seitenflächen
- ▶ Deutung als Prisma möglich
- ▶ Breites Umweltvorkommen

Wissen zum Ende des vierten Schuljahres (Franke & Reinhold 2016, S. 255)

„Ein Quader ist ein Körper mit acht Ecken, sechs Flächen und zwölf Kanten. Alle Flächen sind rechteckig. In den Kanten stoßen zwei Flächen im rechten Winkel aufeinander. Gegenüberliegende Flächen sind gleich groß (deckungsgleich).“

Foliensatz 4.1, Folie 14

Polyeder (n-Flächner)

(vgl. Helmerich & Lengnink 2016, S. 87)

Ein Polyeder ist ein Körper, der von endlich vielen Polygonen begrenzt wird.

Quader als besonderer 6-Flächner

(vgl. Franke & Reinhold 2016, S. 197)

Ein (konvexer) 6-Flächner, dessen Seitenflächen Rechtecke sind, heißt Quader.

Foliensatz 5.2, Folie 3

Wie lassen sich die Eigenschaften aus der Quaderdefinition ableiten?

5.5 Realdefinition Tetraeder

Polyeder (n-Flächner)

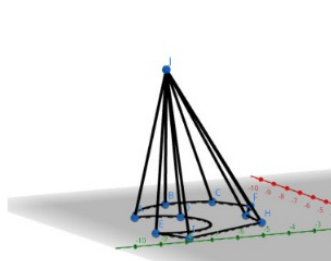
(vgl. Helmerich & Lengnink 2016, S. 87)

Ein Polyeder ist ein Körper, der von endlich vielen Polygonen begrenzt wird.

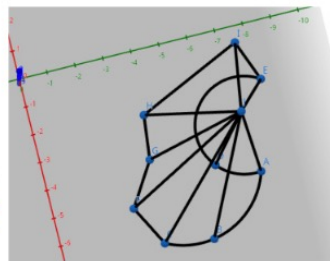
Ein Tetraeder ist ein Polyeder,

- ▶ *Ein **Tetraeder** ist eine gerade Pyramide mit gleichseitigem Dreieck als Grundfläche, wenn ihre Höhe so gewählt ist, dass der Abstand jeder Ecke zur Spitze der Seitenlänge dieses Dreiecks entspricht.*

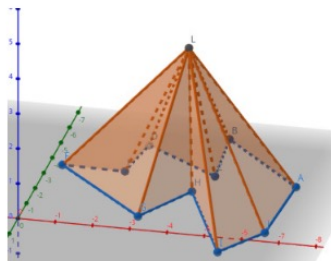
Körper erzeugen aus ebenen Grundfiguren: allgemeiner Kegel und allgemeiner Zylinder



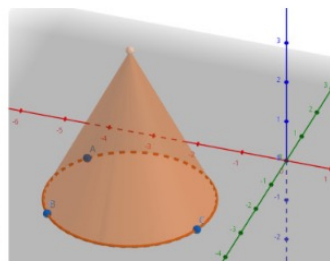
Kegel (von vorn)



Kegel (von oben)

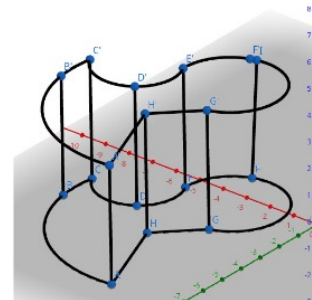


Pyramide

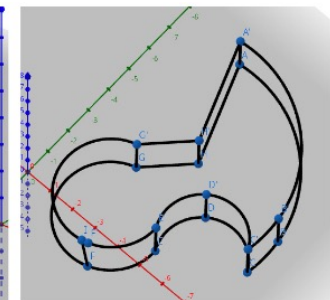


Gerader Kreiskegel

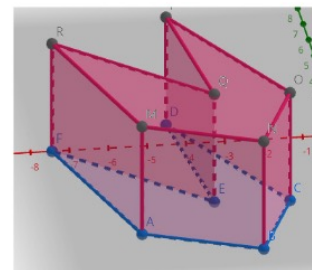
Geogebra (Screenshot); A. Kirsche (CC BY NC SA 4.0)



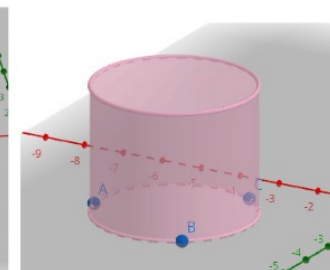
Zylinder (von vorn)



Zylinder (von oben)



