



Lehrbrief „Fahrdynamik“ (Teil 06), Sommersemester 2020

Dr.-Ing. Martin Kache

1. Juli 2020

Vorwort

Dies ist nun der sechste und letzte Lehrbrief im Fach „Fahrodynamik/Bahnfahrzeuge“. Er befasst sich mit den verschiedenen Möglichkeiten der (näherungsweise) Fahrzeitermittlung.

Die Herausforderung bei der Fahrzeitermittlung auf fahrdynamischer Basis liegt in der Berechnung ungleichmäßig beschleunigter Bewegungen. Diese treten bei Anfahr-, Beschleunigungs- und Bremsvorgängen von Eisenbahnfahrzeugen auf. Nicht immer ist es notwendig und möglich, eine exakte rechnerische Beschreibung und Lösung dieser Prozesse vorzunehmen. Dies gilt insbesondere für Vorgänge wie Betriebsbremsungen, die stark von subjektiven Einflussfaktoren abhängen.

Zugfahrtberechnungen werden heute in der Regel mit Hilfe von spezieller Software oder speziellen Skripten durchgeführt. Dieser Lehrbrief gibt Ihnen deshalb einen Überblick über die grundsätzlichen fahrdynamischen Zusammenhänge. Eine vertiefte Diskussion numerischer Integrationsmethoden findet nicht statt.

Mit den Schrittverfahren und einem auf fahrdynamische Fragestellungen zugeschnittenen Integrationsverfahren werden Ihnen jedoch Werkzeuge vorgestellt, mit denen Sie Beschleunigungs- und Bremsvorgänge mit komplexen Abhängigkeiten auch mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms berechnen könnten.

Für die anstehende Prüfungszeit sowie für Ihr weiteres Studium wünsche ich Ihnen viel Erfolg.

Viele Grüße aus dem „Home Office“

Dr.-Ing. Martin Kache

E-Mail: martin.kache@tu-dresden.de

Dresden im Juli 2020

Abbildungsnachweis:

Alle Abbildungen in diesem Lehrbrief stammen, sofern nicht anders angegeben, vom Autor selbst.



Schlüssel zu den verwendeten Textelementen



Rechenbeispiele

Die mit einer Glühlampe versehenen Kästen enthalten Rechenbeispiele.



Herleitungen

Die mit einer Lupe versehenen Kästen enthalten Herleitungen von Zusammenhängen, die im Text selbst nur in abgekürzter Form behandelt werden.



Definitionen

Die mit einem Achtungszeichen versehenen Kästen enthalten wichtige Definitionen und Merksätze.



Zusatzinformationen

Die mit einer Heftklammer versehenen Kästen enthalten Zusatz- und Hintergrundinformationen, die für das Verständnis des Textteils nicht zwingend nötig sind.



Arbeitsmaterialien

Die mit dem „Baustellenschild“ versehenen Kästen enthalten Hinweise auf weitere Arbeitsmaterialien, die zu dem in diesem Dokument behandelten Themen passen.



Rechenaufgaben

Die mit einem Schraubenschlüssel versehenen Kästen enthalten Rechenaufgaben zum selber rechnen.

$x + y = z$ Gleichungen, die von zentraler Bedeutung sind, werden gerahmt (12.1)

Inhaltsverzeichnis

13 Fahrzeitermittlung	7
13.1 Vorbemerkungen zur Fahrzeitermittlung	7
13.2 Linearisierung	14
13.3 Schrittverfahren	16
13.3.1 Grundidee der Schrittverfahren	16
13.3.2 Das Geschwindigkeitsschrittverfahren	17
13.3.3 Das Zeitschrittverfahren	18
13.3.4 Das Wegschrittverfahren	19
13.4 Integrationsverfahren	20
14 Verständnisfragen	27

13 Fahrzeitermittlung

13.1 Vorbemerkungen zur Fahrzeitermittlung

Für die Fahrzeitermittlung muss eine Summierung der Zeiten erfolgen, die für die verschiedenen Phasen der Zugfahrt benötigt werden. In Abhängigkeit der Frage, welche Einflussgrößen auf die fahrdynamischen Kräfte jeweils berücksichtigt und welche vernachlässigt werden können, ergeben sich unterschiedliche Gleichungen zur Berechnung der Fahrzeit. Diese sind für Beschleunigungs- und Verzögerungsvorgänge aufgrund der sich überlagernden Einflüsse von Geschwindigkeit (Fahrzeugwiderstandskräfte) und Weg (Streckenwiderstandskräfte) in der Regel nicht geschlossen lösbar.

Insbesondere häufige und starke Längsneigungswechsel steigern den Rechenaufwand erheblich, weshalb es sich im Falle einer „Handrechnung“ empfiehlt, für längere Streckenabschnitte eine mittlere Längsneigung zu bilden. Dabei sind nach [2] die folgenden zwei Aspekte zu berücksichtigen:

- Gefälle- und Steigungsabschnitte sollten nicht zusammengefasst werden.
- Die Einzelneigungen sollten bei Teilabschnittslängen von bis zu 200 m nicht mehr als 2 ‰ und bei Teilabschnittslängen zwischen 200 und 500 m nicht mehr als 1 ‰ vom errechneten Mittelwert abweichen.

Bei Beschleunigungs- und Verzögerungsprozessen liegt in der Fahrdynamik im Falle konstanter Neigungen eine geschwindigkeitsabhängige Beschleunigungs- bzw. Verzögerungsfunktion $f=a(v)$ vor. Damit ergeben sich die folgenden Grundintegrale, die zur Ermittlung der Zeiten und Wege gelöst werden müssen:

$$t = \int_{v_0}^{v_1} \frac{1}{a(v)} dv + t_0 \quad (13.1)$$

$$s = \int_{v_0}^{v_1} \frac{v}{a(v)} dv + s_0. \quad (13.2)$$

Diese Integrale sind geschlossen lösbar, wenn die Beschleunigung (bzw. Verzögerung) a eine lineare oder quadratische Abhängigkeit von der Geschwindigkeit aufweist. Da die Verläufe

der Zugkraft und der Fahrzeugwiderstandskräfte über weite Bereiche des Geschwindigkeitspektrums nicht linear verlaufen, bietet sich die Strategie der Linearisierung nur an, wenn eine Zerlegung der Fahrtabschnitte in Teilintervalle praktikabel ist.

Für eine überschlägige Berechnung von Beschleunigungs- und Bremsvorgängen ist die Annäherung der Beschleunigungs- und Verzögerungsprozesse mit Hilfe gleichmäßiger Beschleunigungen möglich. Diese werden mit Hilfe mittlerer Beschleunigungen bzw. Verzögerungen abgeschätzt, die auf Erfahrungswerten beruhen. Mittlere Beschleunigungen¹ werden prinzipiell entweder zeit- oder wegbezogen ermittelt.

Für die zeitbezogene mittlere Beschleunigung $a_{m,t}$ von der Geschwindigkeit v_0 auf die Geschwindigkeit v_1 gilt:

$$a_{m,t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (13.3)$$

Im Falle der wegbezogenen mittleren Beschleunigung ergibt sich demgegenüber:

$$a_{m,s} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2s}. \quad (13.4)$$

Es wird empfohlen, Beschleunigungs- und Auslaufphasen mit Hilfe der zeitbezogenen mittleren Beschleunigung abzuschätzen, während Bremsungen in der Regel mit der wegbezogenen² mittleren Beschleunigung angenähert werden [2].

Es ist zu beachten, dass die Werte von zeit- und wegbezogener mittlerer Beschleunigung voneinander abweichen. Bei der Ermittlung und Verwendung dieser Werte muss deshalb immer der Bezug mit angegeben werden. Die mittlere zeitbezogene Beschleunigung liefert die gleiche Beschleunigungszeit bei abweichendem Beschleunigungsweg im Vergleich zum Referenz-Beschleunigungsvorgang mit $a(v)$, während die wegbezogene mittlere Beschleunigung denselben Beschleunigungsweg bei abweichender Beschleunigungszeit ergibt.

Abbildung 13.1 zeigt jeweils die weg- und zeitbezogene mittlere Beschleunigung für einen ICE 3, der in der Ebene aus dem Stillstand bis zur Beschleunigungsendgeschwindigkeit beschleunigt wird.

Es wird deutlich, dass die mittlere zeitbezogene Beschleunigung $a_{m,t}$ hier stets oberhalb der mittleren wegbezogenen Beschleunigung liegt. Dies lässt sich nach [2] für alle Bewegungen verallgemeinern, bei denen die Beschleunigung mit zunehmender Geschwindigkeit abnimmt. Das trifft im Allgemeinen auf Zugfahrten zu.

