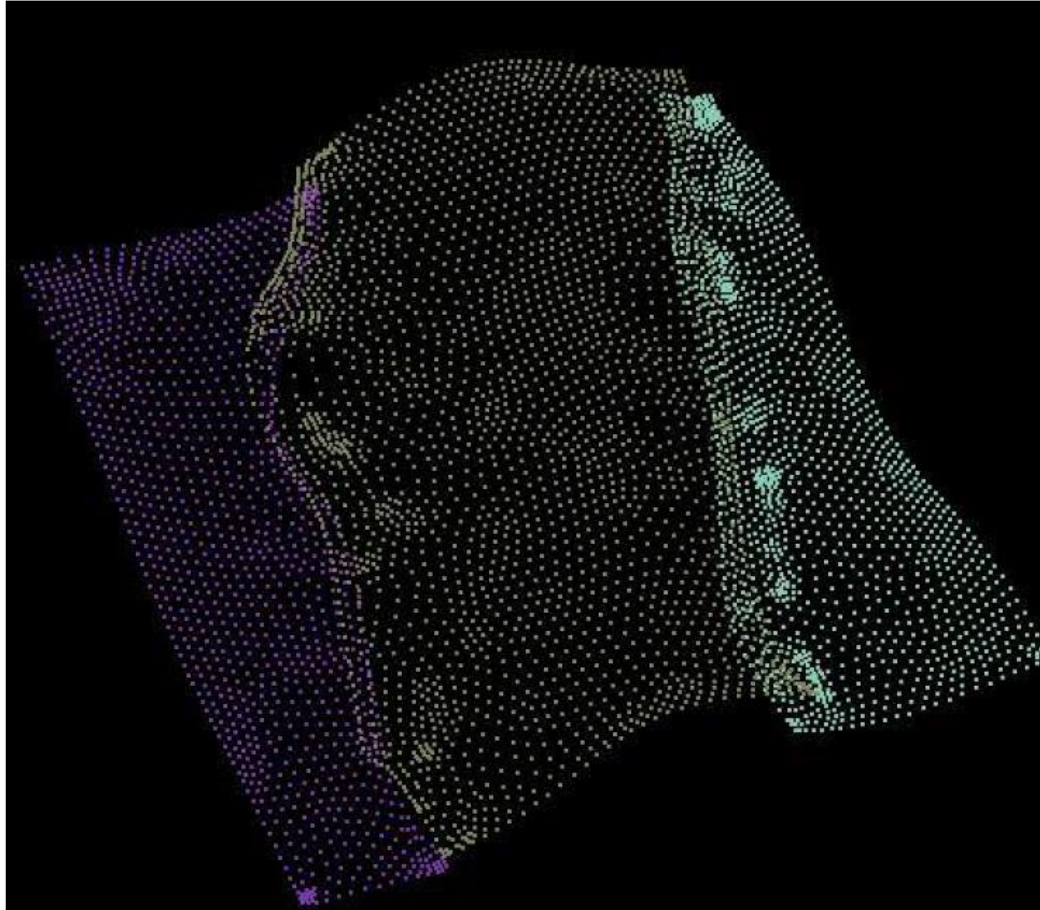
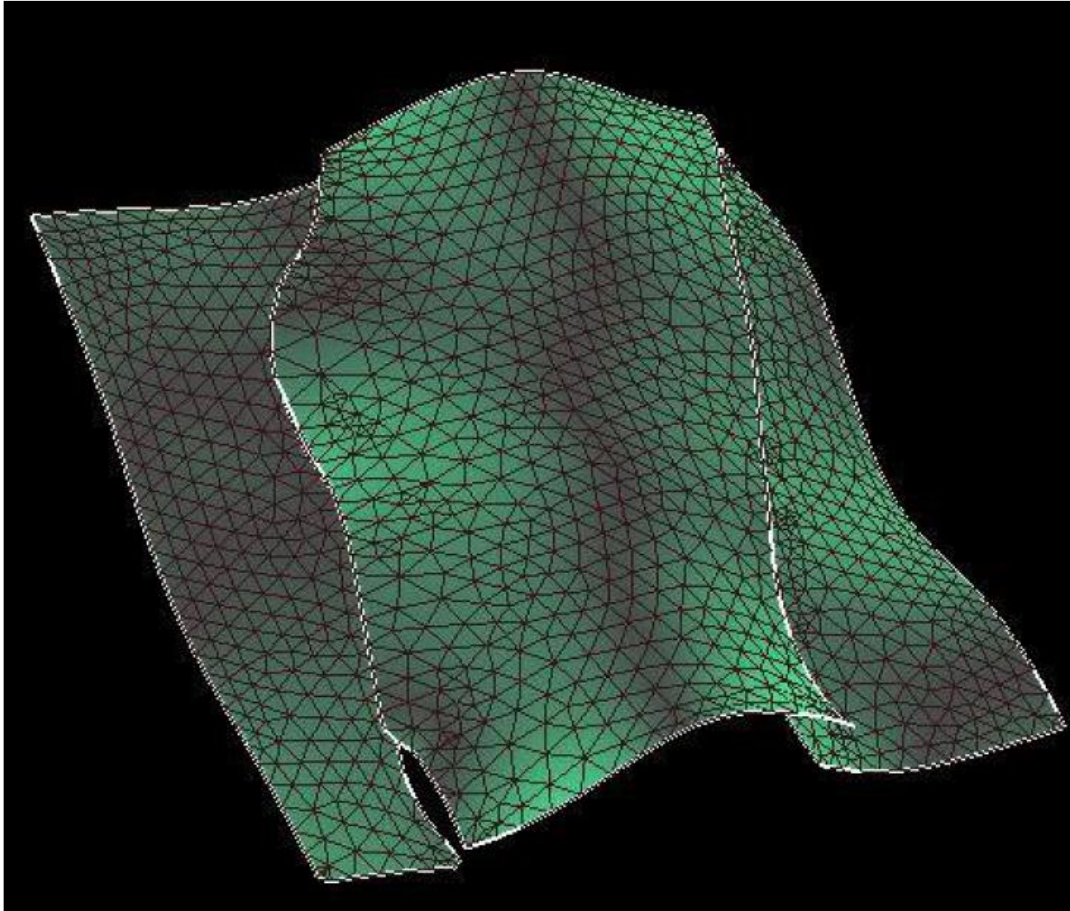


1. Definitionen, Funktionen, Anwendungen (Vorlesung 1)
2. Koordinatensysteme und -transformationen (Vorlesung 2+3)
3. Räumliche Datenmodellierung (Vorlesung 4 - 6)
- 4. Vermaschungen**
5. Räumliche Interpolation
6. Transformationen, Filtermethoden, Sonstiges

# Zerlegungen und Triangulierung (Partition and Triangulation)

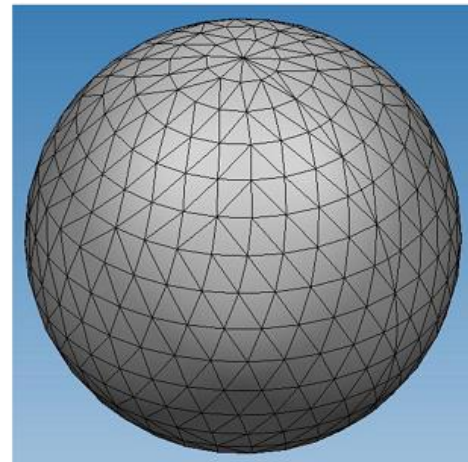
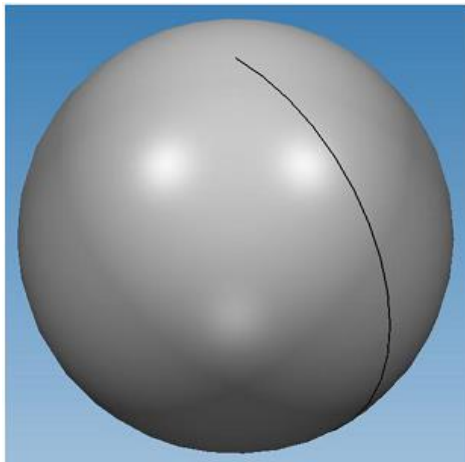


