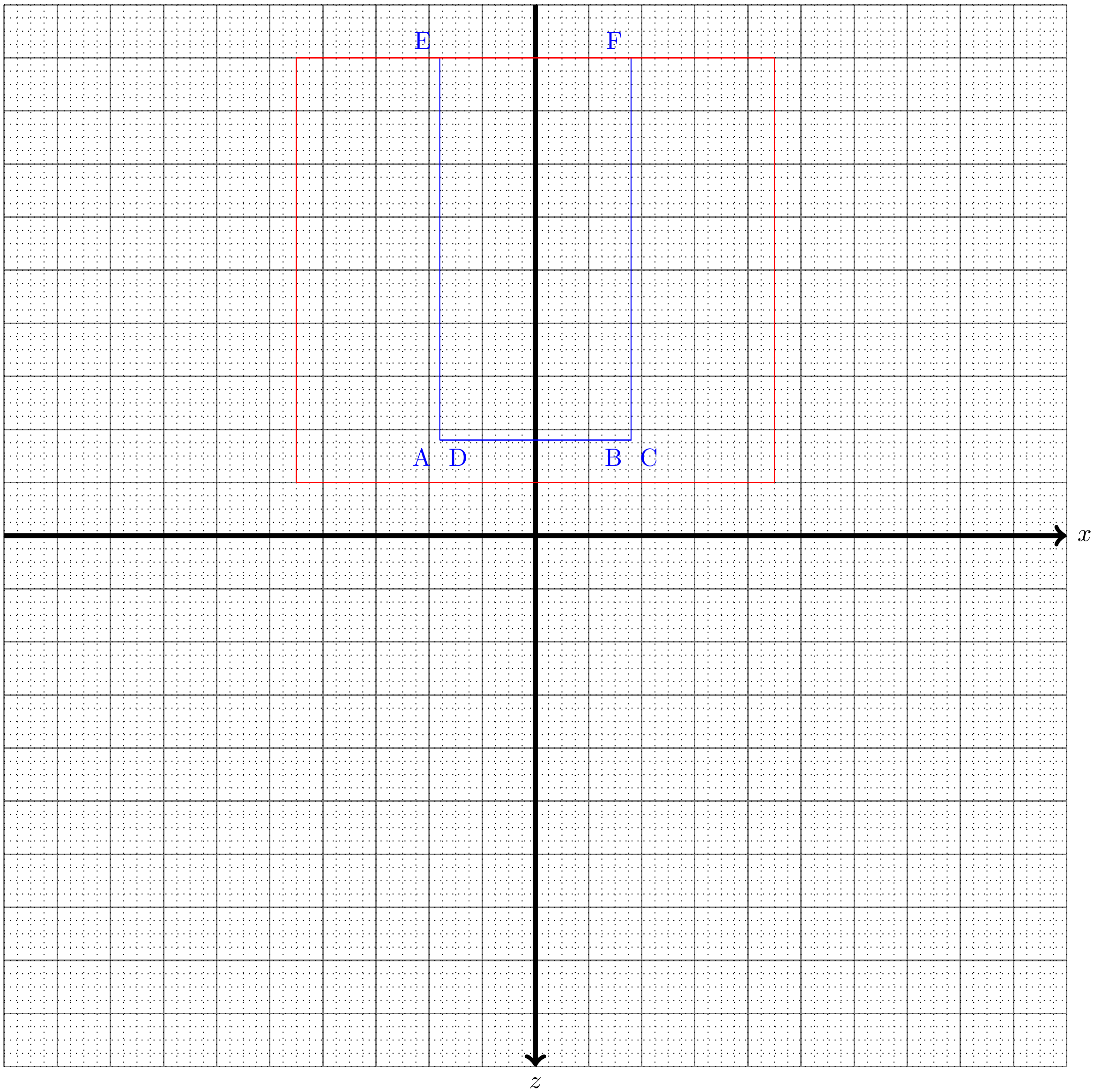
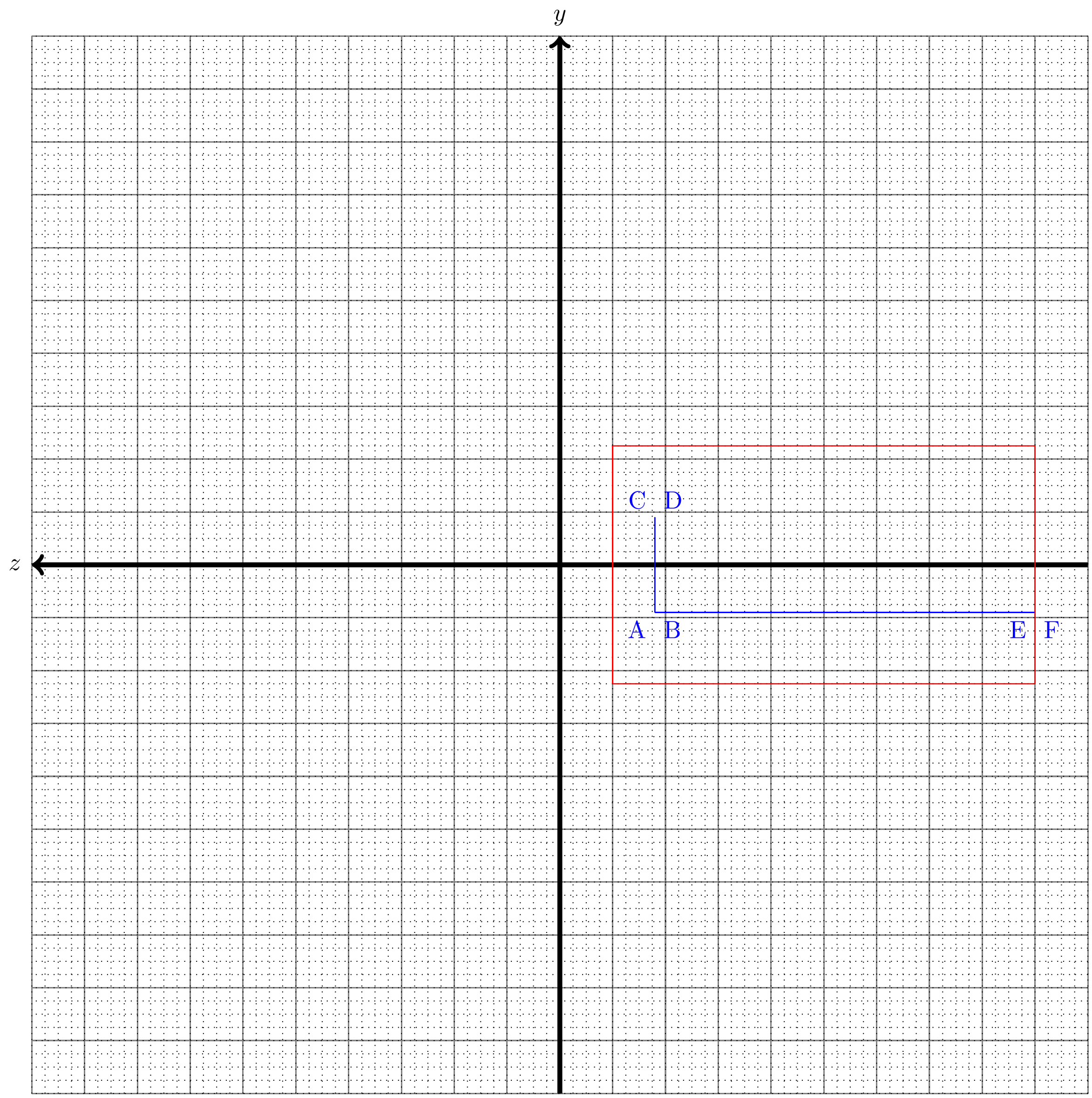
Johannes Krause
Matrikel-Nr.: 576644
Übungsgruppe: Freitag

