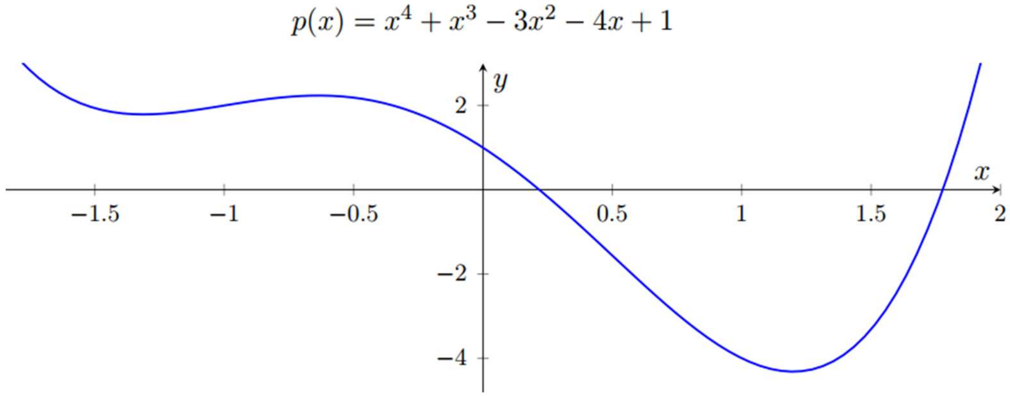
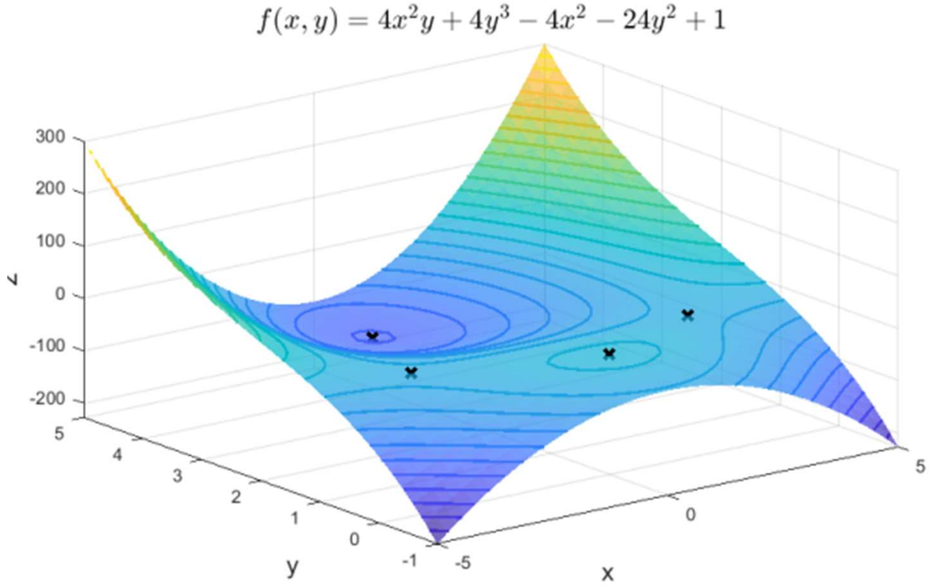
2 Lineare Optimierung

Optimierung (vgl. Grundstudium)**:**
finden von Minima/Maxima
einer skalaren Funktion $f(x)$ von $\mathbb{R}$
nach $\mathbb{R}$



bzw. von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}})$$



<u>Jetzt neu:</u> suchen Minima/Maxima in
Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$
→ **Beschränkte Optimierung (Optimierung unter Nebenbedingungen)**

Z.B. $f(x, y) \rightarrow \ min$
so, dass $h(x, y) = x^2 + (y-1)^2 - 2 \leq 0$

Hier „Vereinfachung“: $f(x)$ und NB linear in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$
→ <u>lineare</u> Optimierung