# Zerlegungen und Triangulierung (Partition and Triangulation)



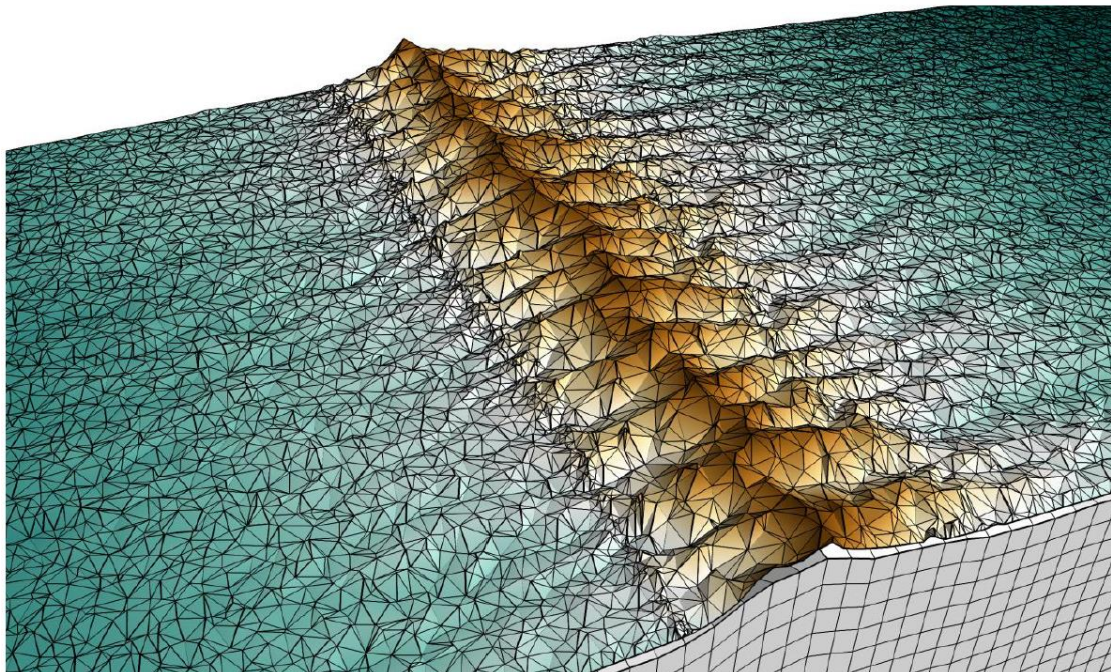
## Zerlegungen und Triangulierung (Partition and Triangulation)

Im Bereich “computer aided geometric design” oder “computational geometry” bezieht sich der Terminus “Zerlegung” auf jedes beliebige Verfahren, um ein beliebiges  $n$ -dimensionales Objekt in eine Menge benachbarter polytopaler\*  $n$ -dimensionaler Zellen zu zerlegen.



## Zerlegungen und Triangulierung (Partition and Triangulation)

Im Kontext von GIS werden Zerlegungen verwendet, wenn ein Geoobjekt über seine Bestandteile beschrieben werden soll. Diesen Bestandteilen können dadurch eigene Attribute zugewiesen werden.



## Zerlegungen und Triangulierung (Partition and Triangulation)

Im Kontext von GIS werden Zerlegungen verwendet, wenn ein beliebiges Geobjekt über seine Bestandteile beschrieben werden soll. Diesen Bestandteilen können dadurch eigene Attribute zugewiesen werden.

Auf diesen Bestandteilen lassen sich Berechnungen zumeist sehr viel einfacher durchführen, als auf dem Objekten selbst. Eine digitale visuelle Darstellung eines beliebigen Objektes ist ohne eine Vermaschung des Objektes in einfache diskrete Zellen oft nicht möglich.

Zerlegungen sind eine spezielle Form des Vektormodells.

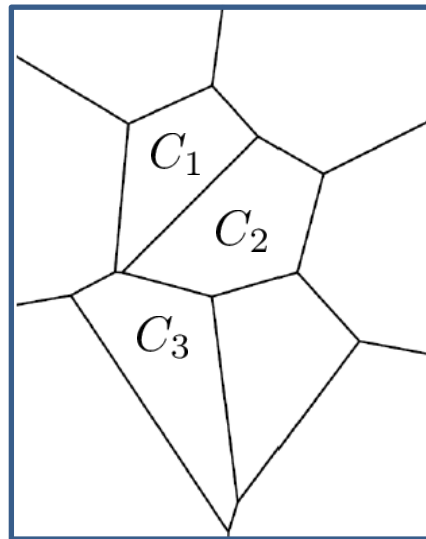
# Zerlegung / Vermaschung

Eine **Zerlegung** (*partition*) einer Region  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Menge offener Zellen  $C_i \subset \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, N$  mit  $C_i \cap C_j = \emptyset, i \neq j$ , so dass gilt

$$\Omega = \bigcup_{i=1, \dots, N} C_i$$

Eine solche Zerlegung wird auch als Vermaschung (*tesselation*) bezeichnet.

Die „*Offenheit*“ der Zellen ist für eine exakte mathematische Beschreibung notwendig ...



# Voronoi Vermaschung

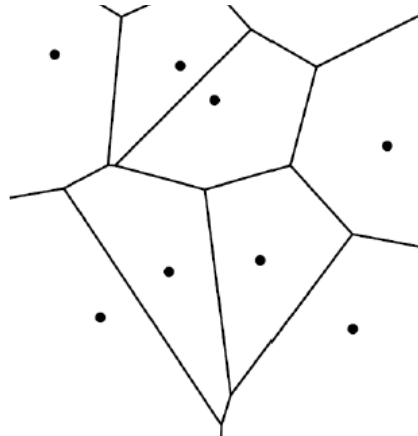
Gegeben sei eine Punktmenge  $P = \{p_i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \dots, N\}$ . Eine **Voronoi-Zelle**  $V_i$  beschreibt die Menge

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p_i| < |x - p_j|, i \neq j\}.$$

Eine solche Zelle ist eine spezielle Form eines Polytops (z.B. ebener Polyeder in 3D od. ebenes Polygon in 2D). Dabei bilden die Zellen  $C_i = V_i$  „annähernd“\* eine Zerlegung des  $\mathbb{R}^n$ .

\*Warum nur „annähernd“?

Formal müssten die  $M$  Grenzkanten aller Zellen mit als zusätzliche Zellen  $C_i, i = N + 1, \dots, N + M$  und alle  $K$  Knoten, an denen sich Kanten treffen, als zusätzliche Zellen  $C_i, i = N + M + 1, \dots, N + M + K$  mit einbezogen werden. Diese Zellen werden durch die „Offenheits“-Bedingung nicht automatisch erfasst.



# Voronoi Vermaschung

Gegeben sei eine Punktmenge  $P = \{p_i \in \mathbb{R}^n: i = 1, \dots, N\}$ . Eine **Voronoi-Zelle**  $V_i$  beschreibt die Menge

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^n: |x - p_i| < |x - p_j|, i \neq j\}.$$

Eine solche Zelle ist eine spezielle Form eines Polytops (z.B. ebener Polyeder in 3D od. ebenes Polygon in 2D). Dabei bilden die Zellen  $C_i = V_i$  „annähernd“\* eine Zerlegung des  $\mathbb{R}^n$ .

