

Lehrveranstaltung
Partikelmesstechnik

Folien zur Vorlesung

NUR ZUM PERSÖNLICHEN GEBRAUCH!

PD Dr.-Ing. habil. Frank Babick, 1. April 2024

3. Kennzeichnung von Merkmalsverteilungen

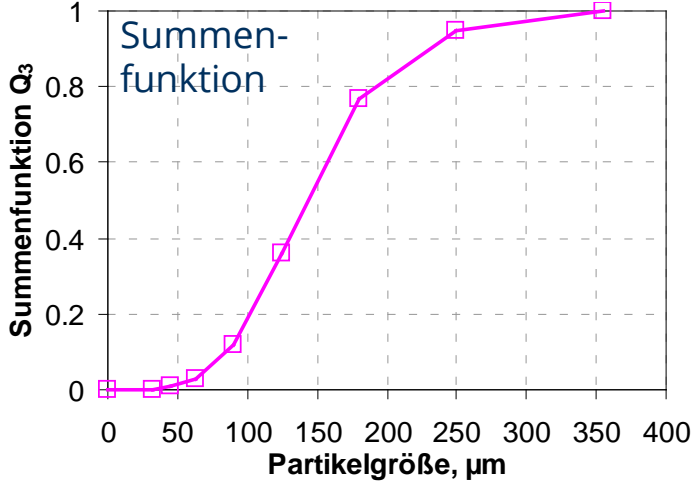
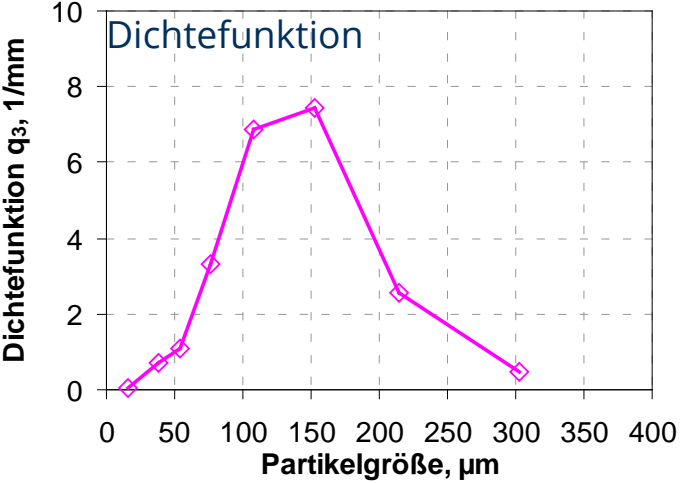
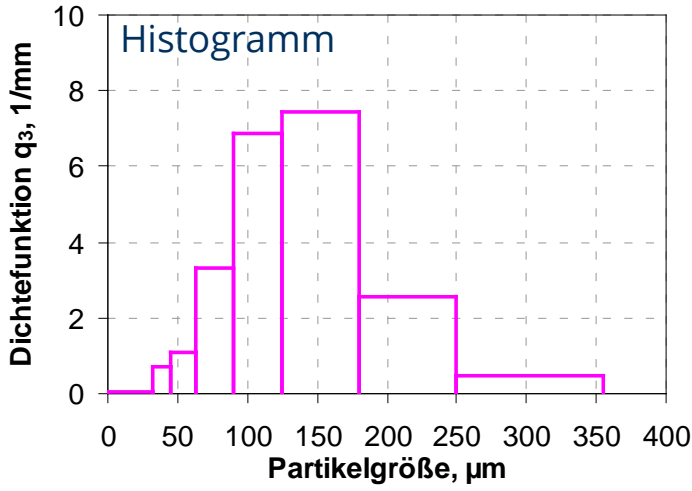
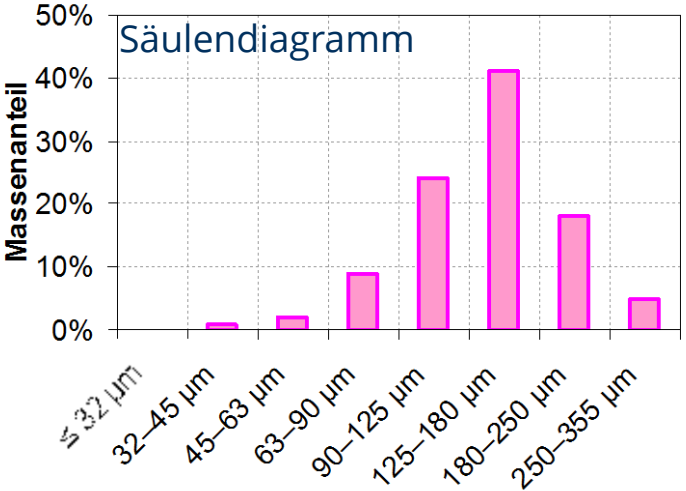
Lernziele zu Kapitel 3