2.1 Modellierung und grafische Lösungsmethode

2.1.1 Produktionsmodell

- n Teilbetriebe bzw. Produktionsstätten $P_1, \dots, P_n$, in denen m Erzeugnisse $G_1, \dots, G_m$ hergestellt werden
- **Produktionskoeffizienten** $a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ (geben an, wie viel ME vom Produkt G_i im Teilbetrieb P_j produziert werden, wenn diese Produktion mit der Intensität 1 erfolgt)
- Produktionsplanung: vom Produkt G_i sollen mindestens b_i ME produziert werden
- x_j bezeichne die (unbekannte) tatsächliche Intensität, mit der im Teilbetrieb P_j produziert wird (**Entscheidungsvariable**)

$$\underbrace{a_{i1}x_1}_{\substack{\text{Stück-}\\ \text{zahl } P_1}} + \underbrace{a_{i2}x_2}_{\substack{\text{Stück-}\\ \text{zahl } P_2}} + \cdots + \underbrace{a_{in}x_n}_{\substack{\text{Stück-}\\ \text{zahl } P_n}} \geq \underbrace{b_i}_{\substack{\text{Mindest-}\\ \text{stückzahl}}} \quad , \ i = 1, \dots, m. \tag{1}$$

bzw. $$Ax \geq b, \tag{1'}$$

wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (sog. **Strukturmatrix**), sowie $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, n \tag{2}$$

bzw. $$x \geq 0 \tag{2'}$$

- **Kostenkoeffizienten** c_j (Proportionalitätsfaktor der variablen Kosten im Teilbetrieb P_j)
- **Zielfunktion**: Gesamtkosten der Produktion über alle Teilbetriebe sollten minimal sein, d. h.

$$z = f(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{c_1x_1}_{\text{Kosten } P_1} + \underbrace{c_2x_2}_{\text{Kosten } P_2} + \cdots + \underbrace{c_nx_n}_{\text{Kosten } P_n} \to \min_{x_1,\dots,x_n} \tag{3}$$

bzw. $$\Rightarrow z = f(x) = c^T x \to \min_x, \quad \text{wobei } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \tag{3'}$$

Produktionsmodell: (1)-(3) bzw. (1')-(3')

$$z = f(x) = c^T x \to \min_x,$$
$$Ax \geq b,$$
$$x \geq 0$$

d. h. **Optimierungsaufgabe** in Form der Minimierung einer Funktion von n Variablen unter den **Restriktionen** (Nebenbedingungen)

Beispiel 2.1: (*Produktionsmodell*)
$m = 2$ Produkte, $n = 3$ Teilbetriebe
Produktionskoeffizienten:

a_{ij}	P_1	P_2	P_3
G_1	2	6	10
G_2	10	6	5

Mindestproduktionsmengen: $b_1 = 45, b_2 = 30$
Kostenkoeffizienten: $c_1 = c_2 = 60, c_3 = 85$

Matrix-Vektor-Darstellung (1')-(3'):

$$Ax \geq b,\ x \geq 0,\ z = f(x) = c^T x \to \min_x,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 45 \\ 30 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 85 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ausführlich:

$$2x_1 + 6x_2 + 10x_3 \geq 45 \qquad (1a)$$
$$10x_1 + 6x_2 + 5x_3 \geq 30 \qquad (1b)$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad (2)$$
$$z = f(x_1, x_2, x_3) = 60x_1 + 60x_2 + 85x_3 \to \min_{x_1, x_2, x_3} \quad (3)$$

Denken wir uns die Ungleichungen (1a) und (1b) als <u>Gleichungen</u> erfüllt, es werden also genau die Mindestmengen produziert.

$$2x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 45$$
$$10x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 30$$
$$\Rightarrow -8x_1 + 5x_3 = 15.$$

Eine Lösung (unter Beachtung von (2)): $x_1^* = 0, x_3^* = 3 \;\Rightarrow\; x_2^* = 2{,}5$

also

$$\Rightarrow \underline{x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}} \text{ (\textit{das ist tatsächlich die kostengünstigste Lsg.})}$$

$$\Rightarrow z_{\min} = 0 \cdot 60 + 2{,}5 \cdot 60 + 3 \cdot 85 = \underline{405}.$$

