Schulz, Luca Etienne 24. November 2021

Hausaufgaben vom 11.11. zum 25.11.2021

9e)

vollständiges Repräsentantensystem

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{G} \neq \emptyset$ und R_u die Äquivalenzklasse zu $u \in \mathcal{G}$. Jedes Element $x \in R_u$, heißt ein Repräsentant der Äquivalenzklasse R_u. Entnimmt man jeder Äquivalenzklasse genau ein Element, so erhält man ein vollständiges Repräsentantensystem $\mathcal{R}$. D. h. $\mathcal{R}$ erfüllt

$$\forall u \in \mathcal{G} : \exists! \, x \in R_u \cap \mathcal{R}$$

I.d.R. kann man unterschiedliche Repräsentativsysteme wählen.

Quotientenmenge

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{G}$.
Die Menge aller Äquivalenzklassen

$$\mathcal{G}/\sim \; := \{R_x \mid x \in \mathcal{G}\}$$

heißt Quotientenmenge (von $\mathcal{G}$ bezüglich $\sim$).
Ist $\mathcal{R}$ ein vollständiges Repräsentantensystem, so gilt

$$\mathcal{G}/\sim \; = \{R_x \mid x \in \mathcal{R}\}$$

Bemerkung:

Die Quotientenmenge ist keine Teilmenge von G, sondern von der Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$. Es gilt

$$R_u \subseteq G \wedge G/\sim \subseteq \mathcal{P}(G)$$

9f)

Division mit Rest

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$. Für jede ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ gibt es genau eine ganze Zahl $q \in \mathbb{Z}$ und eine natürliche Zahl $r \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq r < n$, sodass $x = qn + r$ gilt.
Man sagt:

> x hat bei Division durch n den Rest r.

Um auszudrücken, dass man den Rest einer ganzen Zahl x berechnet, verwendet man den modulo mit dem Teiler n, geschrieben

$$x \equiv r \mod n$$

> x ist kongruent r modulo n

3a) (Skript ab S.58 Satz 2.6)

Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 1$ eine fix (aber beliebig) gewählte natürliche Zahl. Kongruenz $\equiv$ bezüglich dem Modus m ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis Reflexivität

Da $m | 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}: m | \underbrace{(x-x)}_{=0}$. Also $x \equiv x \mod m \; \forall x \in \mathbb{Z}$.

Somit folgt die Reflexivität.

Beweis Symmetrie

Angenommen $x \equiv y \mod m$. Also $m(x-y)$, dann teilt m aber auch $-(x-y)$, d.h. $m | (y-x)$.

Somit gilt $y \equiv x \mod m$ und die Symmetrie ist nachgewiesen.

Beweis Transitivität

Gilt $x \equiv y \mod m$ sowie $y \equiv z \mod m$, so bedeutet das $m | (x-y)$ und $m(y-z)$. Somit teilt m auch die Summe von $(x-y)$ und $(y-z)$, also $m | \underbrace{((x-y)+(y-z))}_{=x-z}$, d.h. $m | (x-z)$.

Somit folgt $x \equiv z \mod m$ und die Transitivität ist bewiesen.

L. Schulz