Gerades Prisma



Gerader Kreiszylinder

Geogebra (Screenshot); A. Kirsche (CC BY NC SA 4.0)

Schulbezug

Gerader Kreiskegel → Kegel

Gerade (quadratische) Pyramide → Pyramide

Spitzkörper

Schulbezug

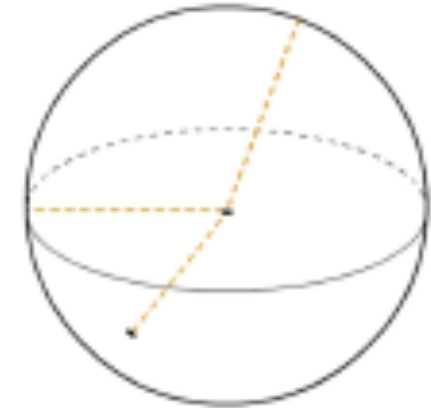
Gerader Kreiszylinder → Zylinder

Parallelverschiebung

Körper erzeugen durch Rotation

Kugel(körper)

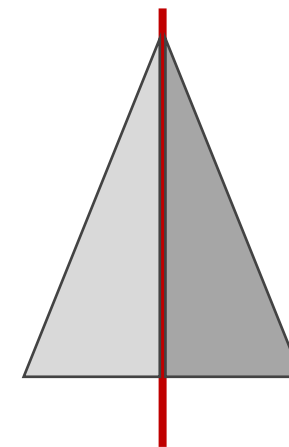
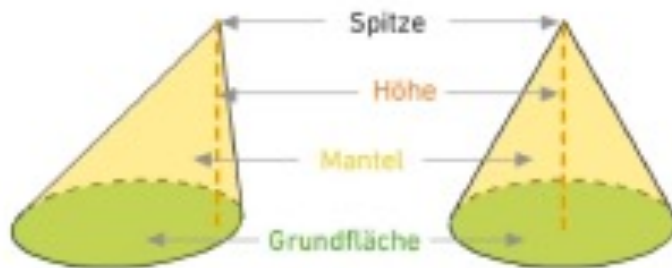
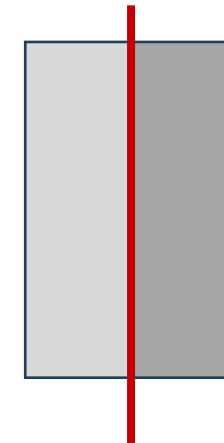
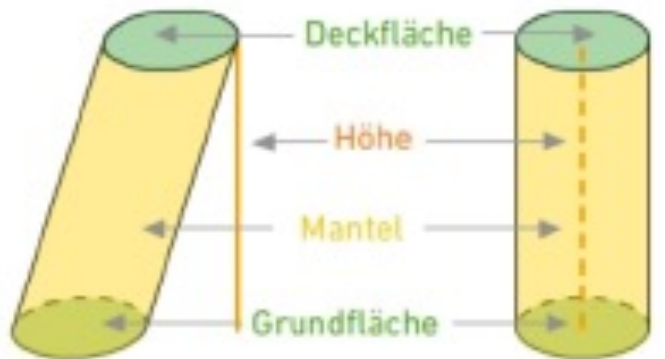
- Rotationskörper eines Kreises
- Durchmesser als Drehachse



Eine Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist die Menge aller Punkte, deren Abstand von M kleiner oder gleich r ist. (vgl. Definition Kreis!)

Kugeloberfläche: Sphäre (Abstand von M gleich r)

Zylinder und Kegel als Rotationskörper



Gerader Zylinder als Rotationskörper

Gerader Zylinder als Rotationskörper

Das sagt Wikipedia:

Ein **Zylinder** (auch **Drehzylinder**) (von **lateinisch** *cylindrus*, von **altgriechisch** κύλινδρος *kýlindros*, von κυλίνδρειν *kylíndein*, deutsch ‚rollen, wälzen‘) ist im einfachsten Fall eine

- Fläche, deren Punkte von einer festen Gerade, der *Achse*, denselben Abstand r haben.

Da solch eine Fläche unendlich ausgedehnt ist, beschneidet man sie normalerweise mit zwei parallelen Ebenen der Distanz h (s. Bild).

- Sind die Schnittebenen senkrecht zur Achse, entsteht ein **senkrechter (oder gerader) Kreiszylinder** mit Radius r und Höhe h . Die so beschnittene Fläche heißt *Mantelfläche* des Zylinders, die Schnittflächen senkrecht zur Achse können jeweils als *Grundfläche* bezeichnet werden.



VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT



Escher: Möbiusband