Der **Bisector** zwischen zwei Punkten  $p_i, p_j$  ist gegeben durch

$$B_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x - p_i| = |x - p_j|, i \neq j\}$$

Und teilt den  $\mathbb{R}^n$  in zwei Halbräume.  $B_{i,j}$  repräsentiert die Grenze des Halbraums

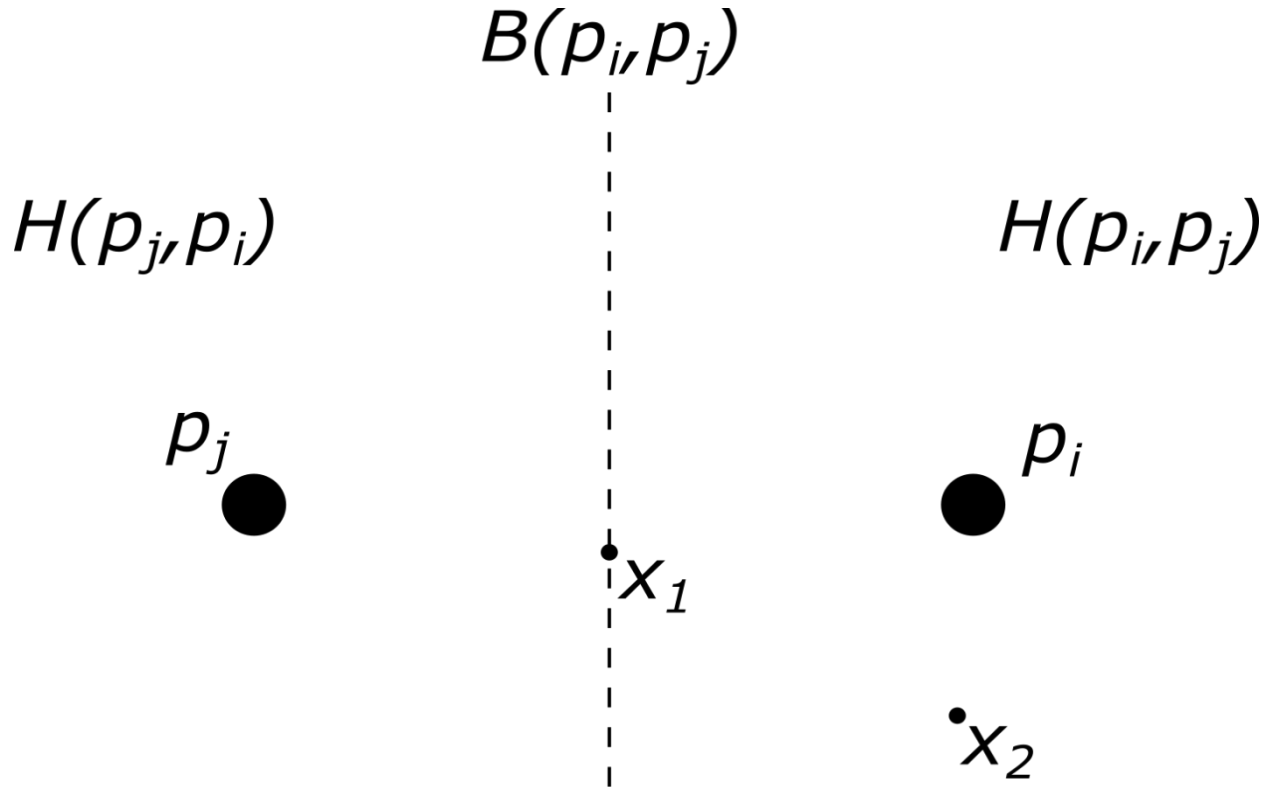
$$H_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x - p_i| < |x - p_j|, i \neq j\}.$$

Jede Voronoi-Zelle kann über die Schnittmenge

$$V_i = \bigcup_{j=1, \dots, N; i \neq j} H_{i,j}$$

repräsentiert werden.

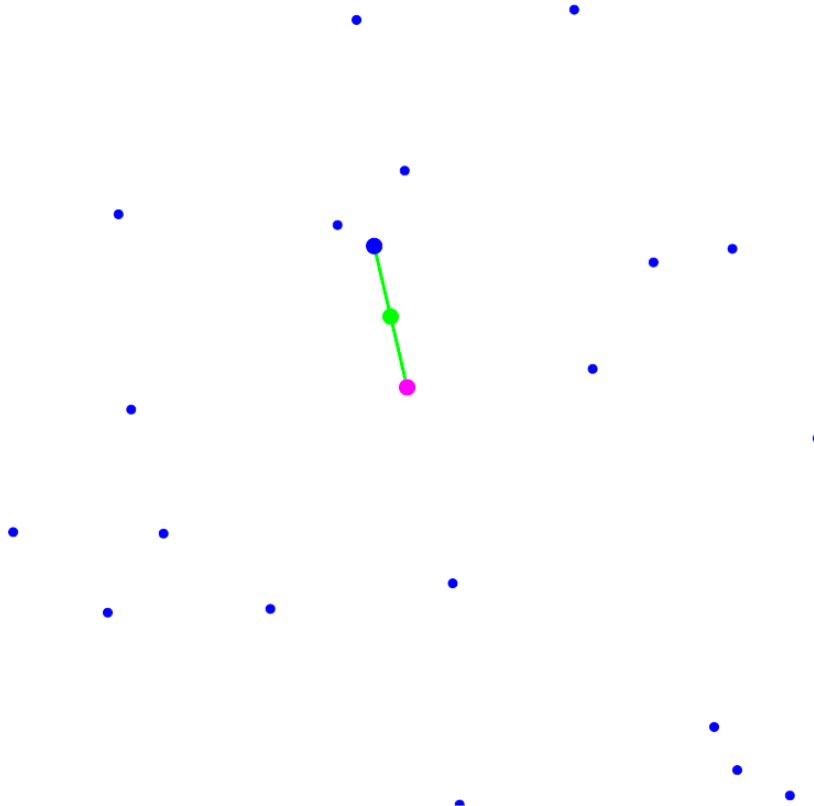
# Voronoi Vermaschung



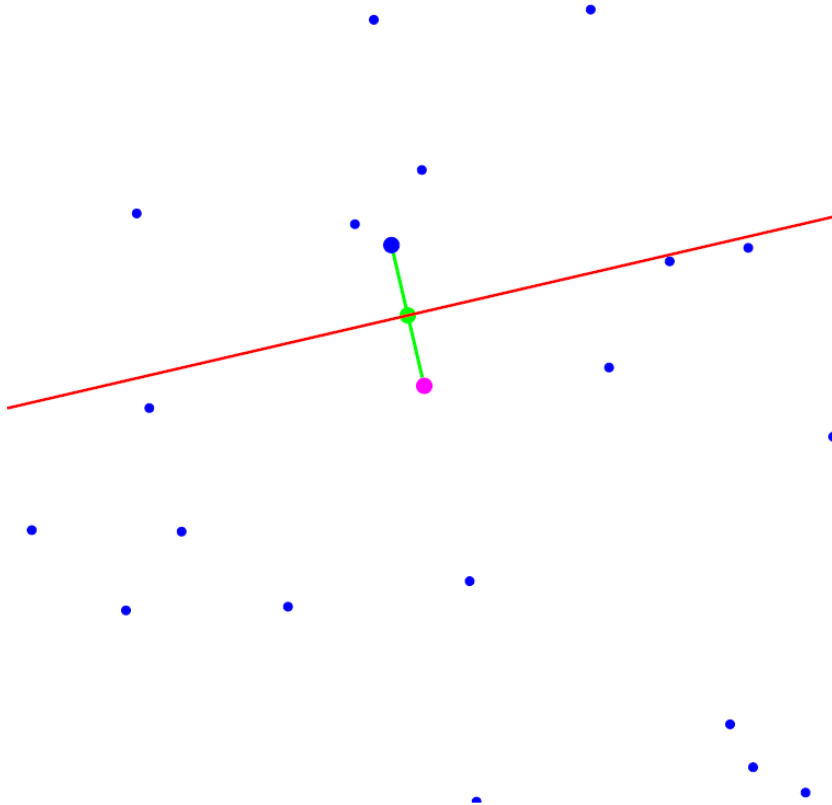
$$|x_1 - p_i| = |x_1 - p_j| \rightarrow x_1 \in B(p_i, p_j)$$