Im unteren Geschwindigkeitsbereich ($v=20\dots60$ km/h in Diagramm 13.1) stimmen beide Arten der mittleren Beschleunigung nahezu überein. Dies liegt darin begründet, dass in diesem Geschwindigkeitsbereich die tatsächliche Beschleunigung des Zuges fast einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung entspricht. Bei der genannten Bewegungsart gilt Allgemein $a_{m,t} = a_{m,s}$. Die mittleren Beschleunigungen sind neben der Zugart (siehe Diagramm in Abbildung 13.3) natürlich auch von den vorherrschenden Streckenwiderstandskräften abhängig, wie Abbildung 13.2 am Beispiel der zeitbezogenen mittleren Beschleunigung für einen ICE 3 zeigt.

¹Wenn im Folgenden allgemein von „Beschleunigungen“ als physikalischer Größe die Rede ist, können die Aussagen auch auf „Verzögerungen“ (im Sinne von negativen Beschleunigungen) bezogen werden, ohne dass dies explizit erwähnt wird.)

²Dies bietet sich auch insofern an, als dass im Rahmen von Bremsberechnungen und -versuchen die Bremswege ermittelt werden.

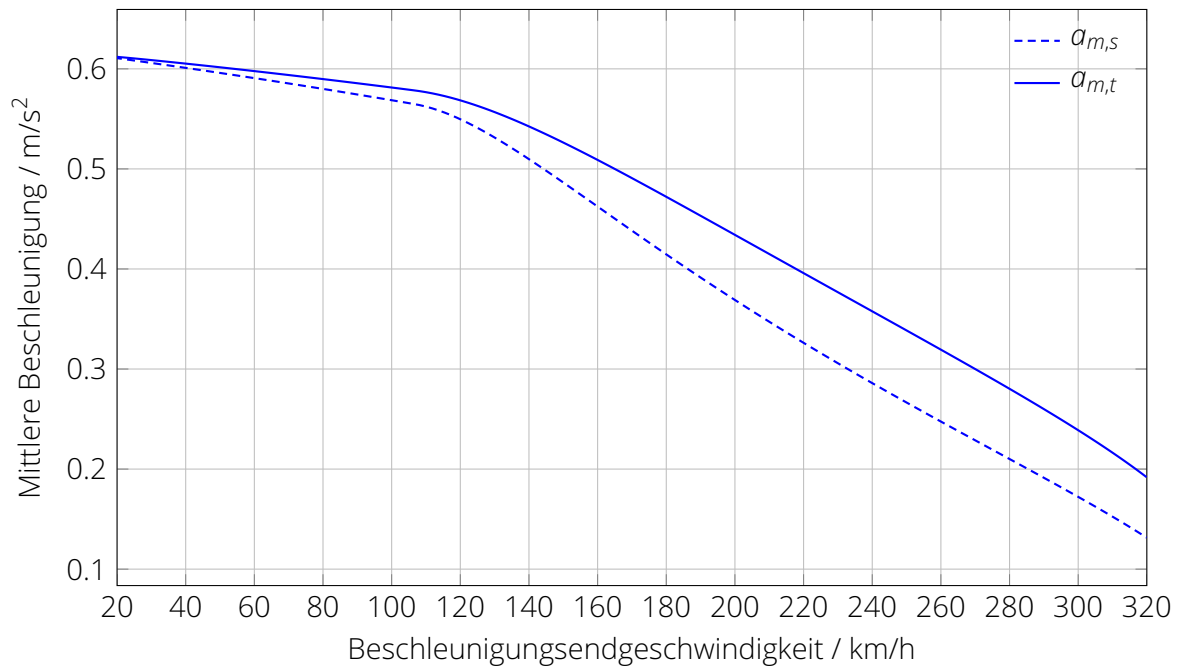


Abbildung 13.1: Mittlere Beschleunigungen (zeitbezogen ($a_{m,t}$) und wegbezogen ($a_{m,s}$)) für einen ICE 3 in der Ebene in Abhängigkeit der Beschleunigungsendgeschwindigkeit (Beschleunigung aus dem Stillstand)

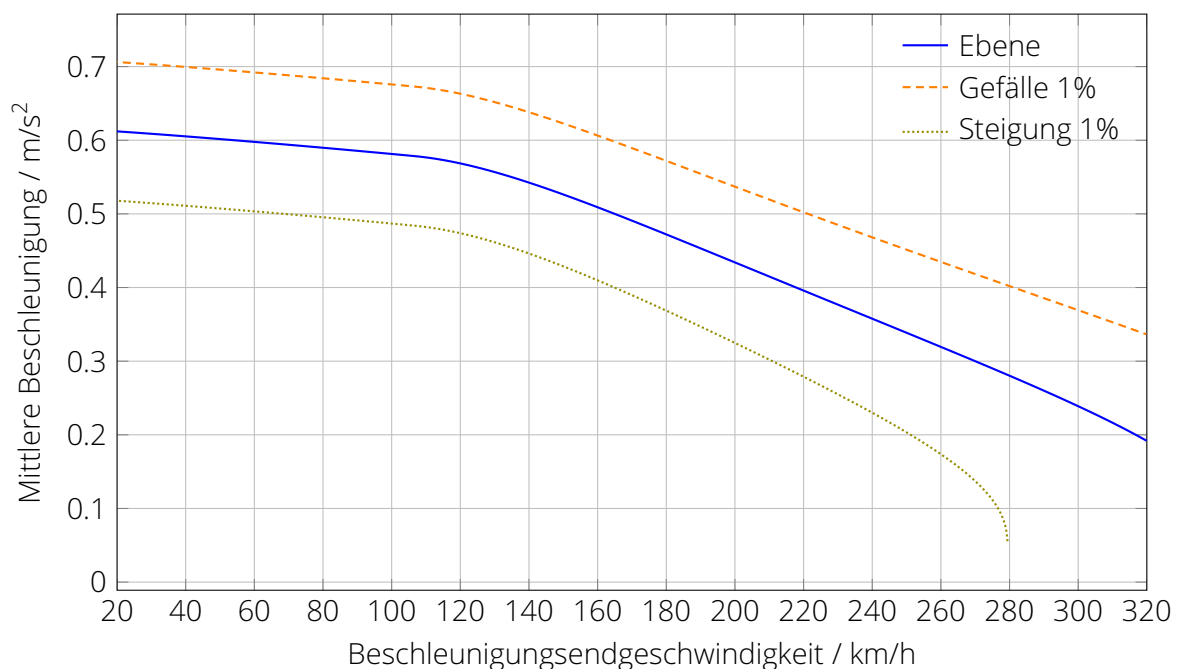


Abbildung 13.2: Mittlere, zeitbezogene Beschleunigung für einen ICE 3 in Abhängigkeit der Beschleunigungsendgeschwindigkeit (Beschleunigung aus dem Stillstand)

