Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

MATHEMATIK für Medieninformatik

Prof. Dr. Elena Klimova

Wintersemester 2024

Kapitel 3

Analysis

Prof. Dr. Elena Klimova

Wintersemester 2024

Lernziele dieses Kapitels

- Im ersten Teil dieses Kapitels lernen Sie Relationen kennen.
- Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit Funktionen als Abbildungen aus den reellen Zahlen in die reellen Zahlen. Sie lernen verschiedene Eigenschaften von Funktionen kennen und bekommen einen Koffer voll mit nützlichen Werkzeugen, um Funktionen ganz praktisch auf diese Eigenschaften hin untersuchen zu können.
- Im letzten Teil dehnen wir den Begriff einer reellwertigen Funktion mit eindimensionalem Input auf reellwertige Funktionen mit mehrdimensionalem Input aus und landen so bei Flächen im $\mathbb{R}^n$. Auch solche Flächen können wir (auf verschiedene Weise) ableiten und „mehrdimensionale" Entsprechungen für Begriffe aus dem Eindimensionalen (z.B. Tangente an eine Kurve) definieren und berechnen.

Inhalt

von Kapitel 3: Analysis

Relationen

Einführung

- Mit den *algebraischen Strukturen* haben wir bereits Konzepte kennengelernt, um bekannte Rechenregeln zu abstrahieren und die so entstandene abstrakte Struktur auf andere Probleme zu übertragen.
- Mit *Relationen* wollen wir es nun ähnlich handhaben.
- Bekannte Vertreter von Relationen, die wir schon lange verwenden, sind z.B.
  - (i) $\in$ als Bezeichnung für Zugehörigkeit zu einer Menge ($1 \in \mathbb{N}$),
  - (ii) $<$ als Ordnungsrelation zwischen zwei reellen Zahlen ($a < b$),
  - (iii) $|$ als Teilbarkeitsrelation ($3 \mid 12$).
- Auch diese bekannten (binären) Relationen lassen sich abstrakter betrachten.

Relationen

Erinnerung – Kartesisches Produkt

Erinnerung (Kartesisches Produkt)

Das Kartesische Produkt auf einer Menge M ist definiert als

$$M \times M := \{(m_1, m_2) \mid m_1, m_2 \in M\}.$$

- Das *geordnete Paar* (m_1, m_2) nennen wir einen Tupel.
- Durch n-malige Anwendung der Definition erhalten wir einen n-Tupel:

$$M^n := M \times M \times \cdots \times M = \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \mid m_i \in M, \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Relationen

Definition

Definition (Relation)

Eine zweistellige (oder binäre) Relation R auf zwei Mengen X und Y ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes aus X und Y:

$$R \subseteq X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Schreibweisen:

- Elementschreibweise: $(x, y) \in R$,
- Präfixschreibweise: $R(x, y)$,
- Infixschreibweise: xRy.

Analog definiert man eine n-stellige Relation R_n als Teilmenge eines n-fachen kartesischen Produkts

$$R_n \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Relationen

Beispiele

- Im Folgenden beschränken wir uns auf binäre Relationen.
- Beispiel:

  $W := \{\text{Anne}, \text{Katrin}\}, \; M := \{\text{Nils}, \text{Tobias}\}$

  Dann ist $W \times M =$

  Definiere nun eine Relation R auf $W \times M$ durch

  $$R := \{(\text{Anne}, \text{Tobias}), (\text{Katrin}, \text{Nils})\} \subseteq W \times M$$

  Welche verbalen Interpretationsmöglichkeiten gibt es für R?

- Visualisierungsmöglichkeit von R:

	Nils	Tobias
Anne		$\times$
Katrin	$\times$	

Relationen

Inverse Relation

Definition (Inverse Relation)

Es seien X und Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation. Dann heißt

$$R^{-1} \subseteq Y \times X \quad \text{mit} \quad R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}$$

Umkehrrelation von R oder die zu R inverse Relation.

- Wie lautet eine verbale Beschreibung der Umkehrrelation im Beispiel auf der letzten Folie?
- Wie ließe sich hier R^{-1} als Tabelle visualisieren?

Relationen

Weitere Beispiele

(a) Es seien $A := \{-2, -1, 1, 2\}$ und eine Relation $R \subseteq A \times A$ gegeben mit

$$\begin{aligned} R \;:=\; &\{(-2,-2), (-2,2), (2,-2), (2,2), \\ &(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)\} \end{aligned}$$

Interpretation? Offenbar gilt $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; |x| = |y|$.

(b) Es seien

$$\begin{aligned} S \;&:=\; \{\text{Berlin, Dresden, Köln, Paris, Rom, Neapel, Oslo}\} \\ L \;&:=\; \{\text{D(eutschland), F(rankreich), B(elgien), I(talien),} \\ &\quad\;\; \text{P(olen), N(orwegen)}\} \end{aligned}$$

Die Relation $R \subseteq S \times L$ soll darstellen, welche Stadt in welchem Land liegt.

$$\text{Lösung:} \quad \begin{aligned} R \;=\; &\{(\text{Berlin,D}), (\text{Dresden,D}), (\text{Köln,D}), (\text{Paris,F}), \\ &(\text{Rom,I}), (\text{Neapel,I}), (\text{Oslo,N})\} \end{aligned}$$

[Visualisierung als Graph]

Relationen

Eigenschaften homogener Relationen

Definition (Eigenschaften homogener Relationen)

Es sei $R \subseteq X \times X$. Dann ist R eine sog. homogene Relation und heißt...

reflexiv, wenn:	$(x, x) \in R$,
irreflexiv, wenn	$(x, x) \notin R$
symmetrisch, wenn:	$(x, y) \in R \implies (y, x) \in R$,
antisymmetrisch, wenn:	$(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies x = y$,
transitiv, wenn:	$((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \implies (x, z) \in R$.

... jeweils für alle $x, y, z \in X$ gilt.

Homogene Relationen

Beispiele

(a) Stellen Sie die Relation $\leqslant$ auf der Menge $\{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$ in einer Tabelle dar!

$\leqslant$	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Welche der oben genannten Eigenschaften besitzt die Relation $\leqslant$?

