TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 12. Mai 2025
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Sebastian Debus, Dr. Max Winkler

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)

Sommersemester 2025

4. Übung: Integration

Aufgabe 1

Berechnen Sie $\int_K \operatorname{Re} z \mathrm{d}z$. K sei dabei

a) der positiv orientierte Einheitskreis,

b) die geradlinige Verbindung von 0 nach $1-i$,

c) der Streckenzug von 0 über 1 nach $1-i$.

Lösung: Zunächst stellen wir fest, dass $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nicht erüllt und somit nicht analytisch ist. Da es keine Stammfunktion gibt, müssen wir die Kurvenintegrale direkt berechnen. Es gilt

$$\int_\gamma f(z) z' \mathrm{d}z = \int_\gamma ux' - vy' \mathrm{d}z + i \int_\gamma vx' + uy' \mathrm{d}z.$$

a) Wir parametrisieren den Einheitskreis durch $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Mit $f(\gamma(t)) = \cos t$, $\gamma'(t) = -\sin t + i \cos t$ sowie $\int \cos^2 t \mathrm{d}t = t/2 + \sin(2t)/4 + C$ folgt nun

$$\begin{aligned}\int_\gamma \operatorname{Re} z \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t \mathrm{d}t + i \int_0^{2\pi} \cos^2 t \mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\left[\frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{2\pi}}_{=0} + i \left[\frac{t}{2} + \underbrace{\frac{\sin(2t)}{4}}_{=0}\right]_0^{2\pi} = i\pi.\end{aligned}$$

b) Wir integrieren entlang der Kurve $\gamma(t) = t - it$, $t \in [0, 1]$. Mit $\gamma'(t) = 1 - i$ erhalten wir

$$\int_\gamma \operatorname{Re} z \mathrm{d}z = \int_0^1 t(1-i) \mathrm{d}t = (1-i) \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1-i}{2}.$$

c) Wir zerlegen unsere Kurve in zwei Teile: $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = 1 - it$. Somit gilt

$$\int_\gamma \operatorname{Re} z \mathrm{d}z = \int_0^1 t \cdot 1 \mathrm{d}t + \int_0^1 1 \cdot (-i) \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - [it]_0^1 = \frac{1}{2} - i.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie $\int\limits_0^{(1+i)\pi} \cos z \mathrm{d}z$.

Lösung: Wir wissen aus Aufgabe 2b) des 3. Übungsblattes, dass Kosinus und Sinus holomorphe Funktionen sind. Die Stammfunktion von $\cos z$ ist auch im komplexen $\sin z$. Für das Integral folgt somit

$$\int_0^{(1+i)\pi} \cos(z)\mathrm{d}z = \sin((1+i)\pi) - \sin(0) = \sin(\pi)\cosh(\pi) + i\cos(\pi)\sinh(\pi) = -i\sinh(\pi).$$

Aufgabe 3

Wie kann man den Logarithmus für komplexe Zahlen definieren? Überzeugen Sie sich, dass der Logarithmus eine Stammfunktion von $f(z) = 1/z$ ist.

Lösung: Wir betrachten eine komplexe Zahl in Polardarstellung $z = re^{i\pi}$. Der Logarithmus ω von z ist die Zahl, welche die Gleichung

$$e^{\omega} = z = re^{i\varphi} = e^{\ln(r)+i\varphi}$$

erfüllt. Für $x \neq 0$ erhalten wir beispielweise die Darstellung

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\arctan\frac{y}{x},$$

welche die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Durch Ableiten folgt dann

$$\mathrm{Ln}'(z) = (\ln\sqrt{x^2+y^2})_x + i(\arctan\frac{y}{x})_x = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.$$

Es ist zu beachten, dass der Logarithmus (bzw. das Argument) aufgrund der $2\pi i$-Periodizität der Exponentialfunktion nicht eindeutig ist. Zum Beispiel kann man als Wertebereich für das Argument $\varphi \in (-\pi, \pi]$ wählen. In diesem Falle ist $\mathrm{Ln}(z)$ nur holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$.

Aufgabe 4

Ermitteln Sie $\int\limits_K \frac{\mathrm{d}z}{z}$,

a) $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = 1\}$,

b) $K = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x = \cos^3\varphi,\ y = \sin^3\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$.

Lösung:

a) Wir wissen aus Aufgabe 1f des letzten Blattes, dass f holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist. Da unsere Kurve den Koordinatenursprung nicht umrundet, folgt aus dem Cachyschen Integralsatz (Satz 14.24), dass unser geschlossenes Arbeitsintegral Null sein muss.

b) Hier integrieren wir über einen geschlossenen Weg um die Singularität, so dass der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar ist (nicht holomorph auf einfach zshg. Gebiet). Wir können allerdings die Cauchysche Integralformel (Satz 14.26) nutzen: Aus

$$n(\gamma, z_0)f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}z$$

folgt mit $f \equiv 1, z_0 = 0, k = 0$

$$\int_K \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_K \frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i f(0) = 2i\pi.$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int\limits_K \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z$ mit $K = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 3\}$,

b) $\displaystyle\int\limits_K \frac{\sin z}{z^2} \mathrm{d}z$ mit $K = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 3\}$.

Lösung:

a) Wir formen den Integranden zunächst unter Verwendung der Reihendarstellung des Sinus um und erhalten

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}.$$

Somit handelt es sich um das Integral einer analytischen und holomorphen Funktion über einen geschlossenen Weg, nach dem Cauchyschen Integralsatz ist das Integral folglich Null.

b) Wir benutzen wieder die Cauchysche Integralformel. Mit $f(z) = \sin z, z_0 = 0, k = 1$ erhalten wir

$$\int_K \frac{\sin z}{z^2} \mathrm{d}z = \int_K \frac{f(z)}{z^{k+1}} \mathrm{d}z = 2\pi i f'(0) = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i.$$