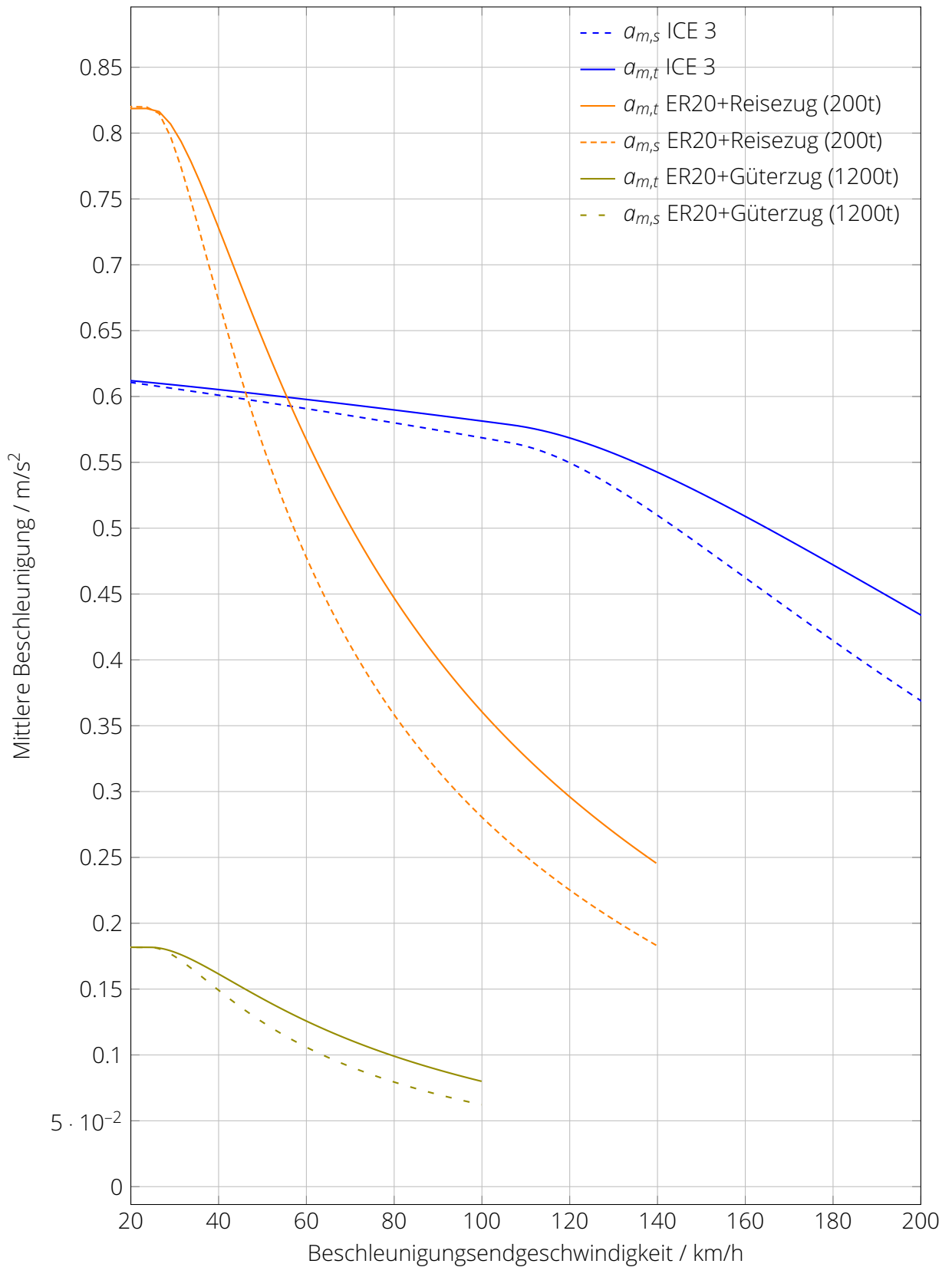


Abbildung 13.3: Mittlere Beschleunigungen für unterschiedliche Zugarten (ICE 3 sowie Siemens ER 20 mit Reisezug bzw. Güterzug) in Abhängigkeit der Beschleunigungsendgeschwindigkeit (Beschleunigung aus dem Stillstand)

Für Fahrzeitberechnungen mit einem hohen Anspruch an die Genauigkeit ist die Verwendung von mittleren Beschleunigungen nicht ausreichend. Es ist deshalb oft zielführender, mit Beschleunigungen zu rechnen, die für bestimmte Geschwindigkeitsintervalle auf fahrdynamischer Basis (Auswertung des Kräftegleichgewichtes) ermittelt werden.

In den folgenden Unterabschnitten sollen am Beispiel des Beschleunigungsvorganges eines lokbespannten Güterzuges (siehe Infokasten) verschiedene Berechnungsansätze miteinander verglichen werden.

💡 Rechenbeispiel: Beschleunigung eines Güterzuges



Betrachtet wird ein Güterganzzug (Wagenzugmasse: 1000 t), der mit einer Lokomotive der Baureihe 145 bespannt ist.

Es soll die erforderliche Zeit und der erforderliche Weg für eine Beschleunigung von 0 auf 100 km/h auf gerader, ebener Strecke ermittelt werden.

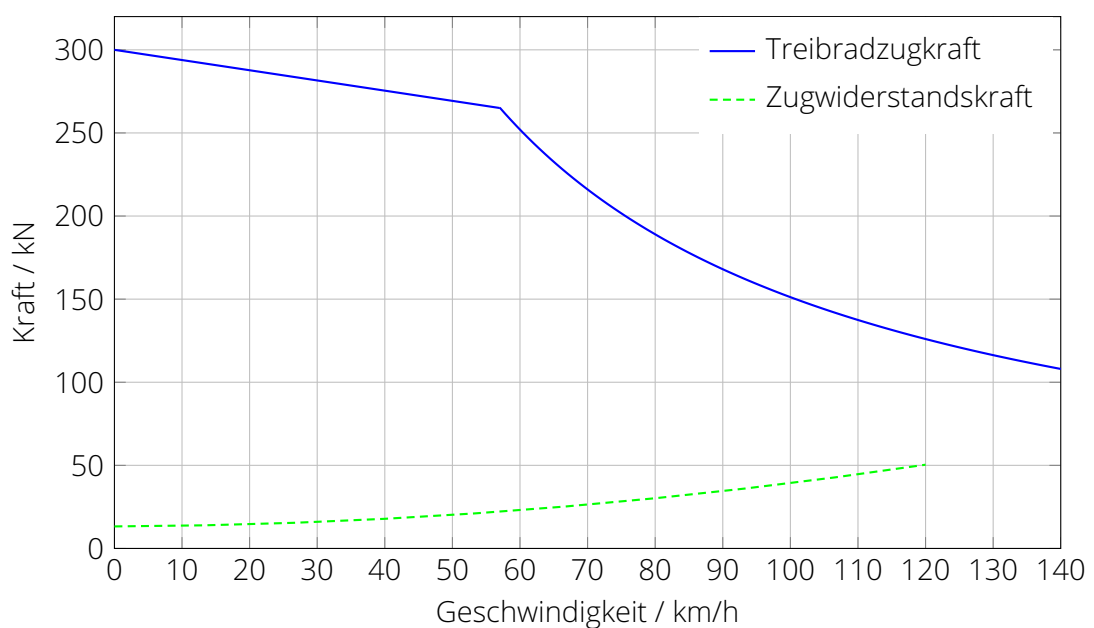
Folgende fahrdynamische Informationen liegen dafür vor:

$$F_{WFT} = 1,42 + 0,84 \cdot \frac{v}{100} + 2,8 \cdot \left(\frac{v+15}{100} \right)^2$$

$$f_{WFW} = 0,0012 + 0,0022 \cdot \left(\frac{v}{100} \right)^2$$

$$m_Z = 1080 \text{ t}$$

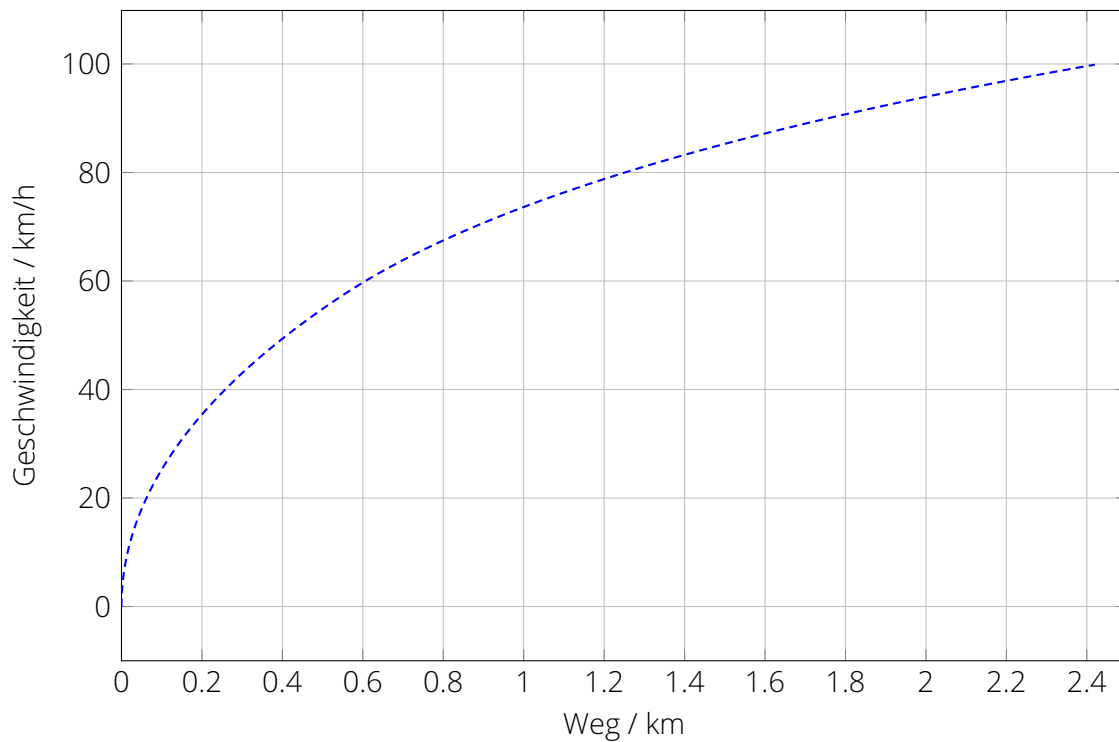
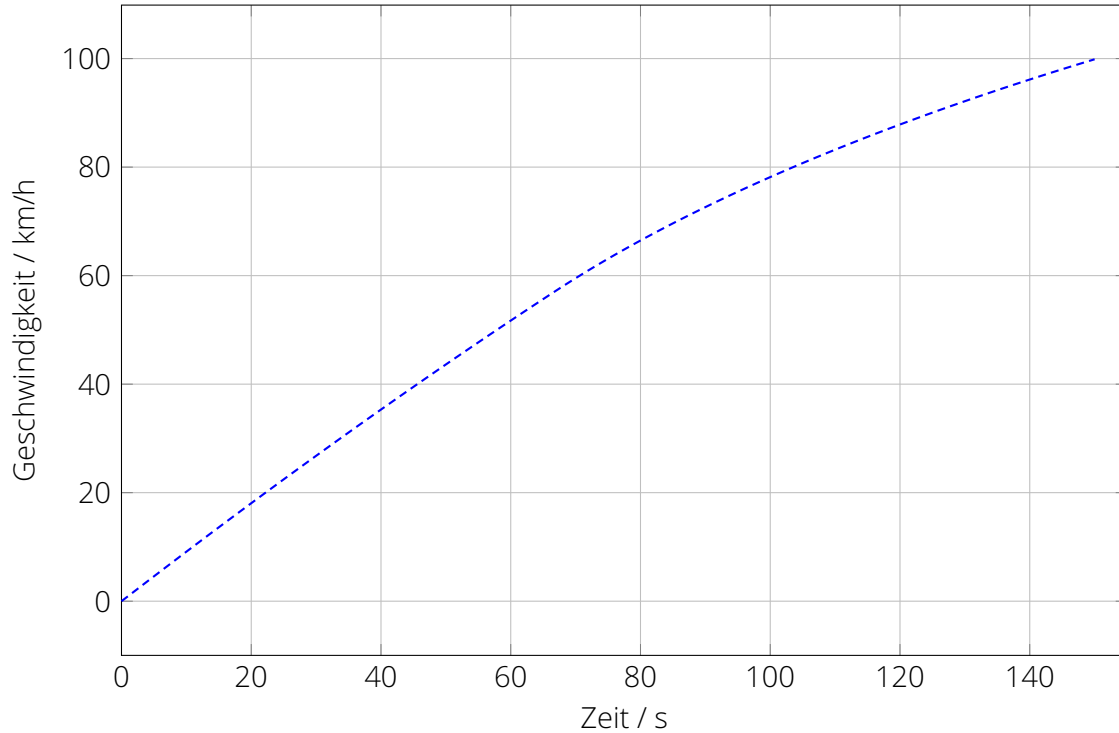
$$\xi_Z = 1,036$$