Homogene Relationen

Beispiele

(b) Es sei D die Menge der Wörter der deutschen Sprache. Betrachte die Relation $R \subseteq D \times D$ mit

$$(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x \text{ und } y \text{ haben den gleichen Anfangsbuchstaben.}$$

Zeigen Sie: Die Relation D ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Homogene Relationen

Beispiele

(c) Es sei $A := \{a, b, c\}$ und $R \subseteq A \times A$ gegeben durch

$$R := \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, c)\}.$$

Visualisieren Sie den Sachverhalt als gerichteten Graph mit der Knotenmenge A und der Kantenmenge R!

Frage: Wie kann man mit einem solchen Graph *Transitivität* visualisieren?

Relationen

Ordnungsrelationen

- Zu Beginn haben wir bereits $\leqslant$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als ein Beispiel für Relationen genannt.
- Genauso gut hätten wir $\subseteq$ auf zwei Mengen, deren Elemente selbst wieder Mengen sind (z.B. die *Potenzmenge*), als Beispiel nennen können.
- Offenbar haben diese Relationen etwas mit **Ordnung** zu tun: Mit $\leqslant$ lassen sich natürliche Zahlen der Größe nach ordnen, mit $\subseteq$ lassen sich die Größenordnungen von ineinander verschachtelten Mengen vergleichen.
- Neben $\leqslant$ gibt es aber auch die strikte Form $<$, bzw. analog neben $\subseteq$ für Mengen die strikte Form $\subset$ (oder $\subsetneq$, um Ungleichheit besonders hervorzuheben).
- Im Folgenden wollen wir all diese uns bekannten Begriffe abstrahieren.

Relationen

Ordnungsrelationen

Definition (Ordnungsrelation)

Es sei M eine Menge. Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Halbordnung auf M, wenn sie

- reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Die Relation heißt strikte Ordnung auf M, falls sie

- irreflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Sowohl eine Halbordnung als auch eine strikte Ordnung R auf M heißen vollständig, wenn für alle $x, y \in M$

- entweder $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$

gilt (d.h. alle Elemente der Menge M lassen sich im Sinne von R miteinander vergleichen).

Ordnungsrelationen

Beispiele

Bekannte Beispiele:

	Halbordnung	strikte Ordnung
vollständig	$\leqslant$ auf $\mathbb{R}$	$<$ auf $\mathbb{R}$
nicht vollst.	$\subseteq$ auf $\mathcal{P}(M)$	$\subsetneq$ auf $\mathcal{P}(M)$

$\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$ bezeichnet die **Potenzmenge** von M, also die Menge aller Teilmengen von M.

Warum sind die Teilmengenrelationen nicht vollständig?

Tipp: Venn-Diagramm zeichnen!

Ordnungsrelationen

Beispiele

Aufgabe (Ordnungsrelation)

Es sei $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $R := \{(x, y) \mid \; x \mid y\}$. Zeigen Sie: R ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$, aber weder strikt noch vollständig.

Ordnungsrelationen

Beispiele

- Wenn auf einer Menge eine (Halb-)Ordnung existiert, dann spricht man üblichweise von einer (halb-)geordneten Menge.
- Überlegen Sie: Kann man Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ordnen? Oder komplexe Zahlen? Sind der $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ also (halb-)geordnete Mengen?

Relationen

Äquivalenzrelationen

- Erinnern Sie sich noch an die Aufgabe mit den Wörtern der deutschen Sprache, die den gleichen Anfangsbuchstaben haben?
- Man könnte intuitiv (so wie der Duden) auf die Idee kommen, alle Wörter mit demselben Anfangsbuchstaben in eine **Klasse** zu stecken, z.B. in folgender Form:

$$\text{Wort } w \in [d] \quad :\Leftrightarrow \quad w \text{ beginnt mit Buchstabe } d$$

- Analog definieren wir Klassen für alle anderen Buchstaben des Alphabets. [PS: Dass man diese Klassen nun auch noch lexikographisch *ordnen* kann, lassen wir vorerst außen vor.]
- Kommen Ihnen diese Klassen irgendwie bekannt vor (Stichwort: Division mit Rest)?
- In der obigen Wort-Aufgabe hatten wir gezeigt, dass die Relation, mit deren Hilfe wir die Klassen definieren können, reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. In gewissen Sinne sind also alle Wörter mit dem selben Anfangsbuchstaben *äquivalent* zueinander. Und genau so nennt man auch die entsprechende Relation!

Äquivalenzrelationen

Beispiele

Definition (Äquivalenzrelation)

Es sei M eine Menge. Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Äquivalenzrelation auf M, wenn sie

- reflexiv, symmetrisch und transitiv

ist.

Man bezeichnet

$$[x] := \{y \in M \mid (x, y) \in R\}$$

als Äquivalenzklasse von x. Jedes Element aus $[x]$ heißt Repräsentant (Vertreter) der Äquivalenzklasse $[x]$.

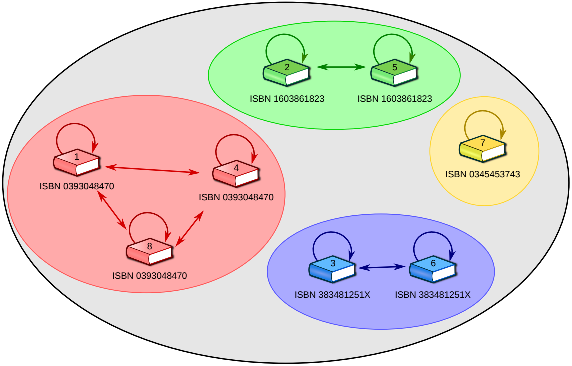
Notationen:

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad x \overset{R}{\sim} y \quad \Leftrightarrow \quad x \sim y.$$

Äquivalenzrelationen

Beispiele

- Mehrere Exemplare eines Buches mit derselben ISBN in einer Bibliothek:



Quelle: https://de.wikipedia.org/Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelationen

Beispiele

- Weitere Beispiele: Wörter mit denselben Anfangsbuchstaben; Gleichheitsbeziehungen in verschiedenen Mengen; Vektoren von derselben Richtung, aber von verschiedener Länge.
- P sei die Menge aller Personen, $T \subseteq P \times P$ mit $T := \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ haben das gleiche Geburtsjahr}\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf P.
- Es sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann ist die Relation $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

  $$(x, y) \in R \quad :\Leftrightarrow \quad x \equiv y (\text{mod } m)$$

  eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

  Die Menge der Äquivalenzklassen ($=$ Restklassen modulo m) notiert man als

  $$\mathbb{Z}_m := \{[r]_m \mid r \in \mathbb{N},\ r \equiv x (\text{mod } m),\ x \in \mathbb{Z}\}.$$

Äquivalenzrelationen

Aufgabe

Aufgabe (Äquivalenzrelation)

Es sei G die Menge aller **Geraden** im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Relation $R \subseteq G \times G$ mit

$$G := \{(g_1, g_2) \mid g_1 \parallel g_2\}$$

eine Äquivalenzrelation auf G ist. Wie lauten die Äquivalenzklassen?

