Formale Systeme
1. Übungsblatt

Wintersemester 2020/21

Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese wird nur auf konkrete Nachfrage in den Übungen besprochen)

S1) Es sei $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$ und $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Beschreiben Sie folgende Mengen verbal oder durch Aufzählung:

$$\Sigma_1{}^*, \quad \Sigma_1{}^+, \quad \Sigma_1{}^2, \quad \Sigma_1 \circ (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*, \quad \mathcal{P}(\Sigma_1), \quad \mathcal{P}(\Sigma_1{}^*)$$

S2) Beschreiben Sie folgende Mengen, die über die Operationen Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern gebildet werden, verbal oder durch Aufzählung:

$$\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\}, \quad \{a\}\circ\{b\}\circ\{c\}, \quad \{a\}\cup\{b\}\circ\{a\}\cup\{b\}, \quad \{a\}^*, \quad (\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\})^*,$$

$$(\{a\}\circ\{b\}\circ\{c\})^*, \quad \{a\}\cup\{a\}^*\circ\{b\}, \quad (\{0\}\cup\{1\})^*, \quad (\{1\}\cup\{1\}\circ\{0\})^*,$$

$$(\{0\}\cup\{1\})^*\circ\{0\}\circ\{0\}\circ(\{0\}\cup\{1\})^*$$

Aufgabe 1

Gegeben sind ein beliebiges Alphabet Σ und die Sprachen $L_1, L_2, L_3, L_4 \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die Operationen $\cup$, $\circ$ und * monoton sind, d.h. für $L_1 \subseteq L_3$ und $L_2 \subseteq L_4$ gilt:

a) $L_1 \cup L_2 \subseteq L_3 \cup L_4$

b) $L_1 \circ L_2 \subseteq L_3 \circ L_4$

c) $L_1{}^* \subseteq L_3{}^*$

Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Identitäten. Dabei sind L, L_1, L_2, L_3 beliebige Sprachen.

a) $L_1 \circ (L_2 \cup L_3) = L_1 \circ L_2 \cup L_1 \circ L_3$

b) $(\{a\} \circ \{b\} \cup \{a\})^* \circ \{a\} = \{a\} \circ (\{b\} \circ \{a\} \cup \{a\})^*$

c) $(\{a\} \cup \{b\})^* = \{a\}^* \cup \{b\}^*$

d) $\emptyset^* = \{\varepsilon\}, \quad (\{\varepsilon\} \cup L)^* = L^*, \quad (L^*)^* = L^*$

e) $(L_1{}^* \cup L_2{}^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$

f) $L \circ L^* = L^+, \quad L^* \circ L^* = L^*, \quad L^* \cup L = L^*$

Aufgabe 3

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Untersuchen Sie die folgenden Tupel daraufhin, ob sie eine Grammatik definieren. Wenn das der Fall ist, geben Sie jeweils den maximalen Chomsky-Typ der Grammatik an und begründen Sie die Einordnung.

- $G_1 = \langle V_1, \Sigma, P_1, S_1 \rangle$ mit $V_1 = \{S_1, A\}$ und
  $P_1 = \{\varepsilon \to b,\ S_1 \to Ab\}$
- $G_2 = \langle V_2, \Sigma, P_2, S_2 \rangle$ mit $V_2 = \{S_2\}$ und
  $P_2 = \{S_2 \to aS_2b,\ S_2 \to \varepsilon\}$
- $G_3 = \langle V_3, \Sigma, P_3, S_3 \rangle$ mit $V_3 = \{S_3, X, Y\}$ und
  $P_3 = \{XY \to Y,\ S_3 \to aYb,\ S_3 \to XY,\ Y \to a\}$
- $G_4 = \langle V_4, \Sigma, P_4, S_4 \rangle$ mit $V_4 = \{S_4, X, Y\}$ und
  $P_4 = \{S_4 \to aY,\ X \to a,\ Y \to bS_4,\ Y \to b,\ Y \to bX\}$
- $G_5 = \langle V_5, \Sigma, P_5, S_5 \rangle$ mit $V_5 = \{S_5, X, Y, Z\}$ und
  $P_5 = \{X \to b,\ Y \to aYYb,\ aY \to aZ,\ ZY \to ZX,\ S_5 \to Y,\ Z \to a\}$
- $G_6 = \langle V_6, \Sigma, P_6, S_6 \rangle$ mit $V_6 = \{S_6, W, X, Y, Z\}$ und
  $P_6 = \{X \to b,\ Y \to aYYb,\ aY \to aZ,\ ZY \to ZX,\ S_6 \to Y,\ S_6 \to \varepsilon,\ Z \to a,\ W \to S_6\}$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Grammatik $G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$ mit $V = \{S, B\}, \Sigma = \{a, b, c\}$ und $P = \{S \to aSBc,\ S \to abc,\ cB \to B,\ cB \to Bc,\ bB \to bb\}$.

a) Von welchem maximalen Typ ist G? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie drei Wörter w der Sprache $L(G)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Gilt $\varepsilon \in L(G)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Beschreiben Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$.