$$|x_2 - p_i| < |x_2 - p_j| \rightarrow x_2 \in H(p_i, p_j)$$

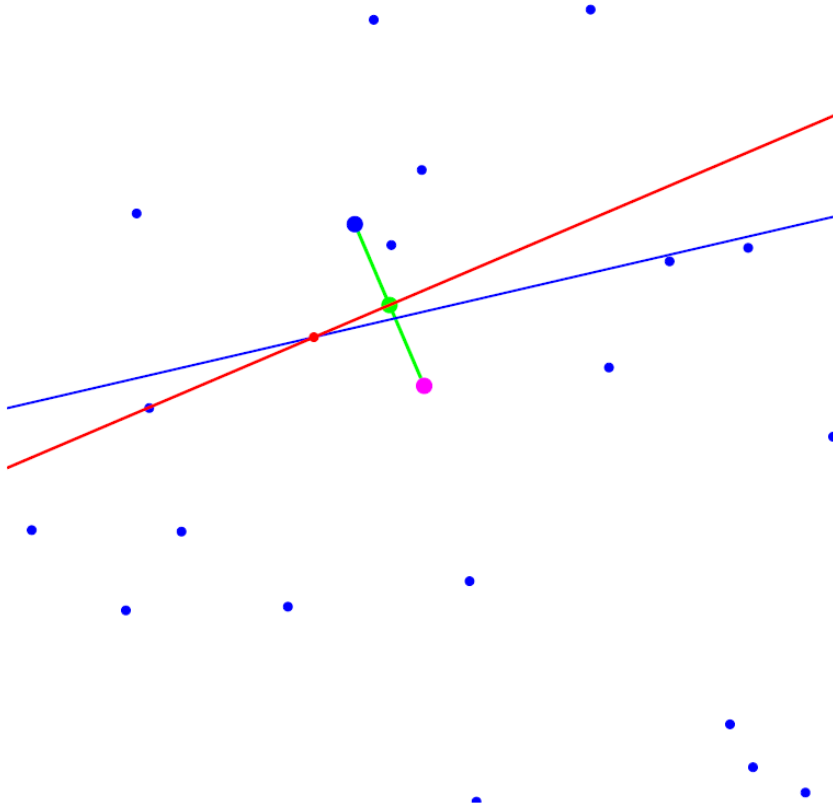
# Beispiel: Voronoi Vermaschung in 2-D



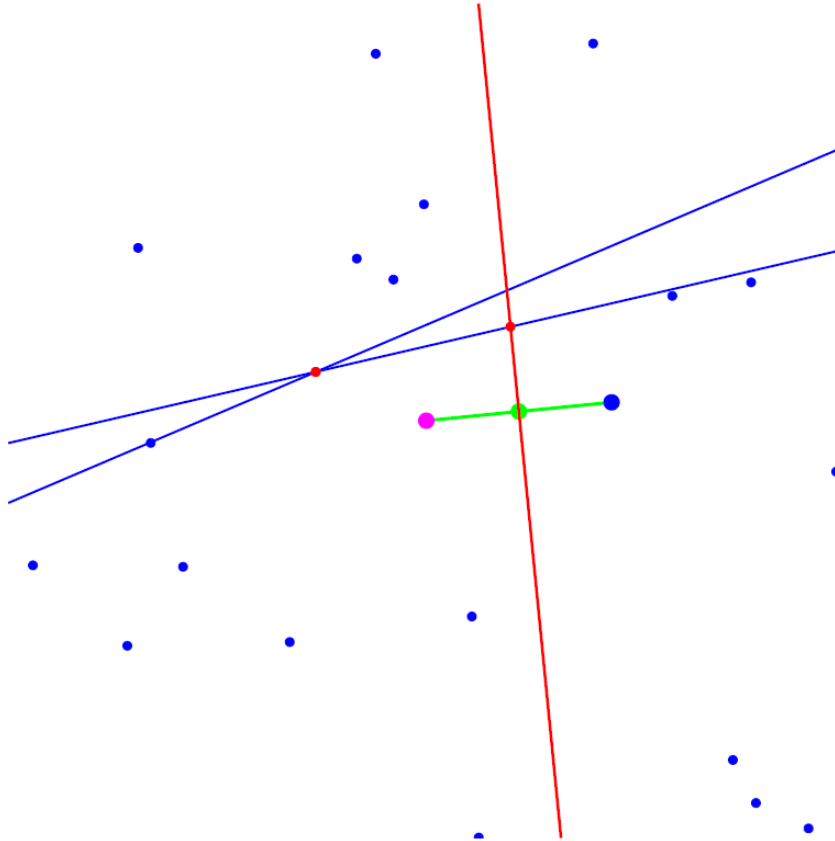
# Beispiel: Voronoi Vermaschung in 2-D



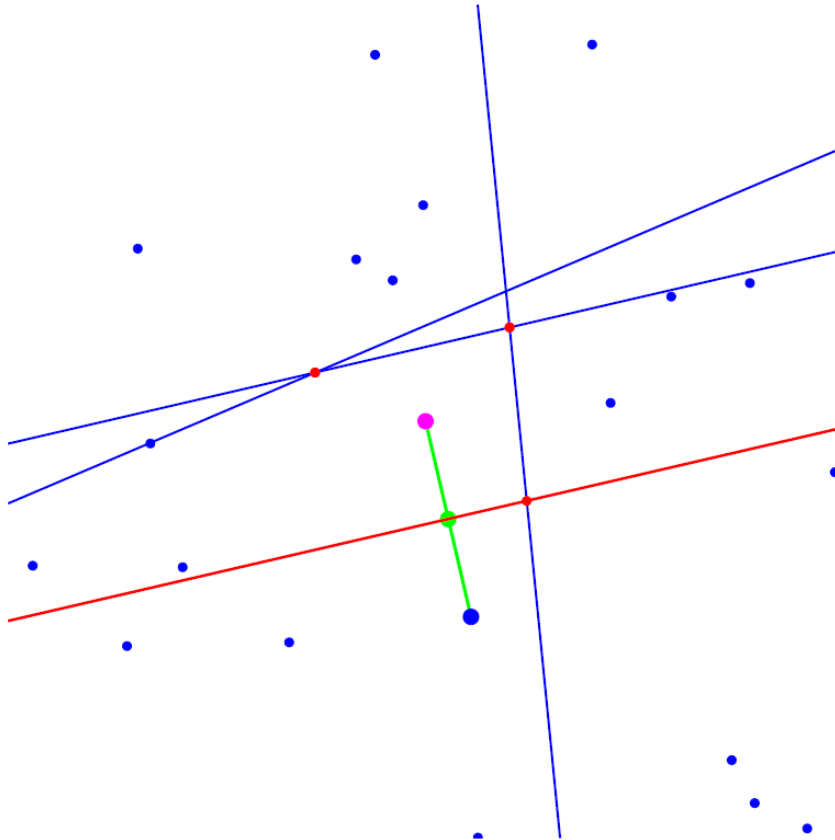
# Beispiel: Voronoi Vermaschung in 2-D



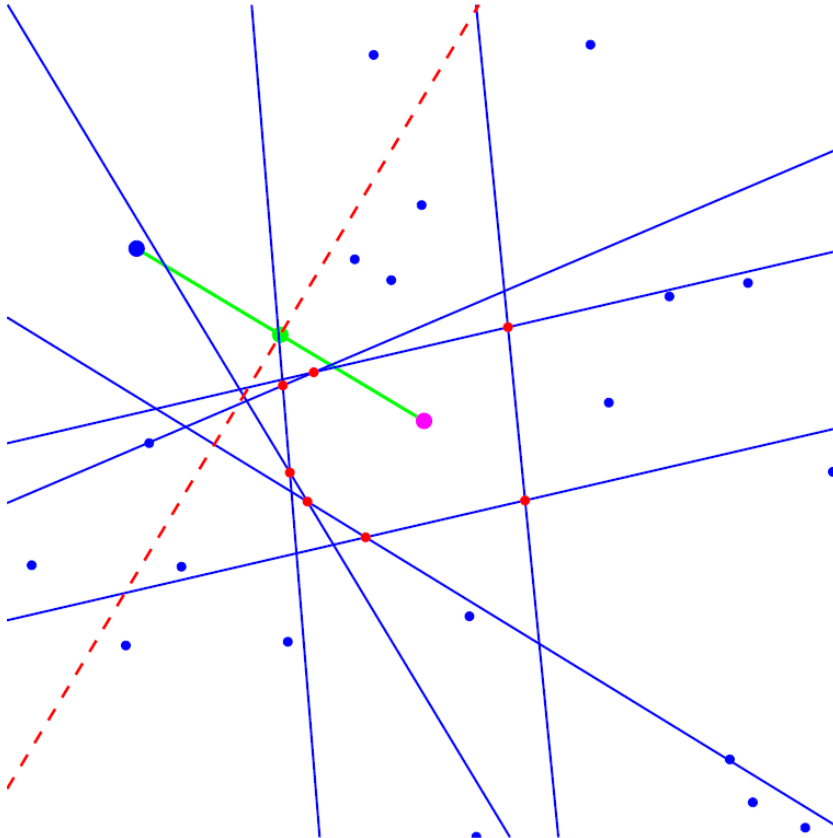
# Beispiel: Voronoi Vermaschung in 2-D



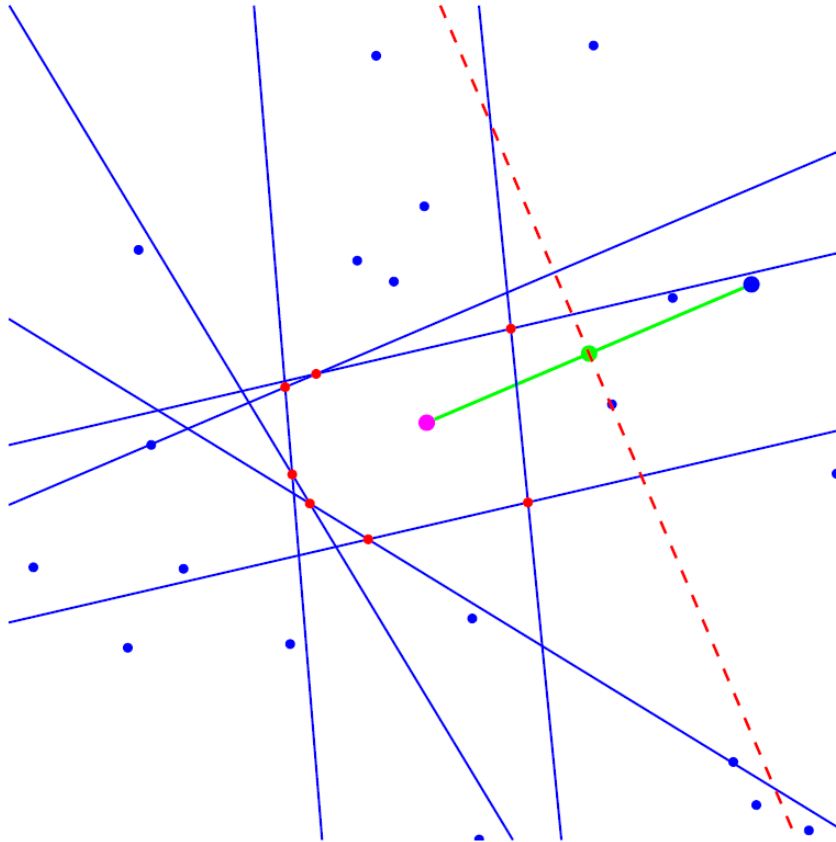
# Beispiel: Voronoi Vermaschung in 2-D



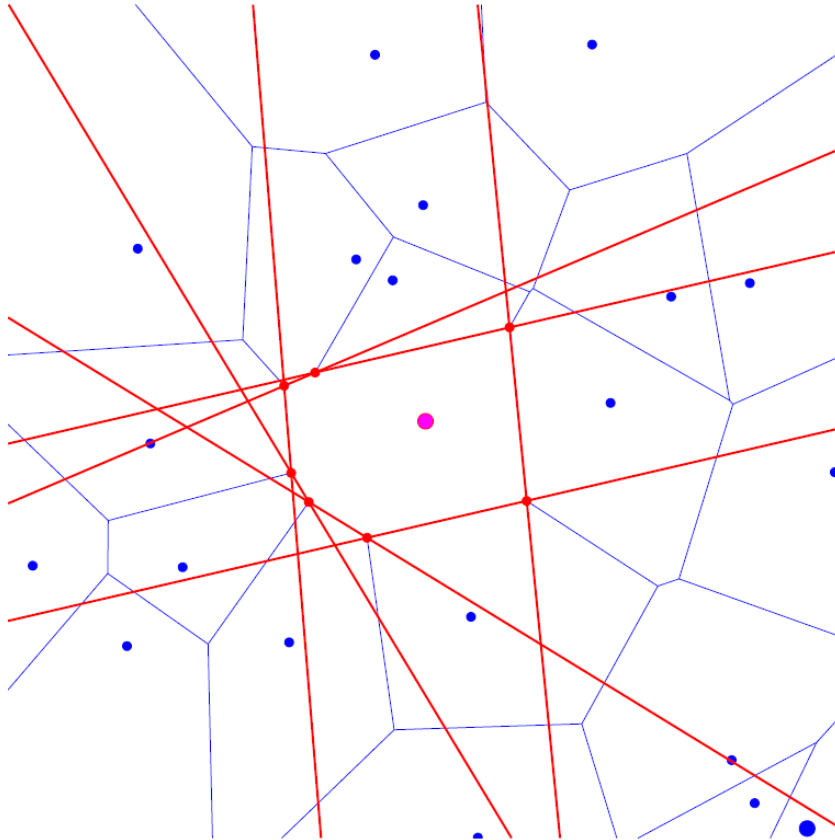