Relationen

Von Relationen zu Funktionen

- Die Begriffe *Relation* und *Funktion* sind eng miteinander verwandt.
- Um genau zu sein, sind Funktionen Relationen mit speziellen Eigenschaften.
- Diese Eigenschaften wollen wir im folgenden Abschnitt kurz untersuchen.

Relationen

Von Relationen zu Funktionen

Definition (Rechtseindeutig)

Es seien X und Y zwei beliebige Mengen. Eine Relation $R \subseteq X \times Y$ heißt rechtseindeutig, falls für beliebige $x \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ gilt:

$$(x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R \implies y_1 = y_2.$$

Sprechweise: „*Gibt es zu einem $x \in X$ ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in R$, so gibt es kein anderes $y \in Y$ mit dieser Eigenschaft.*“

Eine rechtseindeutige Relation nennt man auch partielle Funktion.

Relationen

Von Relationen zu Funktionen – Aufgabe 1

Aufgabe 1

Es seien die Mengen $X := \{1, 2, 3, 4\}$ und $Y := \{a, b, c, d, e, f, g\}$ gegeben. Machen Sie sich den Begriff der Rechtseindeutigkeit klar, indem Sie die Elemente von X als Knoten eines Graphen untereinander auf einer Seite und die Elemente von Y als Knoten untereinander auf der anderen Seite anordnen. Wie müssen die gerichteten Kanten (= Pfeile von Knoten aus X zu Knoten aus Y) verlaufen, damit die so dargestellte Relation rechtseindeutig ist?

Relationen

Von Relationen zu Funktionen

Definition (Linkstotal)

Es seien X und Y zwei beliebige Mengen. Eine Relation $R \subseteq X \times Y$ heißt linkstotal, falls für alle $x \in X$ gilt:

$$\exists y \in Y : \quad (x, y) \in R.$$

Sprechweise:

„*Jedes Element x aus X hat mindestens einen Partner aus Y.*“

- Mit der Rechtseindeutigkeit hatten wir bereits den Begriff der *partiellen Funktion* eingeführt. Vielleicht ahnen Sie, wie wir nun eine **Funktion** definieren können...

Relationen

Von Relationen zu Funktionen

Definition (Funktion)

Eine Relation $R \subseteq X \times Y$ heißt Funktion, wenn sie *linkstotal* UND *rechtseindeutig* ist.

Formal bedeutet das:

$$\forall x \in X \; \exists! y \in Y : \quad (x, y) \in R.$$

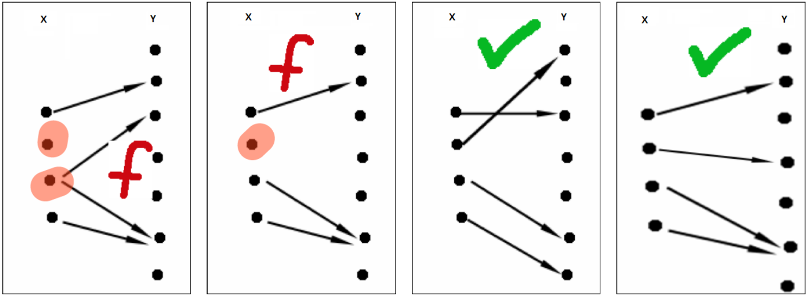
- Schreibweise für Funktionen $f \subseteq X \times Y$:

$$f : X \to Y, \; x \mapsto y \text{ mit } y = f(x).$$

Relationen

Von Relationen zu Funktionen

Merke: Funktionen sind linkstotal und rechtseindeutig!



Relationen

Von Relationen zu Funktionen

- Für eine Funktion $f : X \to Y$ werden wir folgende Bezeichnungen verwenden:
  - Definitionsbereich $D_f := \{x \in X \mid \exists y \in Y : \; y = f(x)\}$,
  - Wertebereich $W_f := \{y \in Y \mid \exists x \in X : \; y = f(x)\}$.
- Analog zu den Begriffen *linkstotal* und *rechtseindeutig* definiert man die Begriffe **rechtstotal** und **linkseindeutig**. Im Umfeld von (reellwertigen) Funktionen hat sich dafür allerdings eine andere Begriffswelt durchgesetzt.

Relationen

Von Relationen zu Funktionen

Definition

Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann gilt:

(1) f heißt injektiv, falls f **linkseindeutig** ist. Formal:

$$f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y \implies x_1 = x_2$$

Verbal: „*Jedes Element von Y wird von* **höchstens** *einem Pfeil aus X (von links) getroffen.*"

(2) f heißt surjektiv, falls f **rechtstotal** ist. Formal:

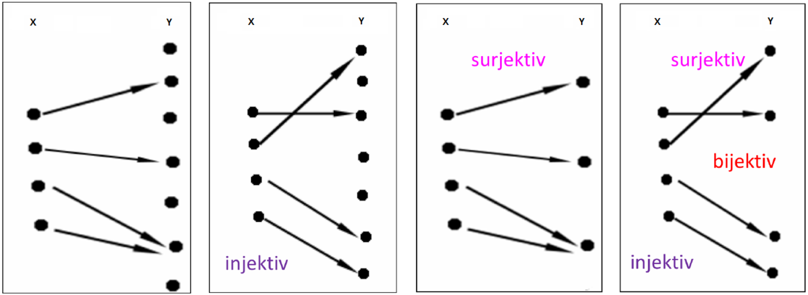
$$W_f = Y$$

Verbal: „*In jedes Element aus Y geht* **mindestens** *ein Pfeil von X.*"