2.1.2 *Verbrauchsmodell*

- n Teilbetriebe bzw. Produktionsstätten $P_1, \dots, P_n$, in denen m Ressorcen (z. B. Materialien) $M_1, \dots, M_m$ verbraucht werden.
- **Verbrauchskoeffizienten** $a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ (sie geben an, wie viel ME von Ressource M_i im Teilbetrieb P_j verbraucht werden, wenn dieser Verbrauch mit der Intensität 1 erfolgt)
- Materialplanung: von Ressource M_i können <u>höchstens</u> b_i ME verbraucht werden
- x_j bezeichne die (unbekannte) tatsächliche Intensität, mit der im Teilbetrieb P_j produziert wird (**Entscheidungsvariable**)

$$\underbrace{a_{i1}x_1}_{\substack{\text{Stück-}\\ \text{zahl } P_1}} + \underbrace{a_{i2}x_2}_{\substack{\text{Stück-}\\ \text{zahl } P_2}} + \cdots + \underbrace{a_{in}x_n}_{\substack{\text{Stück-}\\ \text{zahl } P_n}} \leq \underbrace{b_i}_{\substack{\text{Höchst-}\\ \text{stückzahl}}} \quad , \; i = 1, \dots, m. \tag{4}$$

bzw. $Ax \leq b$. (4')

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \dots, n \tag{5}$$

bzw. $x \geq 0$ (5')

- **Gewinnkoeffizienten** c_j (Proportionalitätsfaktor der variablen <u>Gewinne</u> im Teilbetrieb P_j)
- **Zielfunktion**: Gesamtgewinn der Produktion über alle Teilbetriebe soll maximal sein, d. h.

$$z = f(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{c_1x_1}_{\text{Gewinn } P_1} + \underbrace{c_2x_2}_{\text{Gewinn } P_2} + \cdots + \underbrace{c_nx_n}_{\text{Gewinn } P_n} \to \max_{x_1,\dots,x_n} \tag{6}$$

bzw.

$$z = f(x) = c^T x \to \max_x \tag{6'}$$

Verbrauchsmodell: (4)-(6) bzw. (4')-(6').

$$z = f(x) = c^T x \to \max_x$$

$$Ax \leq b,$$
$$x \geq 0$$

d. h. Optimierungsaufgabe in Form der Maximierung einer Funktion von n Variablen unter den Restriktionen.

Beispiel 2.2: (*Verbrauchsmodell*)

$m = 3$ Materialien, $n = 2$ Teilbetriebe

Verbrauchskoeffizienten:

a_{ij}	P_1	P_2
M_1	5	12
M_2	20	10
M_3	20	20

Höchstverbrauchsmengen:

$$b_1 = 30, b_2 = 50, b_3 = 60$$

Gewinnkoeffizienten: $c_1 = 2, c_2 = 3$

Matrix-Vektor-Darstellung (4')-(6'):

$Ax \leq b,\ x \geq 0,\ z = f(x) = c^T x \to \max_x$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 20 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ausführlich:

$$5x_1 + 12x_2 \leq 30 \qquad (4a)$$
$$20x_1 + 10x_2 \leq 50 \qquad (4b)$$
$$20x_1 + 20x_2 \leq 60 \qquad (4c)$$
$$x_1 \geq 0 \qquad (5a)$$
$$x_2 \geq 0 \qquad (5b)$$
$$z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{x_1, x_2} \qquad (6)$$

Ausführlich:

$$5x_1 + 12x_2 \leq 30 \qquad (4a)$$

$$20x_1 + 10x_2 \leq 50 \qquad (4b)$$

$$20x_1 + 20x_2 \leq 60 \qquad (4c)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (5a)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (5b)$$

$$z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{x_1, x_2} \qquad (6)$$

Lösung der Teilsysteme als Gleichungen:

(4a), (4b) $\quad x = \binom{x_1}{x_2} \approx \binom{1{,}58}{1{,}84},\ f(x_1, x_2) \approx 8{,}68$, aber (4c) verletzt (unzulässige Lösung)

(4b), (4c) $\quad x = \binom{x_1}{x_2} = \binom{2}{1},\quad f(x_1, x_2) = 7$

(4c), (4a) $\quad x = \binom{x_1}{x_2} \approx \binom{0{,}86}{2{,}14},\ f(x_1, x_2) \approx 8{,}14$ *Gesamtlösung!*

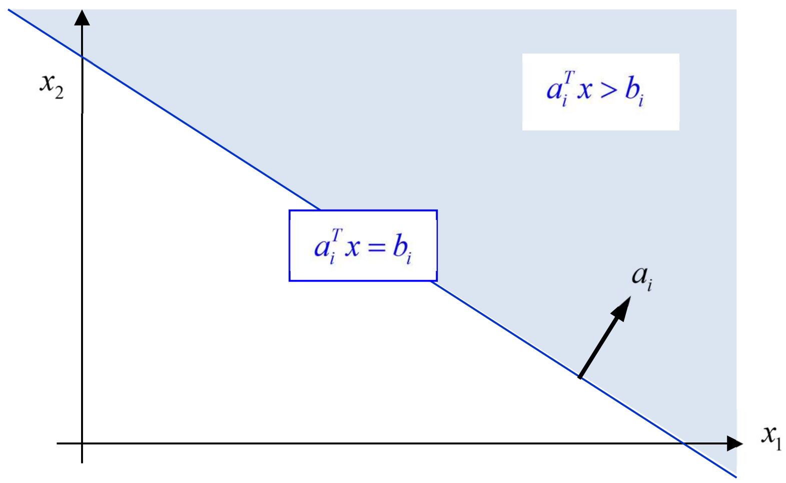
2.1.3 Grafische Lösungsmethode bei 2 Entscheidungsvariablen

Es gibt nur zwei Entscheidungsvariable x_1, x_2, also $n = 2$.

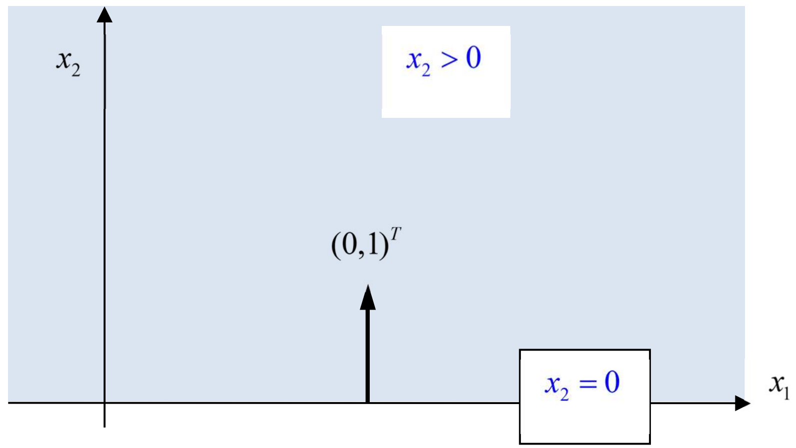
Jede Ungleichung (1) im Produktionsmodell oder (4) im Verbrauchsmodell beschreibt eine Halbebene. Sie wird begrenzt von der Geraden, deren Skalarform aus (1) entsteht, indem man das Ungleichheits- durch ein Gleichheitszeichen ersetzt:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

Dabei stellt $a_i^T = (a_{i1}, a_{i2})$ den Normalenvektor der Begrenzungsgeraden dar. Die Skalarform der Geraden lautet in Vektorschreibweise $a_i^T x = b_i$.