Aufgabe 1

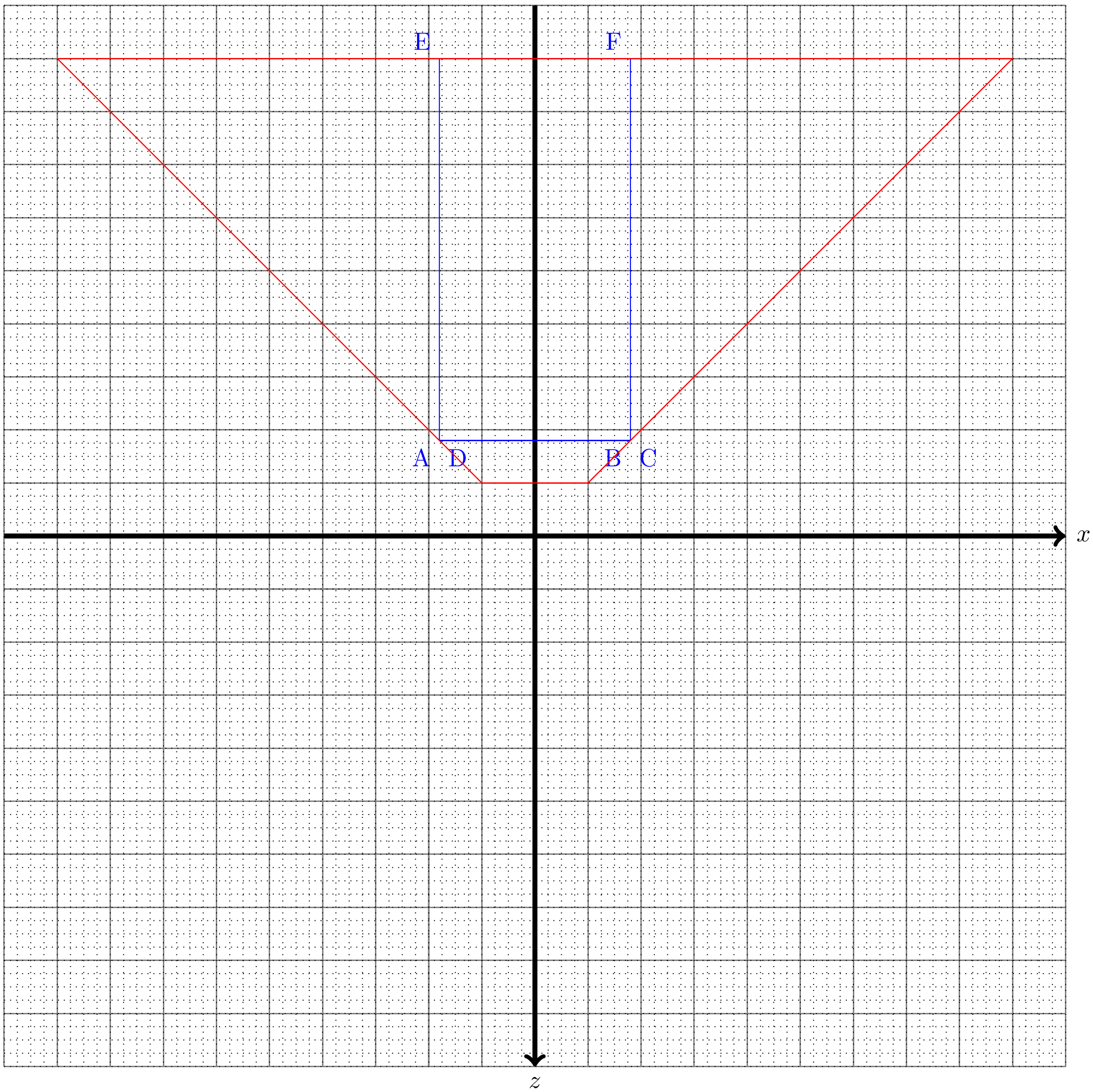
(a)