# Beispiel: Voronoi Vermaschung in 2-D



# Beispiel: Voronoi Vermaschung in 2-D



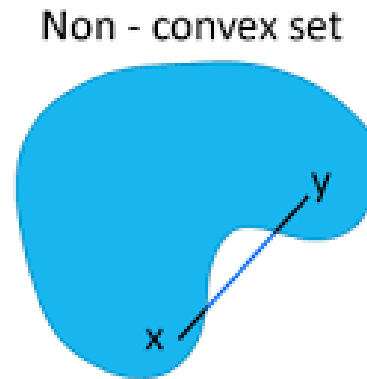
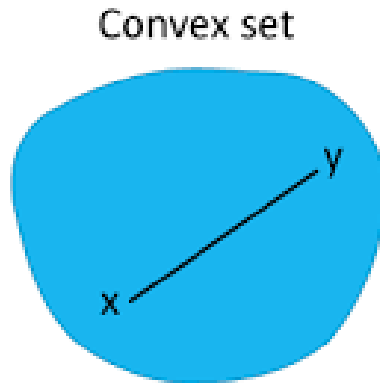
# Beispiel: Voronoi Vermaschung in 2-D



# Voronoi Vermaschung

**Lemma (Eigenschaften).** Sei  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_N\}$  ist die Voronoi-Vermaschung der Punktmenge  $P = \{P_1, \dots, P_N\} \subset \mathbb{R}^{n*}$ .  
Dann gelten folgende Eigenschaften:

- a) Jede Zelle  $V_i$  ist konvex (d.h. wenn  $V_i$  zwei Punkte  $x, y$  enthält, muss auch die komplette Strecken zwischen  $x$  und  $y$  enthalten sein).