(3) f heißt bijektiv, falls f injektiv UND surjektiv ist.
Verbal: „*Jedes Element aus Y wird von* **genau einem** *Pfeil von X getroffen und umgekehrt.*"

Relationen

Von Relationen zu Funktionen



Relationen

Von Relationen zu Funktionen

- Nun sind wir bestens mit all denjenigen Grundlagen versorgt, die wir benötigen, um uns mit reellwertigen Funktionen zu beschäftigen.
- Zunächst werden wir das mit Funktionen im Eindimensionalen $\mathbb{R}^1$ tun, so wie es aus der Schule bekannt ist.
- Die Darstellung von Funktionen als Graph mit Knoten und Kanten wird im Reellen offenbar schwierig, da es (überabzählbar) unendlich viele Knoten und Pfeile zwischen den Knoten gibt. Man behilft sich daher mit der altbekannten xy-Ebene.
- Im Anschluss werden wir uns mit Flächen im $\mathbb{R}^3$ beschäftigen – Objekten also, denen Sie in der konstruktiven Geometrie und später vor allem in der Computergrafik wieder begegnen werden.

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Relationen)

1. Sie definieren eine **Relation** als Teilmenge eines kartesischen Produkts von Mengen und geben verschiedene Notationsformen an.
2. Für eine **binäre Relation** erklären Sie die **inverse Relation**.
3. Sie **visualisieren** Relationen in Tabellenform oder als Graph.
4. Sie untersuchen **homogene Relationen** auf verschiedene Eigenschaften und erkennen daraus, ob es sich um **Ordnungs**- oder **Äquivalenzrelationen** handelt. Für beide Typen geben Sie geeignete Beispiele an. Für gegebene Äquivalenzrelationen finden Sie zugehörige **Äquivalenzklassen**.
5. Sie definieren **Funktionen** im Sinne einer Relation und erläutern die Begriffe, die dazu benötigt werden.
6. Sie visualisieren Funktionen als Graphen und erläutern anhand von Beispielen die Begriffe **Injektivität**, **Surjektivität** sowie **Bijektivität**.

Inhalt

von Kapitel 3: Analysis

Beispiele

Explizite Form von Funktionen

(a) $y = f(x), \quad y := x^2$ (explizite Form)

Beispiele

Implizite Form von Funktionen

(b) $F(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 = 4,\ y \geqslant 0$ (implizite Form)

Beispiele

Implizite Form von Funktionen

(c) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Beispiele

Zusammengesetzte (= abschnittsweise definierte) Funktionen

(d) $y := \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = |x|$

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Funktionsbegriff

Definition (Funktion)

Ein Funktion ist eine *eindeutige* Zuordnung

$$\begin{aligned} f : X &\to Y, \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Dabei heißt

- $X = D_f$ Definitionsbereich von f, Y Zielmenge,
- $W_f := \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ für } x \in D_f\} \subseteq Y$ Wertebereich von f.

- Ein Element der Zielmenge Y kann genau einem, mehreren, oder auch keinem Element der Definitionsmenge D_f zugeordnet sein.
- Ein Element des Wertebereichs W_f ist *mindestens* einem Element des Definitionsbereichs D_f zugeordnet.

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Funktionsbegriff

- Oft sind D_f und W_f Teilmengen bekannter Mengen, wie z.B. $\mathbb{R}$.
- Man schreibt dann meist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die konkreten Definitions- und Wertebereiche $D_f, W_f = f(D_f) \subseteq \mathbb{R}$ müssen erst bestimmt werden.

Funktionsbegriff

Eigenschaften von f

1. f heißt eineindeutig (oder bijektiv) $\Leftrightarrow$ f ist umkehrbar eindeutig, d.h. $\exists f^{-1}$
   mathematisch geschrieben: $\forall y \in W_f \; \exists! x \in D_f$.
2. f heißt beschränkt nach oben, wenn ein $s \in \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt:

$$\forall x \in D_f : \quad f(x) \leqslant s.$$

   f heißt beschränkt nach unten, wenn ein $s \in \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt:

$$\forall x \in D_f : \quad f(x) \geqslant s.$$

   f heißt beschränkt, wenn f sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Funktionsbegriff

Monotonie

3. Monotonie von f:

f (streng) monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \geqslant f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Aufgabe (Monoton steigende Funktion)

Wie definiert man dann wohl eine (streng) monoton steigende Funktion?

f heißt (streng) monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \_\_\_\_ f(x_2) \quad (f(x_1) \_\_\_\_ f(x_2)).$$

Funktionsbegriff

Monotonie

Bemerkung

Ist eine Funktion f streng monoton auf einem Intervall, so existiert auf diesem Intervall die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Funktionsbegriff

Spezielle Funktionen

- Potenzfunktionen: $f(x) = x^a$ mit $a \neq 0$ vorgegebene Konstante,
- Exponentialfunktionen: $f(x) = a^x$ mit $a > 0$, $a \neq 1$, vorgegebene Konstante,
- Logarithmusfunktionen: $f(x) = \log_a(x)$ mit $a > 0$, $a \neq 1$, vorgegebene Konstante,
- Winkelfunktionen (Sinus, Cosinus, Tangens):

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \cos(x), \quad h(x) = \tan(x).$$

Aufgabe (Funktionen plotten)

Plotten Sie die oben genannten speziellen Funktionen (für Parameter a Ihrer Wahl) in einer Software Ihrer Wahl (oder auch online, z.B. auf `http://geogebra.org`) und untersuchen Sie verschiedene Eigenschaften der Funktionen wie Monotonieverhalten, Verhalten bei Parameterveränderung, Nullstellen (d.h. Stellen $\overline{x} \in D_f$, für die $f(\overline{x}) = 0$ gilt).

Funktionsbegriff

Funktionsgraph

Definition (Graph)

Es sei eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ gegeben. Die Menge aller Punkte

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f\}$$

heißt Graph der Funktion f.

Die geordneten Paare $(x, f(x))$ für $x \in D_f$ können als Punkte in der xy-Ebene dargestellt werden.

Funktionsbegriff

Aufgabe

Aufgabe (Funktionsuntersuchungen)

Es seien die Funktionen

$$f_1(x) := x^2 - 2x + 3, \quad f_2(x) := -2(x+1)^2 + 3, \quad f_3(x) := |x| - 1.$$

gegeben. Fertigen Sie jeweils eine Skizze an und berechen Sie die Nullstellen der Funktionen.