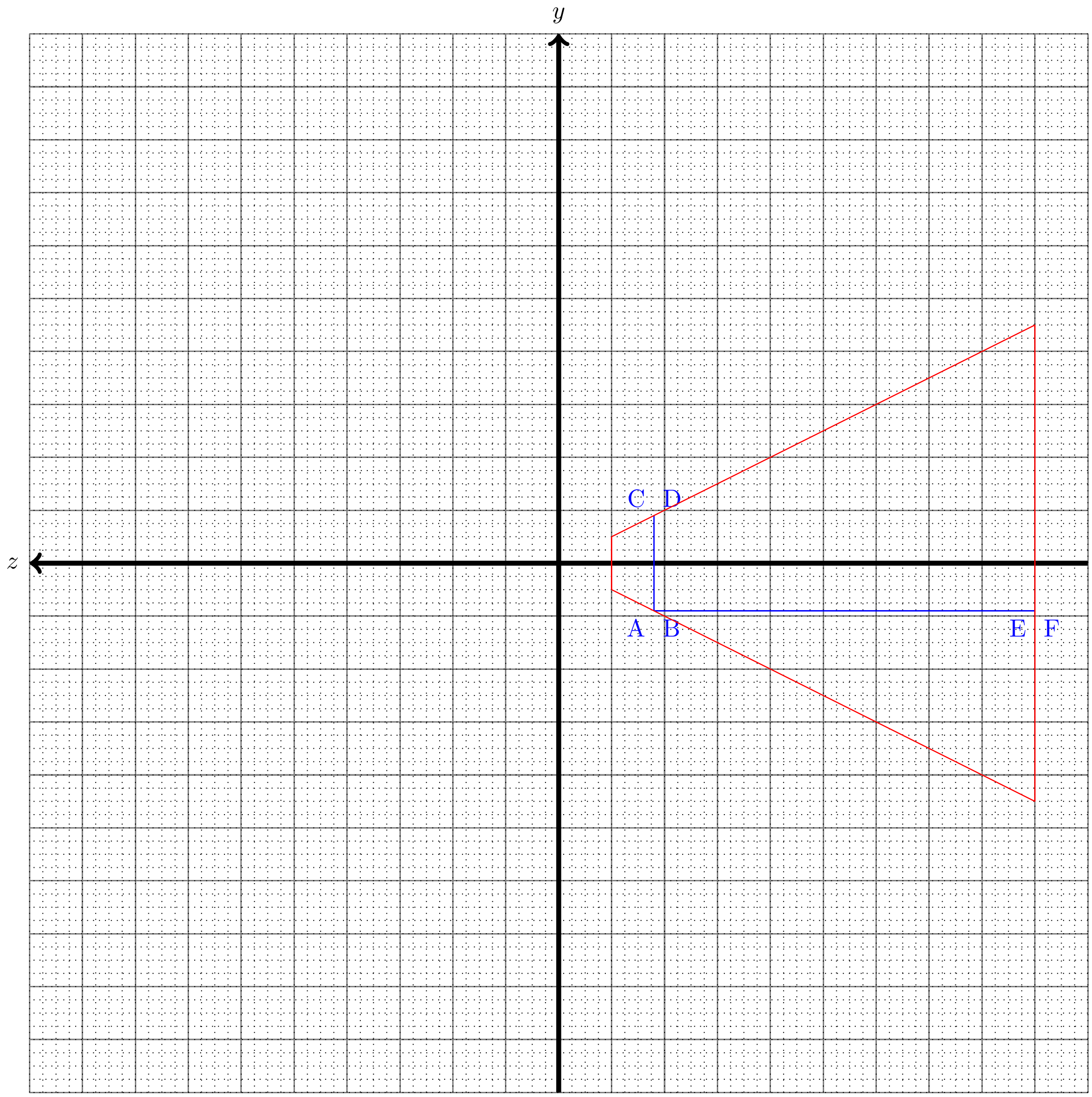
Fall A




y
z
C D
A B
E F

Fall B:




y
z
C
D
A
B
E
F

(b)

Annahme: Gemeint ist die Projektion aus den Eye-Space-Koordinaten in den NDC
$A : l = -\frac{9}{2}, r = \frac{9}{2}, b = -\frac{9}{4}, t = \frac{9}{4}, n = 1, f = 9$

$B : l = -1, r = 1, b = -\frac{1}{2}, t = \frac{1}{2}, n = 1, f = 9$

$$P_A = \begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_B = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{8} & -\frac{18}{8} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

Fall A

$A_{NDC} = (-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$
$B_{NDC} = (\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$
$C_{NDC} = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$
$D_{NDC} = (-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$
$E_{NDC} = (-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, 1)$
$F_{NDC} = (\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, 1)$