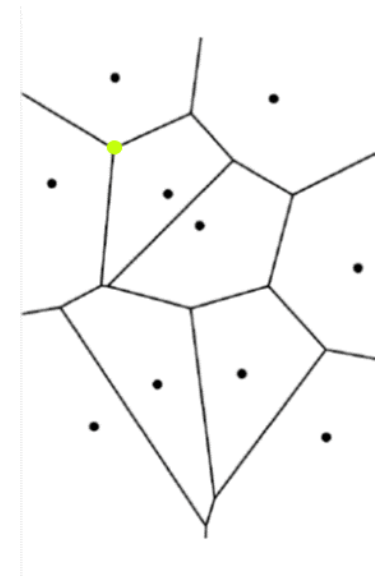


*\*“in general position“:*  
es dürfen keine  $n + 1$  Punkte  
auf einer  $n - 1$ -Kugel liegen

# Voronoi Vermaschung

**Lemma (Eigenschaften).** Sei  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_N\}$  ist die Voronoi-Vermaschung der Punktmenge  $P = \{P_1, \dots, P_N\} \subset \mathbb{R}^n$ .  
 Dann gelten folgende Eigenschaften:

- a) Jede Zelle  $V_i$  ist konvex (d.h. wenn  $V_i$  zwei Punkte  $x, y$  enthält, muss auch die komplette Strecken zwischen  $x$  und  $y$  enthalten sein).
- b) Jeder Vertex einer Voronoi-Vermaschung liegt auf der Grenze von exakt  $n + 1$  verschiedenen Zellen  $V_i \in \mathcal{V}$

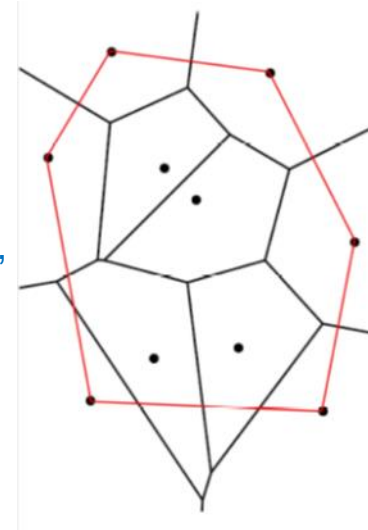


# Voronoi Vermaschung

**Lemma (Eigenschaften).** Sei  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_N\}$  ist die Voronoi-Vermaschung der Punktmenge  $P = \{P_1, \dots, P_N\} \subset \mathbb{R}^n$ .

Dann gelten folgende Eigenschaften:

- Jede Zelle  $V_i$  ist konvex (d.h. wenn  $V_i$  zwei Punkte  $x, y$  enthält, muss auch die komplette Strecken zwischen  $x$  und  $y$  enthalten sein).
- Jeder Vertex einer Voronoi-Vermaschung liegt auf der Grenze von exakt  $n + 1$  verschiedenen Zellen  $V_i \in \mathcal{V}$ .
- Eine Zelle  $V_i$  ist *unbegrenzt* (unendlich ausgedehnt), wenn  $p_i$  auf der konvexen Hülle  $\mathcal{C}(P)$  von  $P$  liegt. Diese ist das kleinste konvexe  $n$ -Polytop, welches  $P$  umfasst.

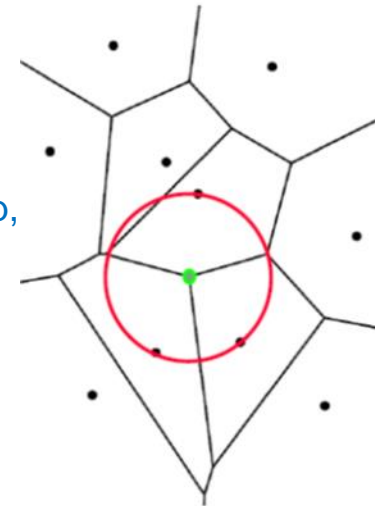


# Voronoi Vermaschung

**Lemma (Eigenschaften).** Sei  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_N\}$  ist die Voronoi-Vermaschung der Punktmenge  $P = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^n$ .

Dann gelten folgende Eigenschaften:

- Jede Zelle  $V_i$  ist konvex (d.h. wenn  $V_i$  zwei Punkte  $x, y$  enthält, muss auch die komplette Strecken zwischen  $x$  und  $y$  enthalten sein).
- Jeder Vertex einer Voronoi-Vermaschung liegt auf der Grenze von exakt  $n + 1$  verschiedenen Zellen  $V_i \in \mathcal{V}$ .
- Eine Zelle  $V_i$  ist *unbegrenzt* (unendlich ausgedehnt), wenn  $p_i$  auf der konvexen Hülle  $\mathcal{C}(P)$  von  $P$  liegt. Diese ist das kleinste konvexe  $n$ -Polytop, welches  $P$  umfasst.
- Sei  $X$  ein Vertex der zu den Zellen  $V_{i_1}, \dots, V_{i_{n+1}}$  gehört. Dann ist  $X$  der Mittelpunkt einer  $n$ -Kugel durch die Punkte  $p_{i_1}, \dots, p_{i_{n+1}}$ . Es liegt kein anderer Punkt von  $P$  innerhalb dieser  $n$ -Kugel.



# Voronoi Zerlegung – Tabellarische Darstellung 2D

Es muss in irgendeiner Form beschrieben werden, wie die Voronoizellen geometrisch definiert sind:

Tabelle 17: nodes

nodes		
nodeID	x	y
1	$x_1$	$y_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
max. Anzahl der Nodes $n$	$x_n$	$y_n$

Tabelle 18: voronoiCells

voronoiCells	
cellID	nodeList
1	nodeID_1, nodeID_2, nodeID_3, ...
$\vdots$	$\vdots$
max. Anzahl der Zellen $m$	nodeID_i, nodeID_j, nodeID_k, ...

Tabelle 19: cellCenters

cellCenters		
cellID	x_center	y_center
1	$x_1$	$y_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
max. Anzahl der zellen $m$	$x_m$	$y_m$

# Interpolation mittels Voronoi Zerlegung: Nearest Neighbor Interpolation

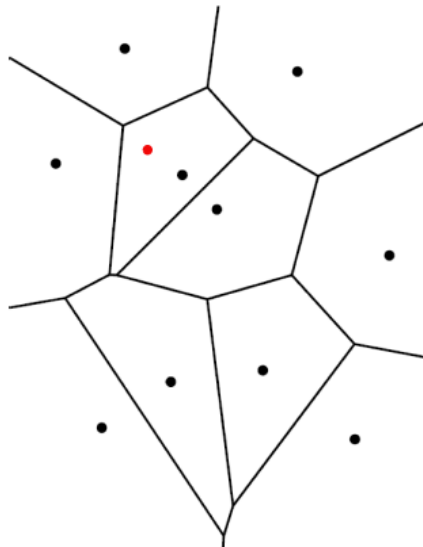
Gegen sein eine Punktmenge  $P = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^n$  und ein Messwert/Datum  $h_i$  wird jedem Punkt  $p_i$  zugewiesen.