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Grenzwert

Definition (Grenzwert)

Es sei eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ gegeben. Eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von f für $x \rightarrow x_0$, wenn für jede Zahlenfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften

$$\text{(i) } \forall k \in \mathbb{N}: \ (x_k) \in D_f, \quad \text{(ii) } \forall k \in \mathbb{N}: \ x_k \neq x_0, \quad \text{(iii) } \lim_{k\rightarrow\infty} x_k = x_0$$

die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen λ konvergiert.

Man schreibt:

$$\lim_{x\rightarrow x_0} f(x) = \lambda \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow \lambda \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Stetigkeit

Definition (Stetigkeit)

Es seien eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_f$ gegeben. Die Funktion $f(x)$ heißt stetig an der Stelle x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt, d.h. wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt.

Eine Funktion heißt stetig, wenn sie in jedem $x \in D_f$ stetig ist.

- Salopp gesagt kann man eine stetige Funktion mit einem Stift zeichnen, ohne den Stift jemals absetzen zu müssen.

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Visualisierung der Ableitung

Aufgabe (Graphische Interpretation der Ableitung)

Sehen Sie sich das folgende Video von Daniel Jung auf YouTube an

`https://www.youtube.com/watch?v=7xd_G5uIp7k`

und beantworten Sie bitte folgende Fragen:

(1) Wie berechnet man die *Steigung* einer Geraden?

(2) Skizzieren Sie eine beliebige Funktion f in einem xy-Koordinatensystem und wählen Sie einen Punkt $P(x, y)$ auf dem Graphen von f. Was ist eine *Sekante* durch den Punkt $P(x, y)$?

(3) Wie funktioniert der Übergang von der Sekante zur Tangente graphisch?

(4) Skizzieren Sie die *Tangente* an f im Punkt $P(x, y)$.

(5) Wie berechnet sich die Steigung der Tangente?

(6) Was ist mit Steigung von f im Punkt $P(x, y)$ gemeint?

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Ableitung

Definition (Ableitung)

Der durchschnittliche Anstieg einer reellen Funktion $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, zwischen x_0 und $x_1 := x_0 + h$, d.h. der Anstieg der Sekante des Graphen von $y = f(x)$ durch die Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1), ist gleich dem Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Falls der Grenzwert

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert, so heißt er Differentialquotient oder 1. Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = x_0$.

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Weitere Definitionen

Definition (Tangente & Ableitungsfunktion)

- Die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ lautet:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

- Ist eine Funktion f in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches D_f (oder zumindest eines Intervalls $[a; b] \subset D_f$) differenzierbar, so heißt die Funktion in D_f (bzw. auf $[a; b]$) differenzierbar und es gilt

$$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

f' heißt dort Ableitungsfunktion oder 1. Ableitung von $y = f(x)$.

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Geometrische Bedeutung der 1. Ableitung

- Ist $f'(x) \geqslant 0$ ($f(x) > 0$) auf einem Intervall $[a; b] \subseteq D_f$, so ist f auf $[a; b]$ (streng) monoton *wachsend*.
- Gilt $f'(x) \leqslant 0$ ($f(x) < 0$) auf einem Intervall $[a; b] \subseteq D_f$, so ist f auf $[a; b]$ (streng) monoton *fallend*.
- Mit diesem Wissen kann man die 1. Ableitungsfunktion einer Funktion auch schnell skizzieren:

  https://www.youtube.com/watch?v=TJqJ1rPJAiE

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Weitere Ableitungen

Definition (Höhere Ableitungen)

Die Ableitungsfunktion kann auch von einer Ableitungsfunktion $f'(x)$ gebildet werden, sofern diese differenzierbar ist. Die Ableitungsfunktion einer 1. Ableitung heißt 2. Ableitung $f''(x) := [f'(x)]'$, usw.

$f(x)$ heißt n-mal differenzierbar, wenn alle Ableitungen bis einschließlich n-ter Ordnung $(f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x))$ existieren. Man schreibt:

$$f^{(n)}(x) := \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}(x).$$

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Geometrische Bedeutung der 2. Ableitung

- Ist $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) > 0$) auf einem Intervall $[a; b] \subseteq D_f$, so ist f auf $[a; b]$ nach links/oben gekrümmt, bzw. (streng) konvex.
- Gilt $f''(x) \leqslant 0$ ($f''(x) < 0$) auf einem Intervall $[a; b] \subseteq D_f$, so ist f auf $[a; b]$ nach rechts/unten gekrümmt, bzw. (streng) konkav.
- Eine graphische Zusammenfassung dieser Zusammenhänge mit einem kleinen Ausblick finden Sie hier:

  https://www.youtube.com/watch?v=iHj95FLyEZM

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Ableitungsregeln

Satz (Ableitungsregeln)

Es seien f, g auf geeigneten Definitionsbereichen stetig differenzierbare Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Ableitungsregeln:

1. Summenregel: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
2. Konstanter Faktor: $(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x)$,
3. Produktregel: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
4. Quotientenregel: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$,
5. Kettenregel: $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Ableitungen einiger wichtiger Funktionen

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
2. $(\sin(x))' = \cos(x), \quad (\cos(x))' = -\sin(x),$

   $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}, \quad (\cot(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)},$
3. $(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln(a)$
4. $(\ln(x))' = \dfrac{1}{|x|}, \quad (\log_a(x))' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)},$
5. $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

   $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad (\text{arccot}(x))' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Aufgaben

Aufgabe (Ableitungen)

Leiten Sie die folgenden Funktionen unter Verwendung der Ableitungsregeln nach x ab:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x^{\frac{1}{2}} & f_4(x) &= \sin(2x) \cdot (5x^2 - 6) \\ f_2(x) &= \frac{2}{3x-1} & f_5(x) &= 5x^3\sqrt{\tan(x)} \\ f_3(x) &= 5z + e^x & f_6(x) &= 5^{2x} \end{aligned}$$

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Logarithmisches Differenzieren

Aufgabe (Logarithmisches Differenzieren)

Leiten Sie die folgende Funktion nach x ab:

$$f(x) := e^{2x} \cdot x \cdot \sin(x).$$

Lösung

- Trick: Logarithmieren von f führt zu $\ln(f(x)) = \ln\left(e^{2x} \cdot x \cdot \sin(x)\right)$.
- Gemäß der Logarithmusrechenregeln gilt dann:

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \ln\left(e^{2x}\right) + \ln(x) + \ln(\sin x) \\ &= 2x \cdot \ln e + \ln x + \ln(\sin x) \\ &= 2x + \ln x + \ln(\sin x). \end{aligned}$$

Funktionen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Logarithmisches Differenzieren – Fortsetzung

- Ableiten der Gleichung unter Berücksichtigung, dass für $[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ gilt, führt zu:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = 2 + \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x}.$$

- Multiplikation der Gleichung mit $f(x) = e^{2x} \cdot x \cdot \sin(x)$ führt zum gewünschten Ergebnis:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot f(x) = \left[2 + \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right] \cdot e^{2x} \cdot x \cdot \sin(x) \\ &= 2xe^{2x}\sin(x) + e^{2x}\sin(x) + xe^{2x}\cos(x) \end{aligned}$$

Allgemein lohnt sich logarithmisches Differenzieren immer dann, wenn die Funktion von der Form $f(x) = u_1(x)^{v_1(x)} \cdot u_2(x)^{v_2(x)} \cdots$ ist. Durch Anwendung der Logarithmusrechenregeln und der Produktegel beim Ableiten erhält man das gewünschte Ergebnis.

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Funktionen einer Variablen)

1. Sie definieren allgemein den Begriff einer **reellwertigen** Funktion.
2. Sie nennen Beispiele für reellwertige Funktionen und gegeben deren **Definitions**- und **Wertebereich** an.
3. Sie nennen **Eigenschaften** von Funktionen und untersuchen Beispielfunktionen darauf.
4. Sie erläutern die Begriffe **Grenzwert** und **Stetigkeit** einer Funktion und erörtern in diesem Zusammenhang, was man unter der **Ableitung** einer Funktion versteht.
5. Mit Hilfe geeigneter **Ableitungsregeln** berechnen Sie für eine gegebenene Funktion f Ableitungen beliebiger Ordnung.

Inhalt

von Kapitel 3: Analysis

Folgen & Reihen

Lernziele

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Abbildungen aus den natürlichen in die reellen Zahlen und ihre Bedeutung in der näherungsweisen Berechnung von Funktionen.

- Wir lernen allgemein Folgen als Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ kennen.
- Nach einigen konkreten Beispielen für Folgen überlegen wir uns, wann Folgen konvergent sind und wie wir ihre Grenzwerte berechnen können.
- Wir definieren unendlich Reihen als spezielle Folgen von Partialsummen und betrachten notwendige und hinreichende Bedingungen für Konvergenz.
- Im letzten Abschnitt erweitern wir den Begriff der unendlichen Reihe auf Funktionenreihen und dort im Speziellen auf Potenzreihen und deren Konvergenz.

Folgen

Beispiele

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$

(ii) $1, -1, 1, -1, \ldots$

(iii) $\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{9}, \frac{10}{17}, \ldots$

(iv) $\frac{3}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{9}, \frac{1}{17}, \ldots$

Folgen

Definition

Definition (Folge)

Eine (reelle) Zahlenfolge (kurz: Folge) ist eine Abbildung

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

a_n nennt man n-tes Glied der Folge.

Bemerkung

- Anstelle der Anordnung $a_0, a_1, a_2, \ldots$ schreibt man auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz $(a_n)_n$.

Folgen

Beispiele

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_n$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\right)_n$ harmonische Folge (Intervalldefinition in Musik)

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}\right)_n$ alternierende Folge
(aufeinander folgende Folgeglieder besitzen unterschiedliche Vorzeichen)

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2n+3)_n$ arithmetische Folge
(Differenz aufeinander folgender Folgeglieder ist konstant)

(e) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left((-1)^n \dfrac{1}{2^n}\right)_n$ geometrische Folge
(Quotient aufeinander folgender Folgeglieder ist konstant, m.a.W.:
$\exists q \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} = q \cdot a_n$)

(f) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{n + (-1)^n}{n}\right)_n$ Grenzwert?

Erinnerung: $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Folgen

Arithmetische und geometrische Folge

	Arithmetische Folge	**Geometrische Folge**
Definition	**Differenz** d benachbarter Folgenglieder ist konstant $\Leftrightarrow \quad a_n = a_{n-1} + d$	**Quotient** q benachbarter Folgenglieder ist konstant $\Leftrightarrow \quad b_n = b_{n-1} \cdot q$
Berechnung	$a_n = a_0 + n \cdot d$	$b_n = b_0 \cdot q^n$
Beispiel	$(3, 5, 7, 9, 11, \ldots)$ $\Rightarrow a_0 = 3 \ \wedge \ d = 2$ $\Rightarrow a_n = 3 + 2n$	$\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ $\Rightarrow b_0 = 1 \ \wedge \ q = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow b_n = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $\Leftrightarrow b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$
Charakteristische Eigenschaft	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ *Arithmetisches Mittel*	$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ *Geometrisches Mittel*

Folgen

Konvergenz

Definition (Grenzwert einer Folge)

Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den (reellen) Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ ein Index $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geqslant N$ immer $|a_n - g| < \varepsilon$ folgt.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oder $a_n \to g$ $(n \to \infty)$.

Eine Folge heißt konvergente Zahlenfolge, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Eine konvergente Folge mit dem Grenzwert 0 heißt Nullfolge. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergente Zahlenfolge.

Grenzprozesse (also Konvergenz) in jeglicher Form sind ein wesentliches Merkmal der Analysis, man denke nur an Ableitung oder Integration!

Konvergenz

Beispiel

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)_n$$ Grenzwert?

Konvergenz

Beispiel

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k-2)^2+3k}{2k^2+7k-9} =$$

Reihen

Beispiele

Folge	$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ldots$	$1;\ 0.1;\ 0.01;\ 0.001;\ldots$
Reihe	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$	$1+0.1+0.01+0.001+\ldots$

- Reihen treten zum Beispiel bei der Schreibweise von Dezimalbrüchen auf:

$$z := 0, a_1 a_2 a_3 \ldots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

  mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

- Dabei bricht die Dezimalentwicklung ab, sobald die Ziffernfolge ab einer Stelle $n \in \mathbb{N}$ nur noch aus Nullen besteht.
- Bei allen **rationalen** Zahlen liegt entweder eine endliche oder eine unendlich periodische Dezimalbruchentwicklung vor.
- Bei allen irrationalen Zahlen bricht die Dezimalbruchentwicklung dagegen weder ab noch ist sie periodisch. Es liegt also (z.B. für $\sqrt{2}$) eine sowohl unendliche als auch unperiodische Dezimalbruchentwicklung vor.