**Rechenbeispiel: Beschleunigung eines Güterzuges (Fortsetzung)**

Die Simulation liefert folgende Ergebnisse, die im Weiteren als Referenz dienen werden:

- Beschleunigungszeit: 150 s = 2 min 30 s,
- Beschleunigungsweg: 2430 m.



13.2 Linearisierung

Eine Möglichkeit, Fahrzeiten und Wege mit überschaubarem Rechenaufwand anzunähern, stellt die Linearisierung dar. Gelingt es, Zugkräfte und Fahrzeugwiderstandskräfte für festzulegende Geschwindigkeitsintervalle als lineare Funktionen anzunähern, ergibt sich bei konstantem Streckenwiderstand eine lineare Funktion $a(v) = a_c - bv$. Die auf Seite 7 vorgestellten Grundintegrale lassen sich dann wie folgt lösen:

$$t_{12} = \frac{v_1 - v_0}{a_0 - a_1} \ln \frac{a_0}{a_1} \quad (13.5)$$

$$s_{12} = \frac{(v_1 - v_0)^2}{a_0 - a_1} \cdot \left(\frac{a_c t_{12}}{v_1 - v_0} - 1 \right) \quad (13.6)$$

Die Variablen mit dem Index „0“ repräsentieren dabei die Zustände am Beginn des Intervalls, während der Index „1“ für das Ende des Intervalls steht.

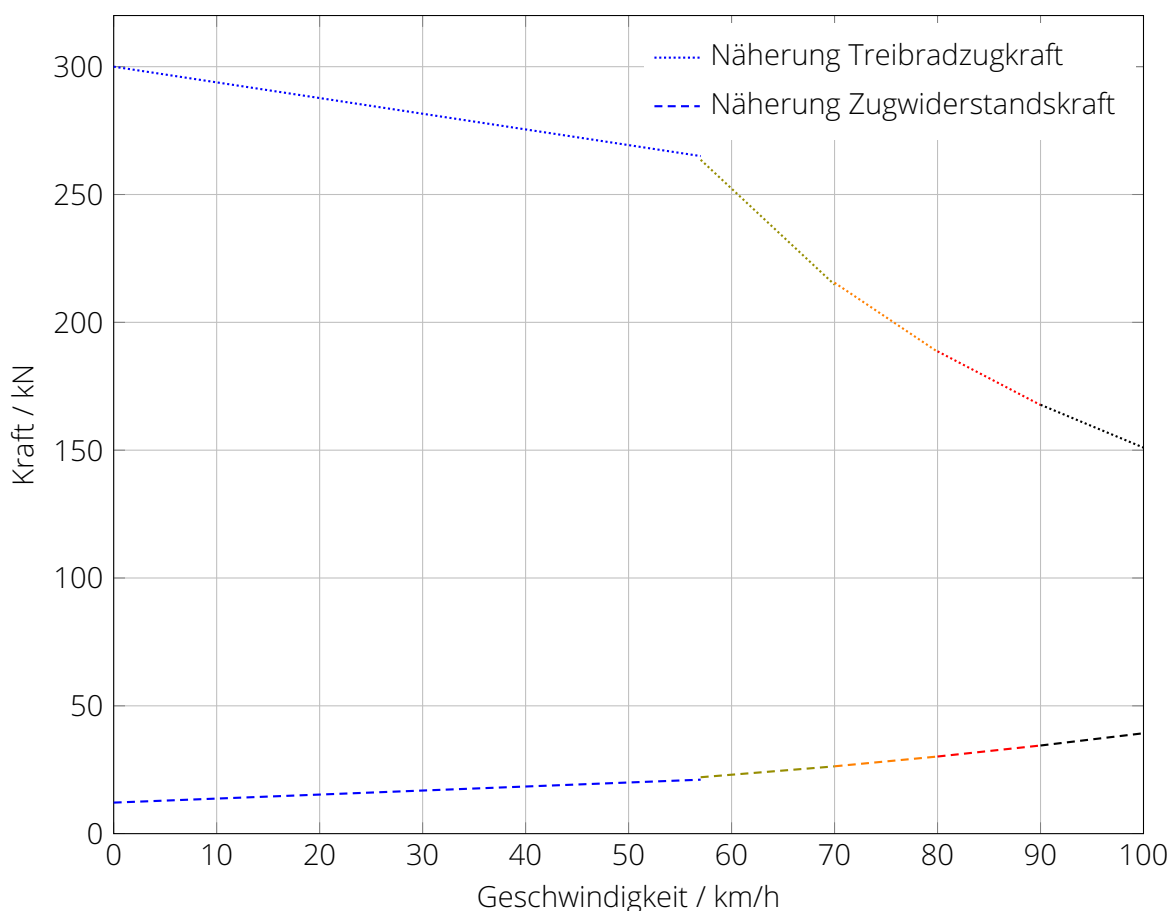


Abbildung 13.4: Intervallweise Linearisierung von Zugkraft und Fahrzeugwiderstand

Abbildung 13.4 zeigt eine mögliche Strategie zur Linearisierung der Beschleunigungsfunktion, bei der der betrachtete Geschwindigkeitsbereich (0...100 km/h) in folgende fünf Intervalle unterteilt wurde:

- Intervall I: $v = 0 \dots 57$ km/h,
- Intervall II: $v = 57 \dots 70$ km/h,
- Intervall III: $v = 70 \dots 80$ km/h,

- Intervall IV: $v = 80 \dots 90$ km/h und
- Intervall V: $v = 90 \dots 100$ km/h.

Die Intervallgrenzen werden bei der Ermittlung der linearen Ersatzfunktionen („Ausgleichsgerade“ mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ermittelt) jeweils doppelt genutzt - die Geschwindigkeit von 70 km/h gehört zum Beispiel sowohl zu Intervall II als auch zu Intervall III. Die lineare Beschleunigungsfunktion lässt sich für jedes Intervall unmittelbar durch Subtraktion von Zugkraft und Fahrzeugwiderstand und anschließendem Zusammenfassen der Koeffizienten ermitteln. Für das erste Intervall ($v=0 \dots 57$ km/h) ergibt sich beispielsweise für die Zugkraft folgende Näherungsgleichung:

$$F_T \approx 300 - 0,6135v.$$

Die Gleichung zur Approximation des Fahrzeugwiderstandes lautet:

$$F_{WFZ} \approx 12,146 + 0,15735v.$$

Für die Beschleunigung ergibt sich folglich:

$$\begin{aligned} a &\approx \frac{F_T(v) - F_{WFZ}}{\xi_Z m_Z} = \frac{300 - 0,6135v - 12,146 - 0,15735v}{1,036 \cdot 1080} \\ &\approx \frac{287,854 - 0,77085v}{1118,88} \\ a &\approx 0,2573 - 6,8895 \cdot 10^{-4}v. \end{aligned}$$

Die Berechnungsergebnisse für die fünf Intervalle sind Tabelle 13.1 zu entnehmen. Es ist ersichtlich, dass sowohl der ermittelte Beschleunigungsweg, als auch die Beschleunigungszeit weitgehend mit den mittels Simulation ermittelten Werten übereinstimmen. Gegebenenfalls könnte die Anzahl der Intervalle sogar verkleinert und damit der Berechnungsaufwand reduziert werden, wenn eine bestimmte Abweichung der Berechnungsergebnisse als akzeptabel angesehen wird.