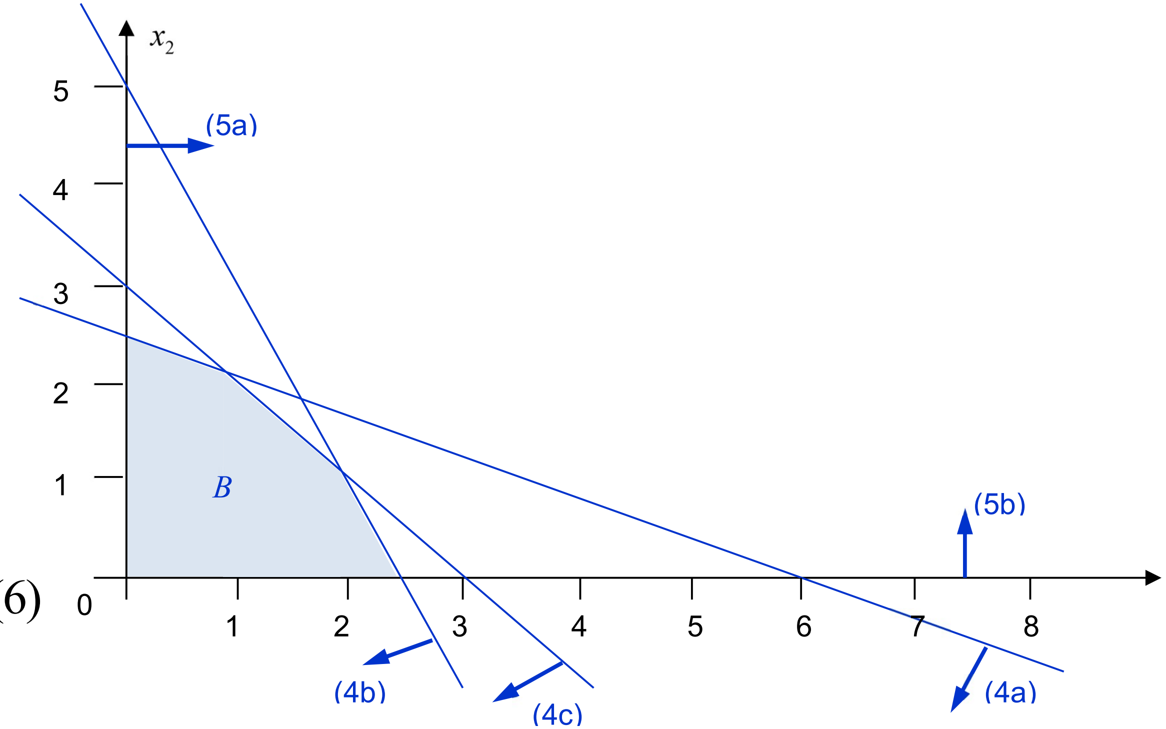
Auch jede der Ungleichungen (2) im Produktionsmodell oder (5) im Verbrauchsmodell beschreibt eine Halbebene, und zwar $x_1 \geq 0$ die (von der x_2-Achse begrenzte) rechte Halbebene und $x_2 \geq 0$ die (von der x_1-Achse begrenzte) obere Halbebene



Die Menge der Punkte der Ebene, die alle Restriktionen (1) und (2) bzw. (4) und (5) erfüllen, ergibt sich als Durchschnitt aller entsprechenden Halbebenen.
Eine solche Menge stellt einen sog. **polyedrischen Bereich** dar. Dieser kann endlich sein oder sich bis ins Unendliche erstrecken. Man nennt ihn den **zulässigen Bereich**, da er alle Punkte enthält, die überhaupt für die Optimumsuche in Frage kommen. Wir bezeichnen ihn mit $\mathcal{B}$. Seine Punkte heißen **zulässige Lösungen** der Optimierungsaufgabe.

