1 Aufgabe 1.3 (Festigkeitslehre)

1.1 Aufgabenstellung

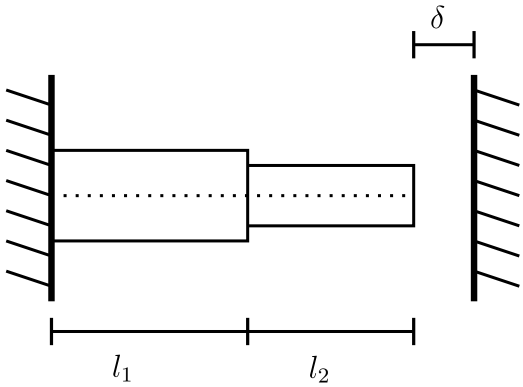

Abbildung 1: Aufgabe 1.3

1. Gegeben: $(EA)_1$, $(EA)_2$, l_1, l_2, δ, α_T, ΔT
2. Gesucht:
   a) Druckkraft F bei Erwärmung um ΔT
   b) Betragsmäßig größte Spannung $|\sigma_{\max}|$

1.2 Lösungsvorschlag

Für die Lösung der Aufgabe wird folgendes Vorgehen vorgeschlagen:

1. Freischnitt und Gleichgewicht
2. Werkstoffgesetze
3. Kinematik
4. Lösen zur Bestimmung von F
5. Betragsmäßig größte Spannung

1.2.1 Freischnitt und Gleichgewicht

Eine Druckkraft tritt erst dann auf, wenn die beiden Stäbe um ΔT erwärmt werden und ihre Gesamtverformung die Länge δ überschreitet. In Abbildung 2 wird dies anhand zweier einfacher Beispiele dargestellt. Der Stab aus System A ist nur einseitig eingespannt und ansonsten frei verformbar, der Stab aus System B hat ebenfalls nur eine feste Einspannung, die Verformung wird allerdings auf der rechten Seite durch eine Wand begrenzt. Beide Stäbe sind aus dem gleichen Material gefertigt worden und weisen die selbe Geometrie auf.