**Nearest-Neighbor-Interpolation:** Gegen sein ein beliebiger Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$ , an dem kein Messwert  $h(x)$  bekannt ist.

Dieser kann mittels der zugehörigen Voronoi-Vermaschung  $\mathcal{V}(P)$  vorhergesagt werden:

- $x$  kann nur in einer Voronoi-Zelle liegen  $x \in V_i$
- $h(x) = h_i$

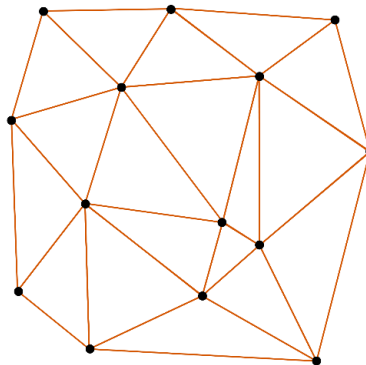
Wie gut wäre eine solche Vorhersage?



# Vermaschungen als Graphen

Ein Graph  $\mathcal{G} = (V, E)$  ist ein Tupel von abstrakten Knoten/Vertices  $V = \{v_1, \dots, v_N\}$  und Kanten  $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ , von denen jede zwei Knoten verbindet. Ein Graph wird als „einfach“ (*simple*) bezeichnet, wenn Folgendes gilt:

1. Zwei Knoten werden durch maximal eine Kante verbunden,
2. Kanten haben keine Orientierung
3. Es existieren keine Schleifen (*loops*, Kanten mit identischem Start- und Endpunkt)

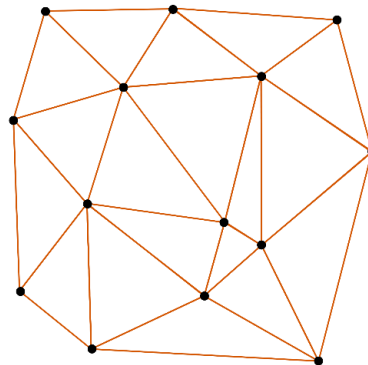


# Vermaschungen als Graphen

Ein Graph  $\mathcal{G} = (V, E)$  ist ein Tupel von abstrakten Knoten/Vertices  $V = \{v_1, \dots, v_N\}$  und Kanten  $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ , von denen jede zwei Knoten verbindet. Ein Graph wird als „einfach“ (*simple*) bezeichnet, wenn Folgendes gilt:

1. Zwei Knoten werden durch maximal eine Kante verbunden,
2. Kanten haben keine Orientierung
3. Es existieren keine Schleifen (*loops*, Kanten mit identischem Start- und Endpunkt)

Knoten entsprechen 0-Zellen, Kanten 1-Zellen und Flächen, begrenzt durch einen Kantenzug, 2-Zellen. Kanten bestimmen die „Nachbarschaft“ von Flächen und Knoten die Nachbarschaft von Kanten.



# Vermaschungen als Graphen

Ein Graph kann mittels seiner **Adjazenz-Matrix**  $A_V \in \mathbb{R}^{N \times N}$ :

$$(A_V)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{für } i \neq j \text{ und } v_i, v_j \text{ sind über eine Kante verbunden} \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}.$$

Eine äquivalente Charakterisierung kann über die Inzidenz-Matrix  $I_{VE} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  erfolgen:

$$(I_{VE})_{i,j} \begin{cases} 1, & \text{falls Vertex } v_i \text{ ist Endpunkt von Kante } e_j \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}.$$

Jede Spalte in  $I_{VE}$  eines einfachen Graphen enthält den Wert 1 genau zwei mal.

# Vermaschungen als Graphen

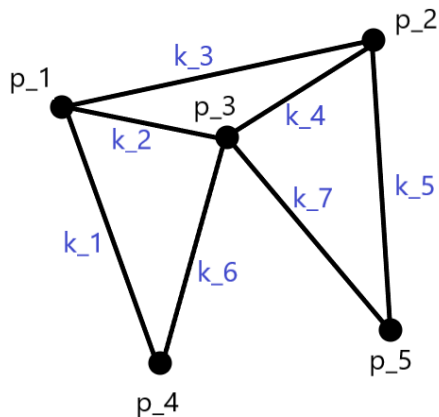
Ein Graph kann mittels seiner **Adjazenz-Matrix**  $A_V \in \mathbb{R}^{N \times N}$ :

$$(A_V)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{für } i \neq j \text{ und } v_i, v_j \text{ sind über eine Kante verbunden} \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Eine äquivalente Charakterisierung kann über die Inzidenz-Matrix  $I_{VE} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  erfolgen:

$$(I_{VE})_{i,j} \begin{cases} 1, & \text{falls Vertex } v_i \text{ ist Endpunkt von Kante } e_j \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Jede Spalte in  $I_{VE}$  eines einfachen Graphen enthält den Wert 1 genau zwei mal.



Adjazenz-Matrix dieses Beispiel-Graphen:

$$A_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Vermaschungen als Graphen

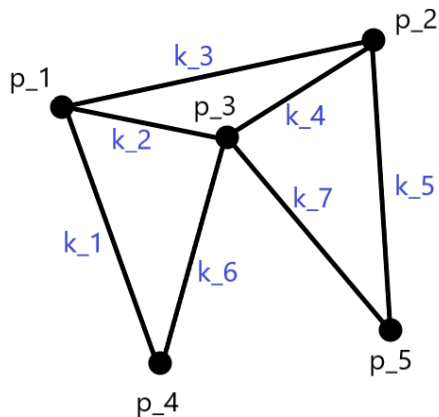
Ein Graph kann mittels seiner **Adjazenz-Matrix**  $A_V \in \mathbb{R}^{N \times N}$ :

$$(A_V)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{für } i \neq j \text{ und } v_i, v_j \text{ sind über eine Kante verbunden} \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Eine äquivalente Charakterisierung kann über die Inzidenz-Matrix  $I_{VE} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  erfolgen:

$$(I_{VE})_{i,j} \begin{cases} 1, & \text{falls Vertex } v_i \text{ ist Endpunkt von Kante } e_j \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Jede Spalte in  $I_{VE}$  eines einfachen Graphen enthält den Wert 1 genau zwei mal.



Inzidenz-Matrix dieses Beispiel-Graphen:

$$I_{VE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Vermaschungen als Graphen

Ein Graph kann mittels seiner **Adjazenz-Matrix**  $A_V \in \mathbb{R}^{N \times N}$ :

$$(A_V)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{für } i \neq j \text{ und } v_i, v_j \text{ sind über eine Kante verbunden} \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Eine äquivalente Charakterisierung kann über die Inzidenz-Matrix  $I_{VE} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  erfolgen:

$$(I_{VE})_{i,j} \begin{cases} 1, & \text{falls Vertex } v_i \text{ ist Endpunkt von Kante } e_j \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Jede Spalte in  $I_{VE}$  eines einfachen Graphen enthält den Wert 1 genau zwei mal.