Beispiel 2.2 (Forts.):

$$5x_1 + 12x_2 \leq 30 \qquad (4a)$$
$$20x_1 + 10x_2 \leq 50 \qquad (4b)$$
$$20x_1 + 20x_2 \leq 60 \qquad (4c)$$
$$x_1 \geq 0 \qquad (5a)$$
$$x_2 \geq 0 \qquad (5b)$$
$$z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{x_1, x_2} \qquad (6)$$



- Die Menge aller Punkte der Ebene, für welche die Zielfunktion f einen festen Wert $\boldsymbol{f_0}$ besitzt, bilden eine sog. **Niveaulinie** von f zum Wert $\boldsymbol{f_0}$. Da die Zielfunktion auch linear ist und alle Niveaulinien den konstanten Normalenvektor c haben, bilden die Niveaulinien parallele Geraden.
- Um maximale bzw. minimale zulässige Lösungen zu finden, muss man also eine (beliebige) Zielfunktionsniveaugerade einzeichnen und diese in Optimalrichtung soweit verschieben, bis sie letztmalig den zulässigen Bereich $\mathcal{B}$ berührt. Ein Berührungspunkt der so verschobenen Niveaulinie mit $\mathcal{B}$ stellt eine **optimale Lösung** dar, der zur Niveaulinie gehörige Zielfunktionswert den **Optimalwert**.
- I. d. R. wird sich eine optimale Lösung als Schnittpunkt zweier Geraden ergeben, die $\mathcal{B}$ begrenzen. Man löse das LGS aus den beiden Skalarformen dieser Geraden, um die genauen Koordinaten der optimalen Lösung zu berechnen.

Beispiel 2.2 (Forts.):

Schnittpunkt der Geraden (4a) und (4c):

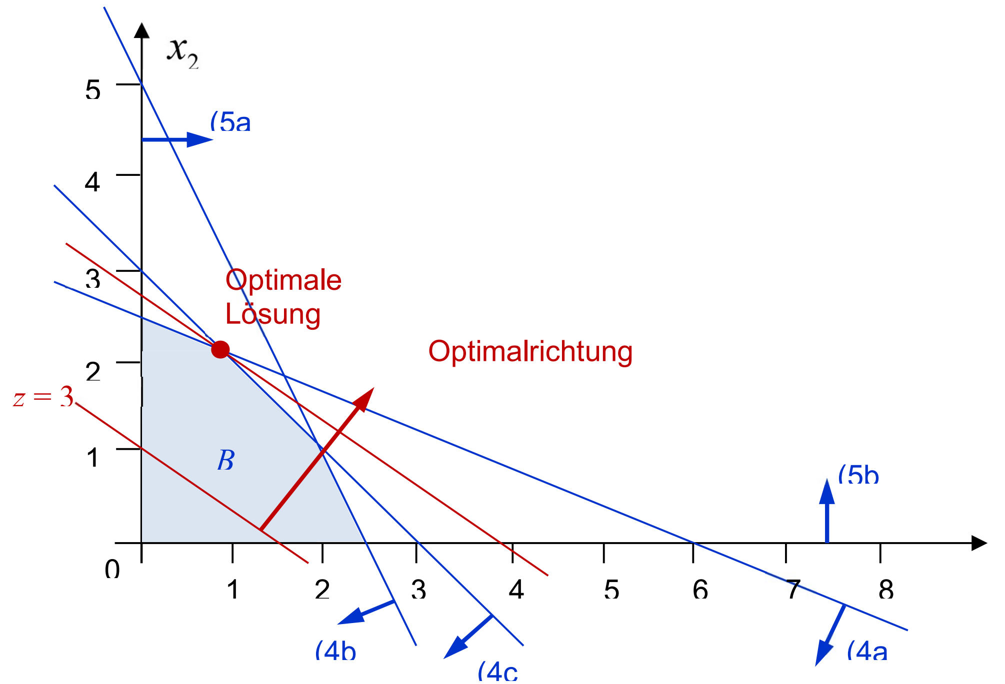
$$5x_1 + 12x_2 = 30$$
$$20x_1 + 20x_2 = 60$$