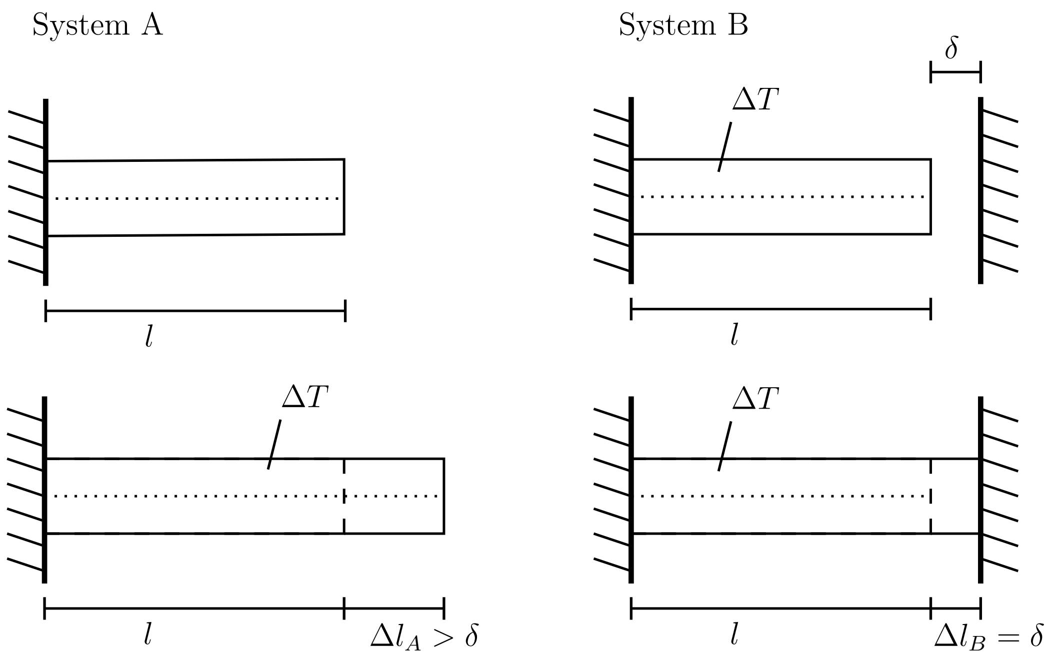

Abbildung 2: Veranschaulichung der Verformungsbehinderung

Werden die beiden Stäbe aus Abbildung 2 um ΔT erwärmt, so verlängert sich Stab A um $\Delta l_A > \delta$. Auch Stab B würde sich um $\Delta l_B = \Delta l_A > \delta$ verformen, da beide Stäbe den gleichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten α_T (=Werkstoffkennwert!) besitzen. Die Verformung von Stab B wird jedoch durch die feste Wand begrenzt bzw. behindert. Da sich Stab B durch die Erwärmung um ΔT auf $\Delta l_B = \Delta l_A$ verlängern würde, übt Stab B eine Druckwirkung auf die Wand aus, die mit steigender Temperaturdifferenz zunimmt. Die dabei entstehende Druckkraft F ist die in der eigentlichen Aufgabenstellung gesuchte Größe.

Um die Druckkraft F der Wand auf das Stabsystem bzw. des Stabsystems auf die Wand aus Aufgabe 1.3 berechnen zu können, wird analog zu vorherigen Kapiteln ein Freischnitt erstellt, Abbildung 3. Um die inneren Beanspruchungen infolge der äußeren Belastung berechnen zu können, werden zwei Schnitte gesetzt und die Struktur in drei Teilbereiche unterteilt.

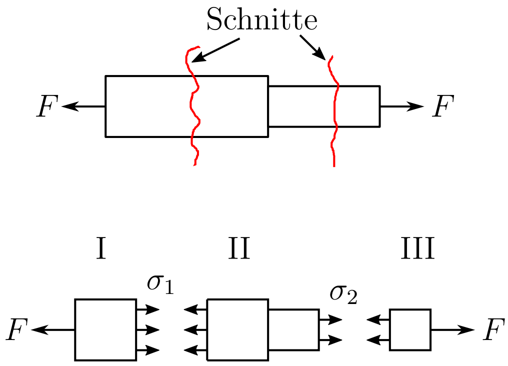

Abbildung 3: Freischnitt für Gleichgewicht

Für die Teilbereiche I und III werden anschließend die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt.

$$\text{Bereich I:} \quad \rightarrow: \sigma_1 \cdot A_1 - F = 0 \quad \Rightarrow \sigma_1 = \frac{F}{A_1} \tag{1}$$

$$\text{Bereich III:} \quad \rightarrow: F - \sigma_2 \cdot A_2 = 0 \quad \Rightarrow \sigma_2 = \frac{F}{A_2} \tag{2}$$

Wichtig: Normalspannungen σ haben als Einheit MPa= $\frac{N}{mm^2}$. Um in einem Kräftegleichgewicht berücksichtigt werden zu können, müssen Spannungen stets mit der Fläche multipliziert werden, auf die sie wirken. **Ein Spannungsgleichgewicht existiert nicht und darf nicht aufgestellt werden!**

Hinweis: Da nur zwei Unbekannte σ_1 und σ_2 in den Freischnitten entstehen, müssen auch nur 2 Gleichungen aufgestellt werden. Alternativ hätten auch die Gleichgewichtsbedingungen für die Bereiche I + II oder II + III aufgestellt werden können.