Tabelle 13.1: Berechnungsergebnisse nach Linearisierung und Anwendung der Gleichungen 13.5 und 13.6

Intervall	v_0	v_1	$a(v)$	a_0	a_1	a_c	t_{12}	s_{12}
	km/h	km/h	m/s^2	m/s^2	m/s^2	m/s^2	s	m
I	0	57	$0,2573 - 6,8895 \cdot 10^{-4}v$	0,2573	0,2180	0,2573	67	543
II	57	70	$0,4239 - 3,6506 \cdot 10^{-3}v$	0,2158	0,1684	0,4239	19	335
III	70	80	$0,3619 - 2,7550 \cdot 10^{-3}v$	0,1691	0,1415	0,3619	18	374
IV	80	90	$0,3226 - 2,2624 \cdot 10^{-3}v$	0,1417	0,1190	0,3226	21	505
V	90	100	$0,2926 - 1,9278 \cdot 10^{-3}v$	0,1191	0,0998	0,2926	25	672
Summe							150	2429

13.3 Schrittverfahren

13.3.1 Grundidee der Schrittverfahren

Eine weitere Möglichkeit, Fahrtverläufe auf fahrdynamischer Basis zu ermitteln, stellen die Schrittverfahren dar. Die Grundidee dieser Berechnungsansätze liegt in der Aufteilung der Fahrt in viele kleine Schritte, während derer die Beschleunigung als konstant angenommen wird. Es besteht prinzipiell die Möglichkeit, die Geschwindigkeit, den zurückgelegten Weg oder die Zeit zu diskretisieren.

Abbildung 13.5 zeigt beispielhaft die Annäherung eines $a(v)$ -Verlaufes durch intervallweise Bildung konstanter, mittlerer Beschleunigungen bei einer Schrittweite von $\Delta v=1$ km/h. Die Güte der Ergebnisse aber auch der Rechenaufwand hängen von der gewählten Schrittweite ab. Diese ist stets so klein wie nötig und so groß wie möglich zu wählen, damit der Rechenaufwand beherrschbar bleibt.

Der praktische Vorteil der Schrittverfahren ist, dass sie sich sehr gut mit Hilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen umsetzen lassen. Sie stellen somit eine gute Rückfallebene dar, wenn einfache fahrdynamische Fragestellungen zu beantworten sind (Beschleunigungs- und Bremszeiten und -wege) und keine Spezialsoftware zur Verfügung steht.

Es gibt jedoch auch professionelle fahrdynamische Simulationssoftware, die auf Basis der Schrittverfahren programmiert ist³.

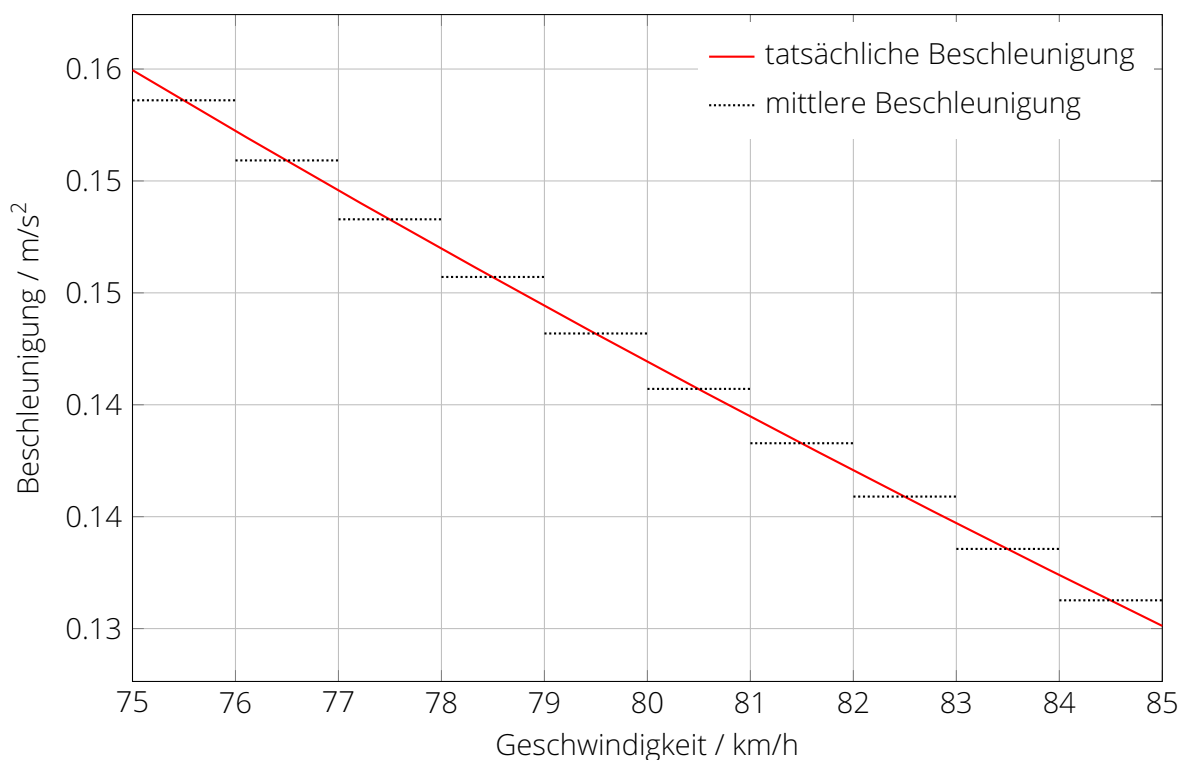


Abbildung 13.5: Beispiel für die intervallweise Bildung konstanter, mittlerer Beschleunigungen im Zuge der Anwendung des Geschwindigkeits-Schrittverfahrens - Ausschnitt aus dem Beschleunigungsverlauf des Referenzbeispiels (siehe Infokasten auf Seite 12)

³Das von der ive mbH entwickelte und vertriebene Programm „Dynamis“ basiert auf der Anwendung des Wegschrittverfahrens.

13.3.2 Das Geschwindigkeitsschrittvfahren

Das Geschwindigkeitsschrittvfahren ist nur zur Berechnung von Beschleunigungs- und Verzögerungsvorgängen geeignet und muss bei Bedarf durch das Weg- oder Zeitschrittvfahren für Beharrungsfahrten ergänzt werden.

Der Vorteil bei der Anwendung dieses Verfahren liegt in der intuitiven Festlegung der Intervallbreite und der einfachen Abschätzung des Rechenaufwandes.

Unter Rückgriff auf den betrachteten Beispielfall der Beschleunigung eines Güterzuges von 0 auf 100 km/h (siehe S. 12) soll dies im Folgenden erläutert werden.

Eine Schrittweite von $\Delta v = 1 \text{ km/h}$ erscheint als guter Kompromiss aus Genauigkeit und Rechenaufwand. Damit steht auch fest, dass 100 Schritte gerechnet werden müssen. Im Falle der Anwendung des Zeitschrittvfahrens wären bei der Wahl eines 1 s-Intervalls demgegenüber etwa 150 Schritte zu erwarten und im Falle der Anwendung des Wegschrittvfahrens mit einer Schrittweite von 10 m sogar 243 Schritte. Somit erscheint das Geschwindigkeitsschrittvfahren für das betrachtete Referenzbeispiel bezüglich des Rechenaufwandes die effizienteste Methode zu sein.

Der Ablauf des Geschwindigkeitsschrittvfahrens gestaltet sich gemäß der nachfolgend aufgeführten Gleichungen:

$$v_{i+1} = v_i \pm \Delta v \quad (13.7)$$

$$a_m = \frac{a(v_i) + a(v_{i+1})}{2} \quad (13.8)$$

$$\Delta t = \frac{v_{i+1} - v_i}{a_m} \quad (13.9)$$

$$\Delta s = \frac{v_{i+1}^2 - v_i^2}{2a_m} \quad (13.10)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (13.11)$$

$$s_{i+1} = s_i + \Delta s \quad (13.12)$$

Die Beschleunigungen $a(v_i)$ ergeben sich aus der Auswertung des fahrdynamischen Kräftegleichgewichtes für jeden Berechnungsschritt.

Tabelle 13.2 zeigt die mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms ermittelten Werte für die relevanten Parameter für das Referenzbeispiel.

In der letzten Zeile der genannten Tabelle wird deutlich, dass auf diese Weise ähnlich genaue Ergebnisse wie mit den bisher vorgestellten Verfahren erzielt werden können. Mit einer Beschleunigungszeit von 150 s und einem Beschleunigungsweg von 2430 m entsprechen die Resultate ziemlich genau den Simulationsergebnissen (siehe Seite 13).