Aufgabe 5

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben sind die Grammatiken G_k mit $1 \leq k \leq 4$:

- $G_1 = \langle V_1, \Sigma, P_1, S_1 \rangle$ mit $V_1 = \{S_1, T\}$ und
  $P_1 = \{S_1 \to aT,\ S_1 \to \varepsilon, T \to S_1b\}$
- $G_2 = \langle V_2, \Sigma, P_2, S_2 \rangle$ mit $V_2 = \{S_2, A, B\}$ und
  $P_2 = \{S_2 \to S_2AS_2,\ S_2 \to S_2BBS_2,\ S_2 \to \varepsilon,\ A \to a,\ B \to b\}$
- $G_3 = \langle V_3, \Sigma, P_3, S_3 \rangle$ mit $V_3 = \{S_3, A, B\}$ und
  $P_3 = \{S_3 \to A,\ S_3 \to \varepsilon,\ A \to ab,\ A \to aBb,\ aB \to aaBb,\ aB \to a\}$
- $G_4 = \langle V_4, \Sigma, P_4, S_4 \rangle$ mit $V_4 = \{S_4, T\}$ und
  $P_4 = \{S_4 \to aS_4b,\ S_4 \to aTb,\ S_4 \to \varepsilon,\ aTb \to T,\ aTb \to S_4\}$.

a) Geben Sie zu jeder dieser Grammatiken G_k das maximale i an, so dass G_k eine Grammatik vom Typ i ist.

b) Beschreiben Sie $L(G_k)$ in einer geeigneten Form, z.B. mittels einer Mengennotation.

1. Übungsblatt

Aufgabe 2

a $L_1 \circ (L_2 \cup L_3) = \{ab \mid a \in L_1;\ b \in (L_2 \cup L_3)\}$

$= \{ab \mid a \in L_1;\ b \in L_1 \text{ oder } b \in L_2\}$

$= \{ab \mid a \in L_1;\ b \in L_2\} \cup \{ab \mid a \in L_1;\ b \in L_3\}$

$= L_1 \circ L_2 \cup L_1 \circ L_3$

b $(\{a\} \circ \{b\} \cup \{a\})^* \circ \{a\} = \{a\} \circ (\{b\} \circ \{a\} \cup \{a\})^*$

$\{ab, a\}^* \circ \{a\} = \{a\} \circ \{ba, a\}^*$

c $(\{a\} \cup \{b\})^* \neq \{a\}^* \cup \{b\}^*$, weil aba nicht gebildet werden kann.

Aufgabe 4

a Typ 0, weil $cB \to B$ nicht kontextsensitiv ist. $w \to v \mid |w| \leq |v|$ ξ

b $w = \{aabbcc\}$

$\Rightarrow$ Es gibt nur ein $w \in L(G)$, da es keine andere Ersetzungsmöglichkeit gibt.

c Nein, da keine ε-Regeln vorhanden sind.

d $L(G) = \{aabbcc\}$

Aufgabe 5

a G_1 ist eine Grammatik vom Typ 2.

G_2 ist eine Grammatik vom Typ 2.

G_3 ist eine Grammatik vom Typ 0.

G_4 ist eine Grammatik vom Typ 0.

b $L(G_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 1 \in \mathbb{N}\}$

$L(G_2) = \{(a,b)^* \mid |a| = n \in \mathbb{N}, |b| = 2 \cdot m \in \mathbb{N}\}$

$L(G_3) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L(G_4) = \{a^n b^n \mid 0 \leq n\}$

Aufgabe 3

G_1 ist keine Grammatik, weil A nicht ersetzt werden kann.

G_2 Typ 2 Kontextfrei $\{A \to aB \vee A \to c \vee A \to \varepsilon\}$

G_3 Typ 0 $\{|w| \leq |v|\}$

G_4 Typ 3 Regulär $A \to aB \vee A \to c \vee A \to \varepsilon$

G_5 Typ 2 Kontextfrei $\{A \to aB \vee A \to c \vee A \to \varepsilon\}$

G_6 Typ 2 Kontextfrei $\{A \to aB \vee A \to c \vee A \to \varepsilon\}$

Aufgabe 1

$L_1 = \{a\}$ $L_2 = \{b\}$ $L_3 = \{a, c\}$ $L_4 = \{b, d\}$

a $\{a\} \cup \{b\} \subseteq \{a, c\} \cup \{b, d\}$?

$\{a, b\} \subseteq \{a, c, b, d\}$ ✓

b $\{a\} \circ \{b\} \subseteq \{a, c\} \circ \{b, d\}$?

$\{ab\} \subseteq \{ab, ad, cb, cd\}$ ✓

c $\{a\}^* \subseteq \{a, c\}^*$?

$\{aaa \cdots\} \subseteq \{aaa \cdots\}$ ✓