Es gilt:

$$(A_V)_{i,j} = \begin{cases} (I_{VE} I_{VE}^T)_{i,j} & \text{für } i \neq j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

# Topologie einer Voronoi Vermaschung

Neben Kanten und Vertices, beinhaltet einen 2-D Voronoi-Vermaschung auch die Flächen  $F_1, \dots, F_K$ . Die zugehörigen Inzidenz-Matrizen können wie folgt repräsentiert werden:

$$(I_{VE})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \text{ ist Endpunkt von } e_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(I_{EF})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } e_i \text{ ist Grenzkante von } F_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(I_{VF})_{i,j} = (I_{VE}I_{EF})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \text{ ist Grenzknoten von } F_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

# Topologie einer Voronoi Vermaschung

Neben Kanten und Vertices, beinhaltet eine 2-D Voronoi-Vermaschung auch die Flächen  $F_1, \dots, F_K$ . Die zugehörigen Inzidenz-Matrizen können wie folgt repräsentiert werden:

$$(I_{VE})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \text{ ist Endpunkt von } e_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(I_{EF})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } e_i \text{ ist Grenzkante von } F_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(I_{VF})_{i,j} = (I_{VE}I_{EF})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \text{ ist Grenzknoten von } F_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Matrizen beschreiben die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Vertices, Kanten und Flächen. So lässt sich die Nachbarschaft zweier Voronoi-Zellen (Flächen) über folgende Matrix beschreiben:

$$(A_F)_{i,j} = \begin{cases} (I_{EF}^T I_{EF})_{i,j}, & \text{falls } i \neq j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

# Der Duale Graph

Der **duale Graph**  $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*)$  zum Graph  $\mathcal{G}$  ordnet die Vertices  $V^*$  den Flächen  $F$  aus  $\mathcal{G}$  zu. Die Kantenmenge  $E^*$  beinhaltet Kanten zwischen zwei Vertices aus  $V^*$  wenn die zugehörigen Flächen aus  $\mathcal{G}$  zueinander adjazent sind. Aus diesem Grund sind die Adjazent-Matrizen  $A_{V^*}$  und  $A_F$  identisch.

# Der Duale Graph

Der **duale Graph**  $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*)$  zum Graph  $\mathcal{G}$  ordnet die Vertices  $V^*$  den Flächen  $F$  aus  $\mathcal{G}$  zu. Die Kantenmenge  $E^*$  beinhaltet Kanten zwischen zwei Vertices aus  $V^*$  wenn die zugehörigen Flächen aus  $\mathcal{G}$  zueinander adjazent sind. Aus diesem Grund sind die Adjazent-Matrizen  $A_{V^*}$  und  $A_F$  identisch.

Allgemeiner: Die duale Vermaschung einer  $n$ -dimensionalen Vermaschung ist dadurch definiert, dass ihre  $i$ -Zellen den  $(n - i)$ -Zellen aus der ursprünglichen Vermaschung zugeordnet werden.

Zum Beispiel wird im 2D jedem ursprünglichen Knoten (Dim. 0) eine duale Fläche (Dim. 2) zugeordnet:  $\forall v_i \in V \rightarrow \exists f_i^* \in F^*$

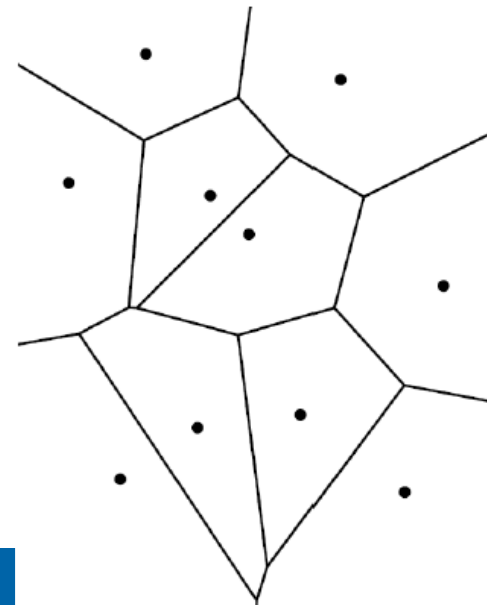
# Der Duale Graph

Der **duale Graph**  $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*)$  zum Graph  $\mathcal{G}$  ordnet die Vertices  $V^*$  den Flächen  $F$  aus  $\mathcal{G}$  zu. Die Kantenmenge  $E^*$  beinhaltet Kanten zwischen zwei Vertices aus  $V^*$  wenn die zugehörigen Flächen aus  $\mathcal{G}$  zueinander adjazent sind. Aus diesem Grund sind die Adjazenz-Matrizen  $A_{V^*}$  und  $A_F$  identisch.

Allgemeiner: Die duale Vermaschung einer  $n$ -dimensionalen Vermaschung ist dadurch definiert, dass ihre  $i$ -Zellen den  $(n - i)$ -Zellen aus der ursprünglichen Vermaschung zugeordnet werden.

Zum Beispiel wird im 2D jedem ursprünglichen Knoten (Dim. 0) eine duale Fläche (Dim. 2) zugeordnet:  $\forall v_i \in V \rightarrow \exists f_i^* \in F^*$

Eine solche duale Betrachtung einer Voronoi-Vermaschung führt zur **Delaunay Triangulierung**.



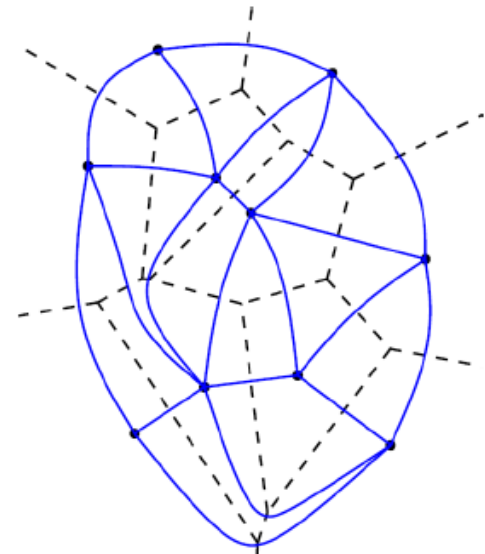
# Der Duale Graph

Der **duale Graph**  $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*)$  zum Graph  $\mathcal{G}$  ordnet die Vertices  $V^*$  den Flächen  $F$  aus  $\mathcal{G}$  zu. Die Kantenmenge  $E^*$  beinhaltet Kanten zwischen zwei Vertices aus  $V^*$  wenn die zugehörigen Flächen aus  $\mathcal{G}$  zueinander adjazent sind. Aus diesem Grund sind die Adjazenz-Matrizen  $A_{V^*}$  und  $A_F$  identisch.

Allgemeiner: Die duale Vermaschung einer  $n$ -dimensionalen Vermaschung ist dadurch definiert, dass ihre  $i$ -Zellen den  $(n - i)$ -Zellen aus der ursprünglichen Vermaschung zugeordnet werden.

Zum Beispiel wird im 2D jedem ursprünglichen Knoten (Dim. 0) eine duale Fläche (Dim. 2) zugeordnet:  $\forall v_i \in V \rightarrow \exists f_i^* \in F^*$

Eine solche duale Betrachtung einer Voronoi-Vermaschung führt zur **Delaunay Triangulierung**.



# Der Duale Graph

Der **duale Graph**  $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*)$  zum Graph  $\mathcal{G}$  ordnet die Vertices  $V^*$  den Flächen  $F$  aus  $\mathcal{G}$  zu. Die Kantenmenge  $E^*$  beinhaltet Kanten zwischen zwei Vertices aus  $V^*$  wenn die zugehörigen Flächen aus  $\mathcal{G}$  zueinander adjazent sind. Aus diesem Grund sind die Adjazenz-Matrizen  $A_{V^*}$  und  $A_F$  identisch.

Allgemeiner: Die duale Vermaschung einer  $n$ -dimensionalen Vermaschung ist dadurch definiert, dass ihre  $i$ -Zellen den  $(n - i)$ -Zellen aus der ursprünglichen Vermaschung zugeordnet werden.

Zum Beispiel wird im 2D jedem ursprünglichen Knoten (Dim. 0) eine duale Fläche (Dim. 2) zugeordnet:  $\forall v_i \in V \rightarrow \exists f_i^* \in F^*$

Eine solche duale Betrachtung einer Voronoi-Vermaschung führt zur **Delaunay Triangulierung**.