Excel-Arbeitsmappe

Um die im Textteil diskutierten Abläufe und Berechnungen besser nachvollziehen zu können, wird Ihnen im OPAL eine MS-Excel-Datei „Arbeitsmappe_Fahrzeitberechnung.xlsx“ zur Verfügung gestellt. Darin ist die gesamte Berechnungstabelle für das Geschwindigkeitsschrittvfahren enthalten.

Tabelle 13.2: Ergebnisse der Berechnung des Referenzbeispiels mit Hilfe des Geschwindigkeitsschrittverfahrens

t	s	v	F_T	F_{WFT}	f_{WFW}	F_{WFW}	F_{WfZ}	a	a_m
s	m	km/h	kN	kN	1	kN	kN	m/s ²	m/s ²
0,00	0,00	0	300,00	1,483	0,0012000	11,772	13,255	0,25630	0,256014
1,09	0,15	1	299,39	1,500	0,0012002	11,774	13,274	0,25573	0,255446
2,17	0,60	2	298,77	1,518	0,0012009	11,781	13,298	0,25516	0,254874
3,26	1,36	3	298,16	1,536	0,0012020	11,791	13,327	0,25459	0,254298
4,35	2,42	4	297,55	1,555	0,0012035	11,807	13,361	0,25401	0,253717
5,45	3,79	5	296,93	1,574	0,0012055	11,826	13,400	0,25343	0,253132
...
144,93	2280,2	98	154,29	5,819	0,0033129	32,499	38,318	0,10365	0,102735
147,63	2354,2	99	152,73	5,890	0,0033562	32,925	38,815	0,10182	0,100910
150,4	2430,3	100	151,20	5,963	0,0034000	33,354	39,317	0,10000	0,099107

13.3.3 Das Zeitschrittverfahren

Das Zeitschrittverfahren ermöglicht eine sehr hohe zeitliche Auflösung der Vorgänge, die bei Zugfahrten eine Rolle spielen können. Mit Hilfe dieses Verfahrens ist es problemlos möglich, Auf- und Abregelprozesse nachzubilden, was insbesondere bei der Modellierung von Bremsungen mit Druckluftbremsen (vergleichsweise lange Bremszylinderfüll- und -lösezeiten) interessant sein kann.

Es ist zu beachten, dass wesentliche Veränderungen des fahrdynamischen Kräftegleichgewichtes (bei der Befahrung wechselnder Neigungen) in Abhängigkeit des Weges erfolgen. Deshalb muss ggf. eine dynamische Anpassung der Zeitschritte bzw. eine iterative Berechnung erfolgen, wenn beispielsweise in einem Zeitschritt die zurückgelegte Wegstrecke so groß ist⁴, dass ein Neigungswechsel „überfahren“ wird.

Der prinzipielle Ablauf der Berechnungen bei der Anwendung des Zeitschrittverfahrens ergibt sich aus den Gleichungen im nachfolgenden Kasten.

$$a_i = a(v_i) = \text{const.} \quad (13.13)$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot \Delta t \quad (13.14)$$

$$v_m = \frac{v_i + v_{i+1}}{2} \quad (13.15)$$

$$\Delta s = v_m \cdot \Delta t \quad (13.16)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (13.17)$$

$$s_{i+1} = s_i + \Delta s \quad (13.18)$$

$$a_{i+1} = a(v_{i+1}) \quad (13.19)$$

⁴Dies ist insbesondere bei hohen Geschwindigkeiten relevant. Bei $v = 200$ km/h werden z.B. ca. 56 m je Sekunde zurückgelegt.

**Zeitschrittverfahren mit Excel-Arbeitsmappe**

Nutzen Sie die im OPAL zur Verfügung gestellte MS-Excel-Datei „Arbeitsmappe.Fahrzeitberechnung.xls“ um das Zeitschrittverfahren auf das Referenzbeispiel (siehe S. 12) anzuwenden. Sie können sich dabei an dem Arbeitsblatt „v-Schrittverfahren“ orientieren.

13.3.4 Das Wegschrittverfahren

Das Wegschrittverfahren hat den Vorteil, dass die Wegschritte relativ einfach variiert werden können, wenn die fahrdynamischen Randbedingungen dies zulassen. So kann beispielsweise die Berechnung von Beharrungsfahrten nach erfolgter Beschleunigung recht effizient erfolgen, weil die Distanz bis zum nächsten Neigungswechsel oder Bremseninsatzpunkt vorher bekannt ist. Im Gegensatz zum Zeitschrittverfahren muss deshalb kein „Herantaster“ an die neuralgischen Streckenpunkte erfolgen.

Der prinzipielle Ablauf der Berechnungen bei der Anwendung des Wegschrittverfahrens ergibt sich aus den Gleichungen im nachfolgenden Kasten.

$$a_i = a(v_i) = \text{const.} \quad (13.20)$$

$$v_{i+1} = \sqrt{v_i^2 + 2 \cdot a_i \cdot \Delta s} \quad (13.21)$$

$$v_m = \frac{v_i + v_{i+1}}{2} \quad (13.22)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_m} \quad (13.23)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (13.24)$$

$$s_{i+1} = s_i + \Delta s \quad (13.25)$$

$$a_{i+1} = a(v_{i+1}) \quad (13.26)$$

13.4 Integrationsverfahren

Das nachfolgende Integrationsverfahren wurde von Jentsch [1] entwickelt und stellt einen auf fahrdynamische Zwecke angepassten Integrationsalgorithmus dar, der sich die Tatsache zunutze macht, dass für die auf S. 7 angegebenen Grundintegrale für geschwindigkeitsabhängige Beschleunigungen eine geschlossene Lösung existiert, wenn es sich bei der Funktion $a(v)$ um ein quadratisches Polynom handelt.

Voraussetzung zur Anwendung des Integrationsalgorithmus' ist deshalb die Formulierung (Annäherung) der Beschleunigungs-Geschwindigkeits-Funktion als quadratisches Polynom.

Aufgrund der Unstetigkeiten, die Zugkraft-Geschwindigkeits-Diagramme für gewöhnlich aufweisen, ist es notwendig, Beschleunigungsvorgänge in Geschwindigkeitsintervalle einzuteilen. Für das Referenzbeispiel (Beschleunigung eines Güterzuges von 0 auf 100 km/h in der Ebene, siehe S. 12) erfolgt die Aufteilung in die folgenden Intervalle:

- Intervall I: $v = 0 \dots 57$ km/h,
- Intervall II: $v = 57 \dots 80$ km/h,
- Intervall III: $v = 80 \dots 100$ km/h.

Die Fahrzeugwiderstandskräfte liegen als Polynomgleichungen vor, die Zugkraftkurve jedoch nicht. Der Einfachheit halber wird bei der Ermittlung der von Jentsch als „Beschleunigungsgrundfunktion“ $a(v)$ bezeichneten Beschleunigungsnäherungsfunktion die Zughakenzugkraft der Lokomotive zugrunde gelegt.

Intervallweise werden drei Stützpunkte festgelegt, damit die Koeffizienten der Näherungsfunktion für die Zugkraft (Gleichung 13.27) bestimmt werden können.

$$F_Z = K_1 v^2 + K_2 v + K_3 \quad (13.27)$$

Tabelle 13.3: Stützstellen zur intervallweisen Bestimmung der Näherungsfunktion für die Zughakenzugkraft

	v_1 km/h	F_{Z1} kN	v_2 km/h	F_{Z2} kN	v_3 km/h	F_{Z3} kN
Intervall I	0	298,517	30	279,361	57	261,650
Intervall II	57	261,65	70	211,969	80	184,381
Intervall III	80	184,381	90	162,737	100	145,237

Die Koeffizienten in Gleichung 13.27 lassen sich verhältnismäßig einfach bestimmen, wenn für jedes Intervall die Wertepaare (F_{Zi}, v_i) eingesetzt werden. Für Intervall I ergeben sich die folgenden drei Gleichungen:

$$298,517 = K_1 \cdot 0^2 + K_2 \cdot 0 + K_3$$

$$279,361 = K_1 \cdot 30^2 + K_2 \cdot 30 + K_3$$

$$261,650 = K_1 \cdot 57^2 + K_2 \cdot 57 + K_3$$

Es liegt ein System aus drei Gleichungen mit drei unbekanntem Koeffizienten vor, das sich mit überschaubarem Aufwand lösen lässt. Für das Intervall I ergibt sich das folgende Näherungspolynom für die Zughakenzugkraft:

$$-3,0578 \cdot 10^{-4} v^2 - 0,6294 v + 298,517.$$

Tabelle 13.4: Koeffizienten der Näherungspolynome für die Zughakenzugkraft in den jeweiligen Intervallen

	K_1 $\text{kN}/(\text{km}/\text{h})^2$	K_2 $\text{kN}/(\text{km}/\text{h})$	K_3 kN
Intervall I	$-3,0578 \cdot 10^{-4}$	-0,6294	298,517
Intervall II	0,0462	-9,6902	663,8574
Intervall III	0,0207	-5,6868	506,717

Die auf gleiche Weise ermittelten Koeffizienten für die beiden verbleibenden Intervalle können Tabelle 13.4 entnommen werden.