Reihen

Dezimalbrüche

- Statt der Zahl 10 bei einer Dezimalbruchentwicklung könnte man auch jede andere beliebige Zahl x einsetzen.
- Dies führt ganz allgemein zu einer Abbildung $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k$.
- Diese Idee wird verwendet, um Funktionen wie z.B, die Exponentialfunktion e^x zu definieren.
- Ganz allgemein lassen sich durch die Darstellung von Funktionen durch (Funktionen-)Reihen Operationen wie Addition oder Multiplikation, Ableitung und Integration auf Computern implementieren.
- Hier betrachten wir zunächst Reihen ohne x-Abhängigkeit. Die dafür entwickelten Theorien übertragen wir später auf Potenzreihen.

Reihen

Definition

Definition (Reihe)

Die aus der Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruierte Zahlenfolge der Partialsummen

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

heißt unendliche Reihe.

Man schreibt kurz: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Reihen

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = ?$$

Reihen

Konvergenz

Definition (Konvergenz von Reihen)

Eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiert** (**divergiert**) genau dann, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (divergiert).

Wenn eine unendliche Reihe gegen einen Grenzwert s konvergiert, dann nennt man s **Reihensumme** und schreibt $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k\right)$.

Eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Reihenkonvergenz

Die geometrische Reihe

Es sei die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

gegeben. Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe in Abhängigkeit der reellen Zahl q!

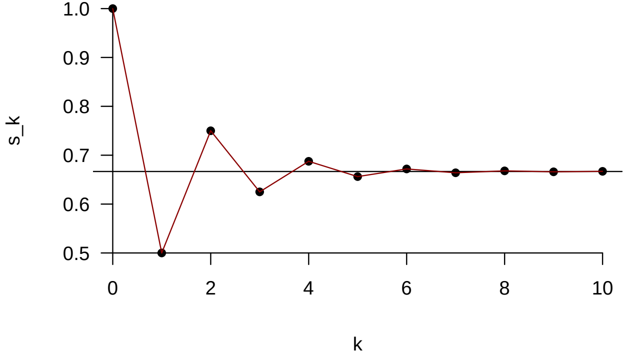
Reihenkonvergenz

Die geometrische Reihe

Die geometrische Reihe

Anwendungsbeispiel

Berechnen Sie die Reihensumme $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k$.



Reihen

Konvergenzkriterien

Satz (Notwendige Bedingung für Konvergenz)

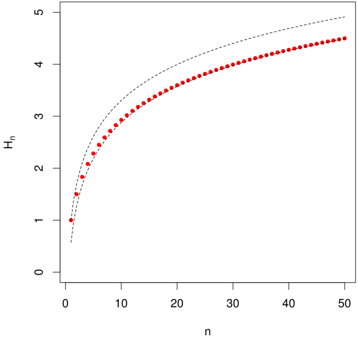
Wenn eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist, so bilden die Glieder $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h. es gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

- Die Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen nicht!
  D.h. die Nullfolgenbedingung ist keine **hinreichende** Bedingung.

Konvergenzkriterien

Die harmonische Reihe

Für die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ gilt $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \infty$, obwohl $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

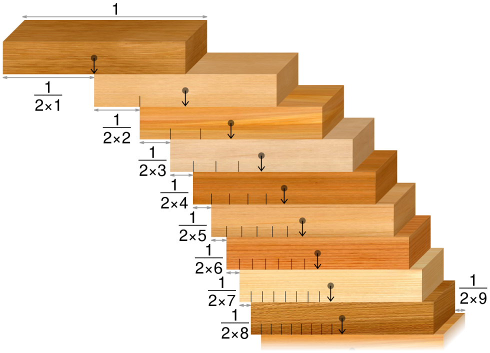


de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Reihe

Harmonische Reihe

Anwendung

Problem: Gleichartige Klötze sollen so gestapelt werden, dass der oberste Klotz möglichst weit über den untersten ragt.



en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(mathematics)

Reihen

Konvergenzkriterien

Satz (Konvergenzkriterien, hinreichende Bedingungen)

1. Wenn $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine alternierende Zahlenfolge ist, für die $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| = 0$ gilt, so konvergiert die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

2. Quotientenkriterium: Es sei $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} =: q$.

   Für $|q| < 1$ konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, für $|q| > 1$ divergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.
   Für $|q| = 1$ liefert das Kriterium keine Entscheidung.

3. Wurzelkriterium: Es sei $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} =: w$.

   Für $0 \leqslant w < 1$ konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, für $w > 1$ divergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.
   Für $w = 1$ liefert das Kriterium keine Entscheidung.

Reihen

Konvergenzkriterien

Satz (Konvergenzkriterien – Fortsetzung)

4. Majorantenkriterium: Es seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ unendliche Reihen.

   - Es gelte $|a_k| < b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
     Wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.
   - Es gelte $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
     Wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert, so divergiert auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$.

Konvergenzkriterien

Beispiele

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

Konvergenzkriterien

Beispiele

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2k}$

Konvergenzkriterien

Beispiele

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}$

Konvergenzkriterien

Beispiele

(d) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ (alternierende harmonische Reihe)

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Folgen und Reihen)

1. Für eine gegebene **Zahlenfolge** finden Sie eine explizite Berechnungsvorschrift (falls möglich).
2. Sie erläutern Eigenschaften sowohl von **arithmetischen** als auch **geometrischen** Folgen.
3. Sie erkennen, ob eine Folge **konvergiert** oder **divergiert** und berechnen ggf. ihren **Grenzwert**.
4. Sie definieren **Reihen** als spezielle Folgen und erläutern, in welchem Zusammenhang sie in der Zahlendarstellung auftreten.
5. Sie erläutern notwendige und hinreichende **Konvergenzkriterien** für Reihen und überprüfen damit gegebene Beispiele auf Konvergenz.
6. Sie berechnen den Grenzwert einer gegebenen **geometrischen Reihe**.