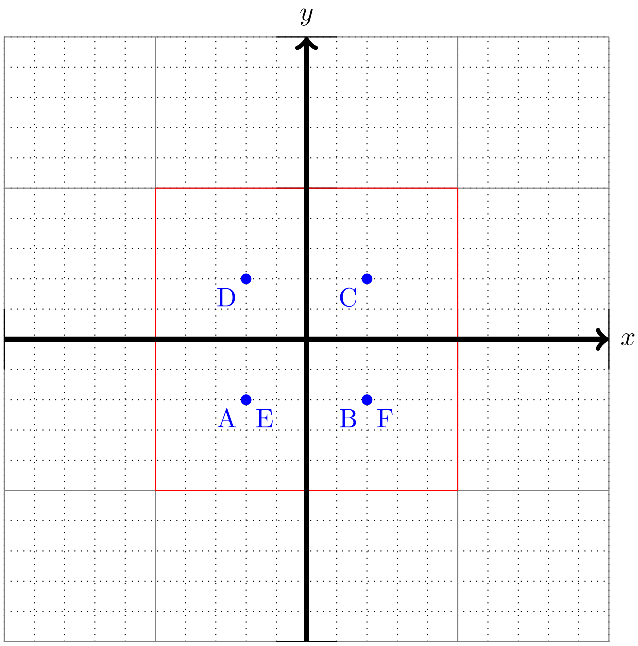
Fall B

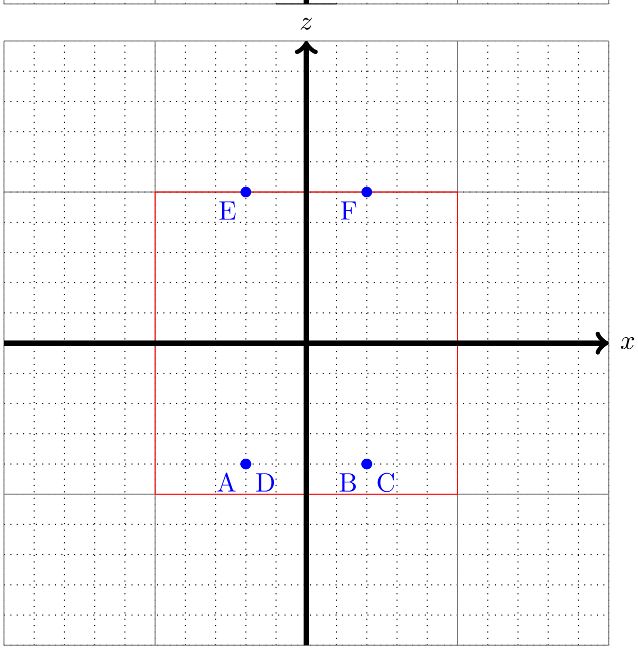
$A_{NDC} = (-1, -1, 0)$
$B_{NDC} = (1, -1, 0)$
$C_{NDC} = (1, 1, 0)$
$D_{NDC} = (-1, 1, 0)$
$E_{NDC} = (-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 1)$
$F_{NDC} = (\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 1)$

(d)

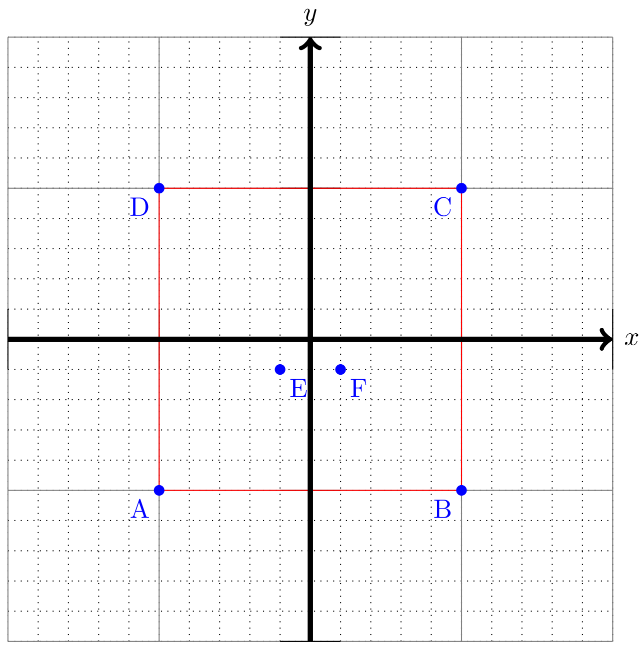
Das Sichtvolumen im NDC ist immer: $l = -1, r = 1, b = -1, t = 1, n = -1, f = 1$
Rote Linie: Sichtvolumen im NDC

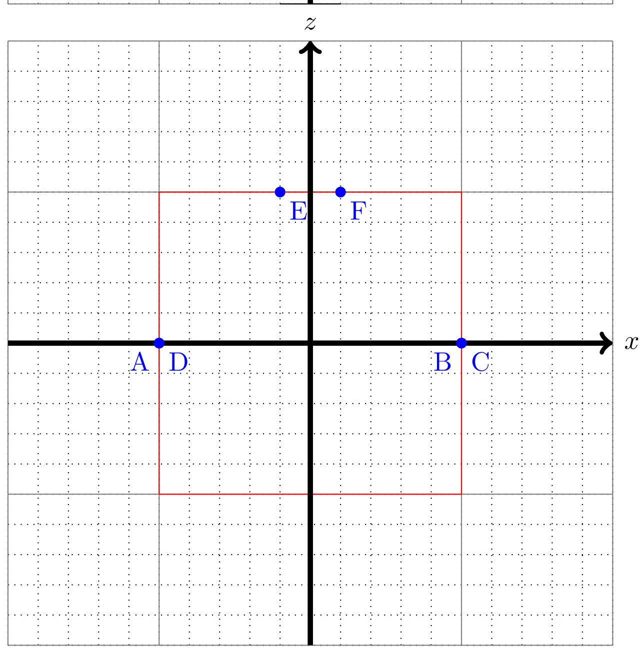
Fall A





Fall B





Aufgabe 2

geg.:

$\theta = 90°$
Breite $B = 720Px$
Hoehe $H = 480Px$
$n = 2$
$f = 32$

ges.:

l, r, b, t

Lösung

$l = -r$
$b = -t$
$r = t \cdot a$
$a = \frac{B}{H} = \frac{3}{2}$
$t = \tan\frac{\theta}{2} \cdot n = 2$
$\rightarrow r = 3$
$\rightarrow b = -2$
$\rightarrow l = -3$

Projektionsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{34}{30} & -\frac{128}{30} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Situation	Orthogonalprojektion	Zentralprojektion
(a)	X	X
(b)	X	X
(c)		X

Zu (a):

Die Projektionsmatrix einer Orthogonalprojektion ist $P_{Ortho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ein Punkt $P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_w \end{pmatrix}$ mit dieser Matrix multipliziert ergibt stets $P_{Ortho} \cdot P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \\ P_w \end{pmatrix}$.

Die Länge einer Kante zwischen 2 Punkten wäre immer $| \begin{pmatrix} P2_x - P1_x \\ P2_y - P1_y \\ 0 \end{pmatrix} |$.

Dies entspricht der gleichen Länge zweier Punkte im R^3, wenn beide Punkte in derselben z-Ebene liegen würden. Daraus folgt, dass die Länge aller Kanten nach der Orthogonalprojektion gleich lang bleiben und sind.

Für die Zentralprojektion ist eine solche Abbildung möglich, wenn sich die Kamera in der Mitte des Würfels befindet und die Distanz zur Bildebene $0 < d < 0.5$ ist. In diesem Falle sind alle Kanten in der Abbildung gleich lang, aber die Kanten der Abbildung haben nicht die gleiche Länge wie der

Original-Würfel. Zu beachten ist, dass dieser Effekt nur ohne Anwendung von Culling und Clipping vorkommt.

Zu (b):

Aus (a) ergibt sich, dass, wenn alle Punkte einer Fläche auf derselben z-Ebene liegen, diese Punkte affin untereinander auf die xy-Ebene projiziert werden. Da das Projektionsobjekt ein achsparalleler Einheitswürfel ist, existieren 2 Fläche, die sich parallel zur Projektionsebene verhalten, und deren Punkte je Fläche auf einer z-Ebene liegen. Diese Flächen werden als Quadrate abgebildet.

Für die Zentralprojektion verhält sich dies ähnlich. Die Koordinaten werden nach der Orthogonalprojektion zusätzlich durch $1 + \frac{P_z}{d}$ geteilt. Punkte, die auf derselben z-Ebene liegen werden hierbei stets durch den gleichen Divisor geteilt. Die Abbildung bleibt also auch hierbei affin, und Punkte, die im R^3 auf derselben z-Ebene liegen, und ein Quadrat abbilden, werden dies auch in der $xy - Ebene$ tun.

Zu (c):

Verhält sich eine Fläche senkrecht zur Projektionsfläche, so wird diese in der Abbildung bei einer Orthogonalprojektion lediglich als Strich dargestellt, welche zwischen $\begin{pmatrix} x_{min} \\ y_{min} \end{pmatrix} und \begin{pmatrix} x_{max} \\ y_{max} \end{pmatrix}$ gezeichnet wird. Dessen Flächeninhalt ist 0.
Da bei einer Zentralprojektion die Tiefe z eines Punktes Einfluss auf die x und y-Koordinaten auf der xy-Ebene nimmt, werden Punkte, die weiter entfernt liegen, auf der Abbildung 'mittiger' abgebildet. Da Kanten, die sich senkrecht zur Bildfläche befinden, unterschiedliche z-Werte haben, spannen senkrechte Flächen auf der Abbildung eine Fläche auf, die nicht 0 ist.
Eine Ausnahme existiert, wenn sich die abzubildende Fläche auf derselben x- oder y-Ebene befindet wie die Kamera.