Wie Abbildung 13.6 zu entnehmen ist, kann mit bloßen Auge kaum ein Unterschied zwischen den quadratischen Näherungsfunktionen für die Zughakenzugkraft und der Zughakenzugkraft selbst ausgemacht werden.

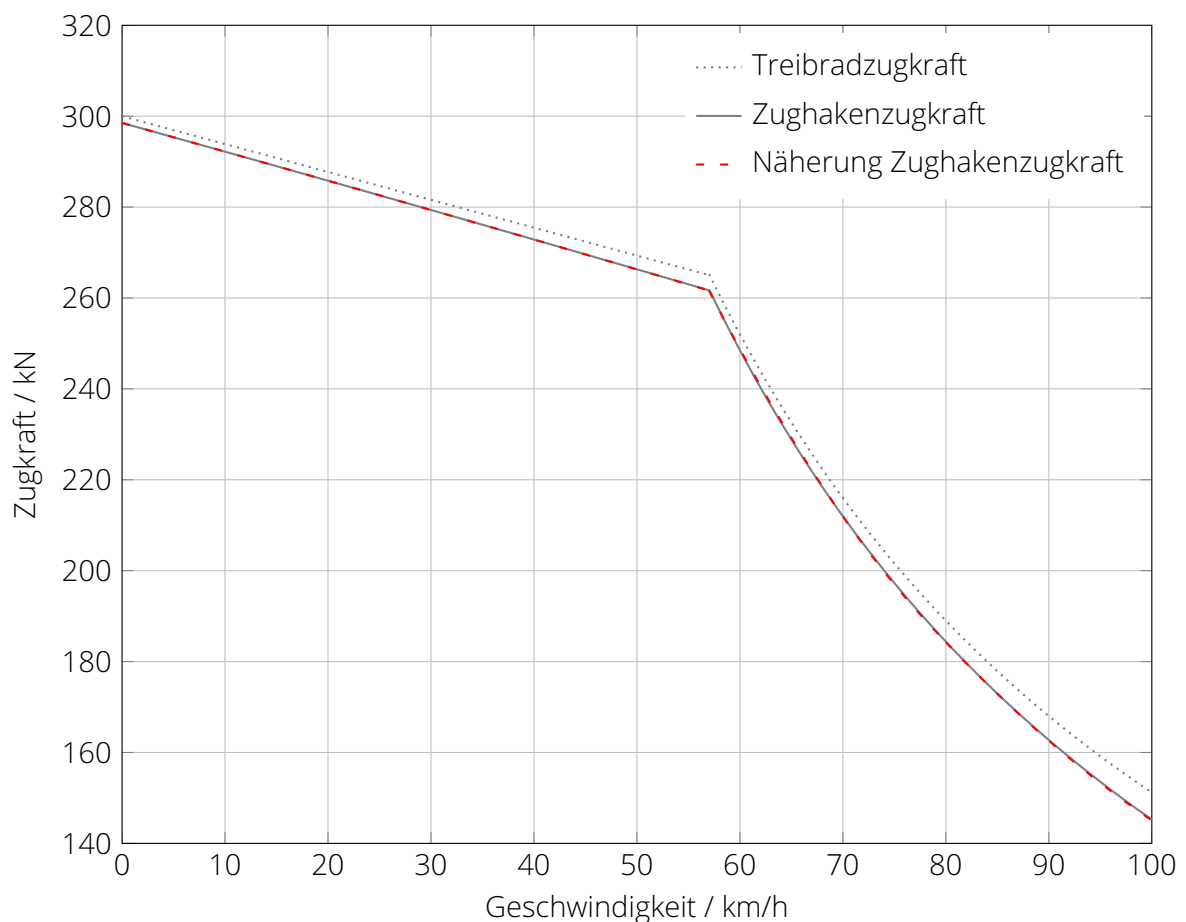


Abbildung 13.6: Intervallweise Näherung der Zughakenzugkraft mit Hilfe quadratischer Polynome

In einem nächsten Schritt wird nun der Wagenzugwiderstand berücksichtigt, womit sich ein Näherungspolynom für die überschüssige Antriebskraft in der Ebene $p(v)$ ergibt.

$$p = K_1 v^2 + K_2 v + K_3 \quad (13.28)$$

Die Koeffizienten κ_i gehen ihrerseits aus den folgenden Gleichungen hervor:

$$\kappa_1 = \frac{K_1 - \frac{\gamma}{100^2} \cdot m_W \cdot g}{(m_T + m_W) \cdot g}$$

$$\kappa_2 = \frac{K_2 - \frac{\beta}{100} \cdot m_W \cdot g}{(m_T + m_W) \cdot g}$$

$$\kappa_3 = \frac{K_3 - \alpha \cdot m_W \cdot g}{(m_T + m_W) \cdot g}$$

Die griechischen Symbole stehen dabei für die Koeffizienten der spezifischen Wagenzugwiderstandsgleichung:

$$f_{WFW} = \alpha + \beta \cdot \frac{v}{100} + \gamma \cdot \left(\frac{v}{100}\right)^2$$

Für Intervall I ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{K_1 - \frac{\gamma}{100^2} \cdot m_W \cdot g}{(m_T + m_W) \cdot g} \\ &= \frac{-0,00030578 - \frac{0,0022}{100^2} \cdot 1000 \cdot 9,81}{(80 + 1000) \cdot 9,81} \\ &= -2,3257 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{K_2 - \frac{\beta}{100} \cdot m_W \cdot g}{(m_T + m_W) \cdot g} \\ &= \frac{-0,6294}{(80 + 1000) \cdot 9,81} \\ &= -5,94065 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= \frac{K_3 - \alpha \cdot m_W \cdot g}{(m_T + m_W) \cdot g} \\ &= \frac{298,517 - 0,0012 \cdot 1000 \cdot 9,81}{(80 + 1000) \cdot 9,81} \\ &= 0,02706 \end{aligned}$$

Die auf gleiche Weise ermittelten Koeffizienten für die beiden übrigen Intervalle sind Tabelle 13.5 zu entnehmen.

Tabelle 13.5: Koeffizienten der Näherungspolynome für den spezifischen Zugkraftüberschuss in der Ebene in den jeweiligen Intervallen

	K_1	K_2	K_3
Intervall I	$-2,3257 \cdot 10^{-7}$	$-5,94065 \cdot 10^{-5}$	0,02706
Intervall II	$4,1569 \cdot 10^{-6}$	$-9,1462 \cdot 10^{-4}$	0,06155
Intervall III	$1,75 \cdot 10^{-6}$	$-5,3675 \cdot 10^{-4}$	0,04672

Nun gilt es, die Koeffizienten des eigentlichen Beschleunigungspolynoms

$$a(v) = Av^2 + Bv + C$$

zu ermitteln. Zu beachten ist, dass der Integrationsalgorithmus darauf zugeschnitten ist, die Geschwindigkeiten in km/h einzusetzen. Er liefert die Fahrzeiten in der Einheit h sowie die Wege in der Einheit km.

Die Beschleunigung wird deshalb von der Einheit m/s^2 in km/h^2 , woraus sich ein Umrechnungsfaktor von $12960 \frac{m/s^2}{km/h^2}$ ergibt, der sich in den Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten wiederfindet:

$$A = \frac{12960}{\xi_Z} \cdot g \cdot K_1$$

$$B = \frac{12960}{\xi_Z} \cdot g \cdot K_2$$

$$C = \frac{12960}{\xi_Z} \cdot g \cdot (K_3 - f_{ws}).$$

Die mit Hilfe dieser Gleichungen in den verschiedenen Intervallen ermittelten Koeffizienten enthält Tabelle 13.6. Da nun die Koeffizienten alle bekannt sind, kann der eigentliche Integra-

Tabelle 13.6: Koeffizienten der Näherungspolynome die Beschleunigung des Beispielzuges (Seite 12) in den jeweiligen Intervallen

	A	B	C	Diskriminante Z
Intervall I	-0,02854	-7,29087	3321,61	-432,4
Intervall II	0,51017	-112,24972	7553,65	2814,7
Intervall III	0,21479	-65,87498	5733,36	586,3

tionsprozess gestartet werden. Dafür ist zunächst für jedes Intervall die Diskriminante Z zu bestimmen. Diese berechnet sich nach folgender Gleichung:

$$Z = 4AC - B^2 \quad (13.29)$$

Die so ermittelten Diskriminanten sind ebenfalls für alle Intervalle in Tabelle 13.6 aufgeführt. Die Diskriminante dient zur Fallunterscheidung, da jeweils andere Gleichungen für die Ermittlung der Zeiten und Wege gelten, wenn die Diskriminante größer oder kleiner als 0 ist. Für Intervall I gilt, dass $Z < 0$ ist, weshalb die Zeitdifferenz nach der folgenden Gleichung ermittelt werden muss:

$$\Delta t_I = \frac{1}{\sqrt{-Z}} \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot A \cdot v_1 + B - \sqrt{-Z}}{2 \cdot A \cdot v_1 + B + \sqrt{-Z}} \cdot \frac{2 \cdot A \cdot v_0 + B + \sqrt{-Z}}{2 \cdot A \cdot v_0 + B - \sqrt{-Z}} \right).$$