1.2.2 Werkstoffgesetze

Die Gesamtdehnungen ε setzen sich aus einem elastizitätstheoretischen ε_{el} und einem thermischen ε_{th} Anteil zusammen. Aufgrund der unterschiedlichen Bauteilgeometrie ($A_1 \neq A_2$) und den nach Aufgabenstellung unterschiedlichen E-Moduln E_1, E_2 der beiden Stäbe müssen zwei getrennte Gleichungen für die Stäbe 1 und 2 aufgestellt werden.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{el,1} + \varepsilon_{th,1} = \frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_T \cdot \Delta T \tag{3}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{el,2} + \varepsilon_{th,2} = \frac{\sigma_2}{E_2} + \alpha_T \cdot \Delta T \tag{4}$$

1.2.3 Kinematik

Die kinematische Beziehung ergibt sich aus der Begrenzung durch die beiden Wände links und rechts. Dadurch muss die Gesamtlängenänderung des Bauteils

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta \tag{5}$$

betragen. Der Zusammenhang zwischen den Dehnungen der Stäbe und deren Längenänderung ergibt sich durch

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} \tag{6}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{\delta - \Delta l_1}{l_2} \tag{7}$$

1.2.4 Lösen zur Bestimmung von F

Um das Gleichungssystem nach F aufzulösen werden zunächst die Gleichungen (3) und (6) gleichgesetzt

$$\varepsilon_1 = \frac{F}{(EA)_1} + \alpha_T \cdot \Delta T = \frac{\Delta l_1}{l_1} \tag{8}$$

und die dadurch enthaltene neue Gleichung nach Δl_1 umgestellt, indem beide Seiten der Gleichung mit l_1 multipliziert werden.

$$\Delta l_1 = \frac{F \cdot l_1}{(EA)_1} + l_1 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \tag{9}$$

Genauso wird mit den Gleichungen (4) und (7) verfahren

$$\Delta l_2 = \delta - \Delta l_1 = \frac{F \cdot l_2}{(EA)_2} + l_2 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \tag{10}$$

In die so enstandene Gleichung wird für Δl_1 die Gleichung (9) eingesetzt. Dadurch werden die Unbekannten Δl_1 und Δl_2 aus der betrachteten Gleichung eliminiert.

$$\delta - \Delta l_1 = \delta - \left(\frac{F \cdot l_1}{(EA)_1} + l_1 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \right) = \frac{F \cdot l_2}{(EA)_2} + l_2 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \tag{11}$$

Die neue Gleichung besteht nun nur noch aus den vorgegebenen Größen der Aufgabenstellung und der unbekannten Druckkraft F.

$$\delta = \frac{F \cdot l_2}{(EA)_2} + l_2 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T + \frac{F \cdot l_1}{(EA)_1} + l_1 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \tag{12}$$

Die Gleichung muss nun nur noch durch geschicktes Multiplizieren und Dividieren nach F umgestellt werden.

$$\delta = F \cdot \left(\frac{l_1}{(EA)_1} + \frac{l_2}{(EA)_2} \right) + (l_1 + l_2) \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \tag{13}$$

$$\delta - (l_1 + l_2) \cdot \alpha_T \cdot \Delta T = F \cdot \left(\frac{l_1}{(EA)_1} + \frac{l_2}{(EA)_2} \right) \tag{14}$$

Die gesuchte Druckkraft beträgt

$$F = \frac{\delta - (l_1 + l_2) \cdot \alpha_T \cdot \Delta T}{\frac{l_1}{(EA)_1} + \frac{l_2}{(EA)_2}} \tag{15}$$

1.2.5 Betragsmäßig größte Spannung

Die Druckkraft F ist in beiden Stabteilen (dick und dünn) gleichgroß. Die größte Spannung entsteht somit an der Stelle mit dem geringsten Querschnitt. Da $A_1 > A_2$ gilt, entsteht die größtmögliche Spannung in Stab 2. Hier gilt

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} = \frac{\delta - (l_1 + l_2) \cdot \alpha_T \cdot \Delta T}{\frac{l_1}{E_1} \cdot \frac{A_2}{A_1} + \frac{l_2}{E_2}} \tag{16}$$