Inhalt

von Kapitel 3: Analysis

Integralrechnung

Unbestimmte Integrale & Stammfunktion

Definition (Stammfunktion)

Jede Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für deren Ableitung

$$F'(x) = f(x)$$

gilt, heißt Stammfunktion der Funktion $f(x)$.

Unbestimmte Integrale & Stammfunktion

Definition

Definition (Unbestimmtes Integral)

Die Berechnung einer Stammfunktion wird als unbestimmtes Integrieren bezeichnet. "Unbestimmt" deshalb, weil mit $F(x)$ jede Funktion $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Man schreibt:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + c,$$

wobei $\mathrm{d}x$ die Integrationsvariable angibt, d.h. $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$.

Unbestimmte Integrale & Stammfunktion

Einige Stammfunktionen

Integrand $f(x)$	**Stammfunktion** $F(x) = \int f(x)\, \mathrm{d}x$	**Bedingung**
x^c	$\frac{1}{c+1} x^{c+1}$	$c \neq -1$
e^x	e^x	
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Unbestimmte Integrale & Stammfunktion

Integrationsregeln

Satz (Integrationsregeln)

Es seien $f, g, u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit geeigneten Definitionsbereichen. Es gelten folgende Integrationsregeln:

Kurzbezeichnung	**Integrationsregel**
Konstanter Faktor	$\int \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x,\ \lambda \in \mathbb{R}$
Summe/Differenz	$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int f(x)\,\mathrm{d}x$
Partielle Integration	$\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$
Substitution	$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\mathrm{d}y,$ wobei $y := g(x),\ \mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x$
Lineare Substitution	$\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + c,\ a \neq 0$
Logarithmische Integration	$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + c$

Beispiele

Grundintegrale

Aufgabe (Grundintegrale)

Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(G1) $\displaystyle\int \left(x^3 - 2x + 5\right)\, \mathrm{d}x$

(G2) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 5}{x}\, \mathrm{d}x$

(G3) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\, \mathrm{d}x$

(G4) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)\, \mathrm{d}x$

(G5) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\right)\, \mathrm{d}x$

(G6) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}x$

Beispiele

Grundintegrale

(G1)

$$\begin{aligned}\int \left(x^3 - 2x + 5\right)\ \mathrm{d}x &= \int x^3\ \mathrm{d}x - \int 2x\ \mathrm{d}x + \int 5\ \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{4}x^4 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + 5x + c \\ &= \tfrac{1}{4}x^4 - x^2 + 5x + c.\end{aligned}$$

Probe: $\left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 + 5x + c\right]' = x^3 - 2x + 5$ ✓

Beispiele

Grundintegrale

(G2)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-2x+5}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^3}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2x}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int x^2\,\mathrm{d}x - \int 2\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 2x + 5\ln|x| + c.\end{aligned}$$

Probe: $\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x + 5\ln|x| + c\right]' = \ldots\ \checkmark$

Beispiele

Grundintegrale

(G3) $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\, \mathrm{d}x =$

Beispiele

Grundintegrale

(G4) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) \, dx =$

Beispiele

Grundintegrale

(G5) $\displaystyle\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right)\, dx =$

Beispiele

Grundintegrale

(G6) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$

Unbestimmte Integrale & Stammfunktion

"Differenzieren ist ein Handwerk, Integrieren ist eine Kunst."

https://xkcd.com/2117/

Bestimmte Integrale

Definition

Definition (Bestimmtes Integral)

Die Fläche A, die innerhalb eines Intervalls $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ zwischen x-Achse und dem Graphen der stetigen Funktion $f(x)$ liegt, wird durch das bestimmte Integral $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnet.

Achtung: Dieser Wert ist vorzeichenbehaftet, d.h. in Abhängigkeit davon, ob f auf $[a; b]$ positiv oder negativ ist, hat A positives oder negatives Vorzeichen.

Im Falle von wechselnden Vorzeichen von f auf $[a; b]$ gibt A die Differerenz der Teilflächen ober- und unterhalb der x-Achse an.

Bestimmte Integrale

Skizze

Aufgabe (Skizze des Flächeninhaltes)

Skizzieren Sie folgende Flächen (z.B. mit http://geogebra.org) und entscheiden Sie, ob das Vorzeichen des Flächeninhaltes positiv oder negativ ist.

$$\text{(a)} \int_0^1 (2x-2)\,\mathrm{d}x, \quad \text{(b)} \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \text{(c)} \int_{-1}^1 \left(x^5 - x\right)\,\mathrm{d}x.$$

Bestimmte Integrale

Der Hauptsatz der Integralrechnung

Satz (Hauptsatz der Integralrechnung)

Es seien F eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a),$$

bzw.

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

- Beide Darstellungsvarianten des Zusammenhangs zwischen Differential- und Integralrechnung werden auch als 1. und 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bezeichnet.

Bestimmte Integrale

Eigenschaften bestimmter Integrale

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,\\
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x,\\
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{falls } \forall x \in [a;b]:\ f(x) \leqslant g(x),\\
\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y, \quad \text{wobei } y := g(x),\ \mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Bestimmte Integrale

Beispiele

Aufgabe (Bestimmte Integrale)

Lösen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\text{(a)} \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{(b)} \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \text{(c)} \int_0^3 e^{\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x.$$

Bestimmte Integrale

Beispiele

(a)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 0^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Bestimmte Integrale

Beispiele

(b)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln|x|]_{-2}^{-1}$$
$$= \ln|-1| - \ln|-2|$$
$$= \ln(1) - \ln(2)$$
$$= -\ln(2) \approx 0.693.$$

Bestimmte Integrale

Beispiele

(c) $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{e}^{\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x =$

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Integralrechnung)

1. Sie machen sich bewusst, dass jede reellwertige integrierbare Funktion unendlich viele **Stammfunktionen** besitzt.
2. Sie nutzen **Integrationsregeln** zur Berechnung von Stammfunktionen.
3. Sie interpretieren das **bestimmte Integral** in Abhängigkeit des Vorzeichens geometrisch.
4. Sie nutzen **Integrationsregeln** zur Berechnung von Flächeninhalten.
5. Sie beschreiben den **Zusammenhang** von Integral- und Differenzialrechnung.