Da v_0 gleich 0 km/h ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Delta t_I &= \frac{1}{\sqrt{-Z}} \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot A \cdot v_1 + B - \sqrt{-Z}}{2 \cdot A \cdot v_1 + B + \sqrt{-Z}} \cdot \frac{B + \sqrt{-Z}}{B - \sqrt{-Z}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{432,4}} \cdot \ln \left(\frac{-2 \cdot 0,02854 \cdot 57 - 7,29087 - \sqrt{432,4}}{-2 \cdot 0,02854 \cdot 57 - 7,29087 + \sqrt{432,4}} \cdot \frac{-7,29087 + \sqrt{432,4}}{-7,29087 - \sqrt{432,4}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{432,4}} \cdot \ln \left(\frac{-31,3387}{10,2498} \cdot \frac{13,5034}{-28,0851} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{432,4}} \cdot \ln 1,47005 \\ \Delta t_I &= 0,018529 \text{ h} = 66,7 \text{ s.}\end{aligned}$$

Damit ist es möglich, den zugehörigen Beschleunigungsweg in Intervall I zu berechnen.

$$\begin{aligned}\Delta s_I &= \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \left[\left(\ln \frac{A \cdot v_1^2 + B \cdot v_1 + C}{A \cdot v_0^2 + B \cdot v_0 + C} \right) - B \cdot \Delta t \right] \\ &= \frac{1}{-2 \cdot 0,02854} \cdot \left[\left(\ln \frac{-0,02854 \cdot 57^2 - 7,29087 \cdot 57 + 3321,61}{3321,61} \right) + 7,29087 \cdot 0,018529 \right] \\ &= -17,5193 \cdot [\ln(0,84697) + 0,13509]\end{aligned}$$

$$\Delta s_I = 0,543 \text{ km} = 543 \text{ m}$$

Nun kann **Intervall II** betrachtet werden. Hier ist die Diskriminante Z größer als 0 (siehe Tabelle 13.6). Für die Zeitdauer des Beschleunigungsvorganges im Geschwindigkeitsbereich II gilt somit⁵:

$$\begin{aligned}\Delta t_{II} &= \frac{2}{\sqrt{Z}} \cdot \left(\arctan \frac{2 \cdot A \cdot v_1 + B}{\sqrt{Z}} - \arctan \frac{2 \cdot A \cdot v_0 + B}{\sqrt{Z}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2814,7}} \cdot \left(\arctan \frac{2 \cdot 0,51017 \cdot 80 - 112,24972}{\sqrt{2814,7}} - \arctan \frac{2 \cdot 0,51017 \cdot 57 - 112,24972}{\sqrt{2814,7}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2814,7}} \cdot \left(\arctan \frac{-30,62252}{\sqrt{2814,7}} - \arctan \frac{-54,09034}{\sqrt{2814,7}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2814,7}} \cdot (\arctan(-0,577198) - \arctan(-1,019539))\end{aligned}$$

$$\Delta t_{II} = 0,010238 \text{ h} = 36,9 \text{ s.}$$

⁵Die Winkelfunktionen müssen im „RAD“-Modus berechnet werden!

Der dazugehörige Beschleunigungsweg ergibt sich aus derselben Beziehung wie bei dem vorhergehenden Intervall I.

$$\begin{aligned}
 \Delta s_{II} &= \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \left[\left(\ln \frac{A \cdot v_1^2 + B \cdot v_1 + C}{A \cdot v_0^2 + B \cdot v_0 + C} \right) - B \cdot \Delta t \right] \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 0,51017} \cdot \left[\left(\ln \frac{0,51017 \cdot 80^2 - 112,24972 \cdot 80 + 7553,65}{0,51017 \cdot 57^2 - 112,24972 \cdot 57 + 7553,65} \right) + 112,24972 \cdot 0,010238 \right] \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 0,51017} \cdot \left[\left(\ln \frac{1838,7604}{2812,95829} \right) + 112,24972 \cdot 0,010238 \right] \\
 &= 0,98007 \cdot (-0,425145 + 1,14921)
 \end{aligned}$$

$$\Delta s_{II} = 0,7096 \text{ km} \approx 710 \text{ m}$$

Die Vorgehensweise im **Intervall III** ist analog zu Intervall II.

$$\begin{aligned}
 \Delta t_{III} &= \frac{2}{\sqrt{Z}} \cdot \left(\arctan \frac{2 \cdot A \cdot v_1 + B}{\sqrt{Z}} - \arctan \frac{2 \cdot A \cdot v_0 + B}{\sqrt{Z}} \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{586,3}} \cdot \left(\arctan \frac{2 \cdot 0,21479 \cdot 100 - 65,87498}{\sqrt{586,3}} - \arctan \frac{2 \cdot 0,21479 \cdot 80 - 65,87498}{\sqrt{586,3}} \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{586,3}} \cdot \left(\arctan \frac{-22,91698}{\sqrt{586,3}} - \arctan \frac{-31,50858}{\sqrt{586,3}} \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{586,3}} \cdot (\arctan(-0,946449) - \arctan(-1,301274))
 \end{aligned}$$

$$\Delta t_{III} = 0,013024 \text{ h} = 46,9 \text{ s.}$$

13 Fahrzeitermittlung

Der Beschleunigungsweg in Intervall III wird abschließend ermittelt.

$$\begin{aligned}\Delta s_{III} &= \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \left[\left(\ln \frac{A \cdot v_1^2 + B \cdot v_1 + C}{A \cdot v_0^2 + B \cdot v_0 + C} \right) - B \cdot \Delta t \right] \\ &= \frac{1}{2 \cdot 0,21479} \cdot \left[\left(\ln \frac{0,21479 \cdot 100^2 - 65,87498 \cdot 100 + 5733,36}{0,21479 \cdot 80^2 - 65,87498 \cdot 80 + 5733,36} \right) + 65,87498 \cdot 0,013024 \right] \\ &= \frac{1}{2 \cdot 0,21479} \cdot \left[\left(\ln \frac{1293,762}{1838,2576} \right) + 65,87498 \cdot 0,013024 \right] \\ &= 2,327855 \cdot (-0,351264 + 0,857956)\end{aligned}$$

$$\Delta s_{III} = 1,1795 \text{ km} \approx 1180 \text{ m}$$

Die Teilergebnisse für die drei Intervalle sind in Tabelle 13.7 zusammengefasst. Die erzielten Ergebnisse sind mit den bereits mit Hilfe anderer Methoden berechneten Wegen und Zeiten vergleichbar.

Tabelle 13.7: Zusammenfassung der mit Hilfe des Integrationsverfahrens nach Jentsch erzielten Teilergebnisse

	Beschleunigungszeit	Beschleunigungsweg
Intervall I	66,7 s	543 m
Intervall II	36,9 s	710 m
Intervall III	46,9 s	1180 m
Summe	150,5 s	2433 m

14 Verständnisfragen

Komplex „Fahrzeitberechnung“

1. Worin liegt die Herausforderung bei der Berechnung von Fahrzeiten von Eisenbahnfahrzeugen?
2. Unter welchen Bedingungen existiert eine geschlossene Lösung der Integrale für geschwindigkeitsabhängige Beschleunigungsvorgänge?
3. Welche Arten der mittleren Beschleunigung kennen Sie und wann wird welche Art in der Fahrdynamik genutzt?
4. Wovon ist die mittlere Beschleunigung bei einer Beschleunigungsprozess abhängig?
5. Was ist unter dem Konzept der „Linearisierung“ im Kontext der Fahrzeitberechnung zu verstehen?
6. Welche Grundidee liegt den Schrittverfahren zur Fahrzeitberechnung zugrunde?
7. Welche Schrittverfahren für fahrdynamische Berechnungen gibt es und was sind jeweils ihre Vor- und Nachteile?
8. Was ist der Grundgedanke, der dem Integrationsverfahren nach Jentsch zugrunde liegt?



Arbeitsmaterialien

Zu den in diesem Lehrbrief abgehandelten Themenkomplexen stehen vertiefend und begleitend folgende weitere Materialien zur Verfügung:

1. Foliensätze:
 - Folien_FD_21_Fahrzeit.pdf
2. Testressourcen in OPAL:
 - Selbsttest „Fahrzeit“
3. Rechenübungen „Übungskomplex Fahrzeit“ im Übungsheft auf den Seiten 34-36
4. Formelsammlung S. 47-58

Literaturverzeichnis

- [1] Jentsch, Eberhard: „Fahrzeitermittlung mit neuen Elementen der Zugfahrtsimulation“, in: *ZEV Rail - Glasers Annalen*, Jg. 127 (2003), Nr. 2, S. 66–71.
- [2] Wende, Dietrich: *Fahrdynamik des Schienenverkehrs*, 1. Auflage, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2003.