Lösung des LGS (optimale Lösung):

$$x_1^* = \frac{6}{7} \approx \underline{0{,}86},\ x_2^* = \frac{15}{7} \approx \underline{2{,}14}$$

Maximalwert:

$$z_{\max} = f(x_1, x_2) = 2 \cdot \frac{6}{7} + 3 \cdot \frac{15}{7} = \frac{57}{7} \approx \underline{8{,}14}.$$



2.1.4 Das allgemeine lineare Optimierungsproblem, Standard- und Normalform

Definition 2.1: (*Lineare Optimierungsaufgabe*)

Ein Problem der Gestalt

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} b_i,\ i = 1, \dots, n \\ x_j \geq 0,\ \forall j \in K \subseteq \{1, \dots, n\} \\ z = f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max \mathit{oder} \min \end{array}\right\} \text{(LP)}$$

heißt (allgemeine) **lineare Optimierungsaufgabe** (LP).

- Die Unbekannten $x_j, j = 1, \dots, n,$ heißen **Entscheidungsvariablen**, zum Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ zusammengefasst.
- Die Funktion f bezeichnet man als **Zielfunktion**, die bei der Optimierung zu beachtenden Nebenbedingungen als **Restriktionen**.
- Ein $x \in \mathbb{R}^n$, dass alle Restriktionen erfüllt, heißt **zulässig** oder **zulässige Lösung**. Die Menge aller zulässigen $x \in \mathbb{R}^n$ ist der **zulässige Bereich** $\mathcal{B} \subseteq R^n$
- Ein $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T \in \mathcal{B}$ mit größtmöglichem (bei max-Aufgabe) bzw. kleinstmöglichem (bei min-Aufgabe) Wert unter allen zulässigen Lösungen heißt **optimale Lösung**.
- Den zugehörigen Funktionswert $z^* = f(x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ nennt man **Optimalwert**.

Vereinheitlichen der LP-Probleme:

1. In der Zielfunktion kann man das Absolutglied c_0 vernachlässigen. Dadurch bleiben zulässige und optimale Lösungen unverändert, nur der Optimalwert ändert sich.
2. max-Probleme gehen in min-Probleme über, wenn die Zielfunktion mit -1 multipliziert wird.
3. Gleichungs-Restriktionen kann man jeweils durch zwei Ungleichungen (mit ≤ und ≥ anstelle von =) ersetzen.
4. Ungleichungs-Restriktionen mit ≤ werden durch Multiplikation mit -1 zu Ungleichungs-Restriktionen mit ≥.
5. Für nicht-vorzeichenbeschränkte x_j kann man ersetzen $x_j = x_j' - x_j'', x_j', x_j'' \geq 0$.
   Dadurch erhöht sich zwar die Variablenzahl, aber man kann die *Nichtnegativiät* für alle Variablen fordern.

➔ Jedes Optimierungsproblem kann wie ein Produktionsmodell (vgl. 2.1.1) formuliert werden.

Definition 2.2: (*Standardform*)

Liegt eine lineare Optimierungsaufgabe in der Form

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i,\ i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n \\ z = f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min \end{array}\right\} \qquad \text{(LP1)}$$

vor, so spricht man von einer **Standardform**.

Kurzform: $Ax \geq b, x \geq 0, z = f(x) = c^T x \to \min.$ (LP1')

Definition 2.3: (*Schlupfvariable, Normalform*)

Durch Einführung von sog. **Schlupfvariablen** $y_i, i = 1, \dots, m$, gewinnt man aus (LP1) die Gestalt

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - y_i = b_i,\ i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n \\ y_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m \\ z = f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min, \end{array}\right\} \quad \text{(LP2)}$$

die man als **Normalform** bezeichnet.

Mit $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ lautet die Kurzform

$$Ax - y = b,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z = f(x) = c^T x \to \min \qquad \text{(LP2')} \qquad \text{oder auch}$$

$$(A|-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0,\ z = (c^T, 0^T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \min \qquad \text{(LP2'')}$$