- Wissen:
 - Unterscheidung zwischen den verschiedenen Typen und grafischen Darstellungsformen von Partikelgrößenverteilungen
 - statistische Kennzahlen zur Beschreibung von Verteilungsfunktionen
 - Kenntnis ausgewählter statistischen Verteilungsgesetze
 - normierte und nicht-normierte Partikelgrößenverteilungen
 - Umgang mit zweidimensionalen Verteilungen
- Fähigkeiten:
 - Bestimmung charakteristischer Verteilungsparameter aus gemessenen Verteilungsfunktionen
 - Diskussion von Unterschieden zwischen den mit verschiedenen Mengenarten gewichteten Partikelgrößenverteilungen
 - Darstellung von Partikelgrößenverteilungen mithilfe von statistischen Verteilungsgesetzen

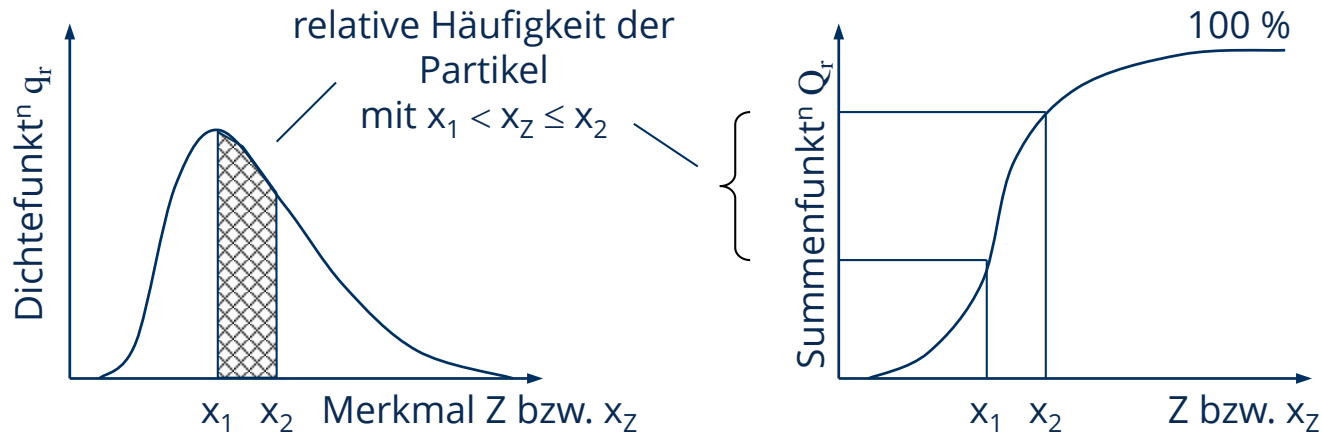
3.1 Kennzeichnung von Merkmalsverteilungen

– grafische Darstellung –

Partikelgrößenverteilung - Darstellungsarten



Partikelgrößenverteilung (PGV) - Definition



Definition:
$$Q_r(x) = \frac{\{\text{Partikel} \leq x\}}{\{\text{alle Partikel}\}} = \int_{x_{\min}}^x q_r(\xi) d\xi$$

- „relative Häufigkeit“ bezieht sich auf eine kumulierbare Eigenschaft des Partikelsystems (Anzahl, Volumen, Masse, Lichtextinktion, ...)
→ wird charakterisiert durch Mengenartindex „r“

Dichte- und Summenfunktion der PGV

fraktioneller Mengenanteil:
(für Größenklasse k)

$$\Delta Q_{r,k} = \frac{M_{r,k}}{\sum_j M_{r,j}}$$

M_0 ... Anzahl
 M_3 ... Volumen/Masse

Summenfunktion:
(an oberer Klassengrenze x_k)

$$Q_{r,k} = \sum_{j=1}^k \Delta Q_{r,j}$$

$$Q_r(x_0) = 0 \quad Q_r(x_N) = 1$$

Rückstandsfunktion:
(an unterer Klassengrenze x_{k-1})

$$R_{r,k} = 1 - Q_{r,k}$$

bzw. $R_r(x) = 1 - Q_r(x)$

Dichtefunktion:

$$q_r = \frac{dQ_r}{dx}$$

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} q_r(x) dx = 1$$

diskretisiert:
(dargestellt über Klassenmitte \bar{x}_k)

$$\bar{q}_{r,k} = \frac{\Delta Q_{r,k}}{\Delta x_k}$$

transformierte Dichtefkt.:

$$q_r^* = \frac{dQ_r}{d \ln x} = x \cdot q_r$$

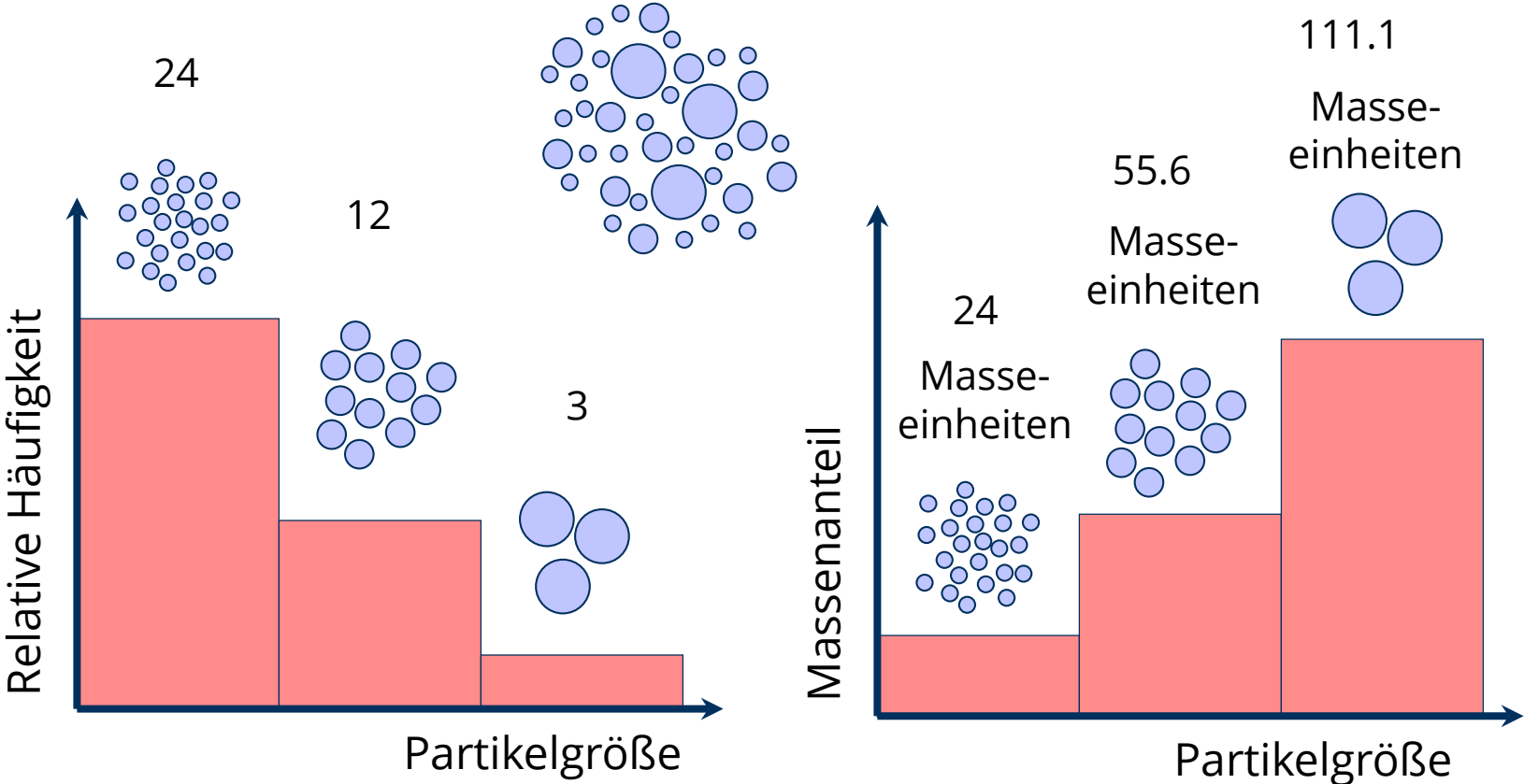
$$\int_{\ln x_{\min}}^{\ln x_{\max}} q_r^*(\xi) d\xi = 1$$

geomtr. Reihe von x_k :

$$\bar{q}_{r,k}^* \propto \Delta Q_{r,k}$$

(dargestellt über geom. Klassenmitte)

Mengenart



Mengenart

- Mengenartfunktion

- werden Partikel nicht über ihre Anzahl quantifiziert, so ist der Beitrag des einzelnen Partikels zur Gesamtmenge der Partikel größenabhängig
- z.B. bei Oberflächenwichtung in Form einer quadratischen Funktion
- diese Abhängigkeit wird von der Mengenartfunktion erfasst $A = \kappa_A(x)$

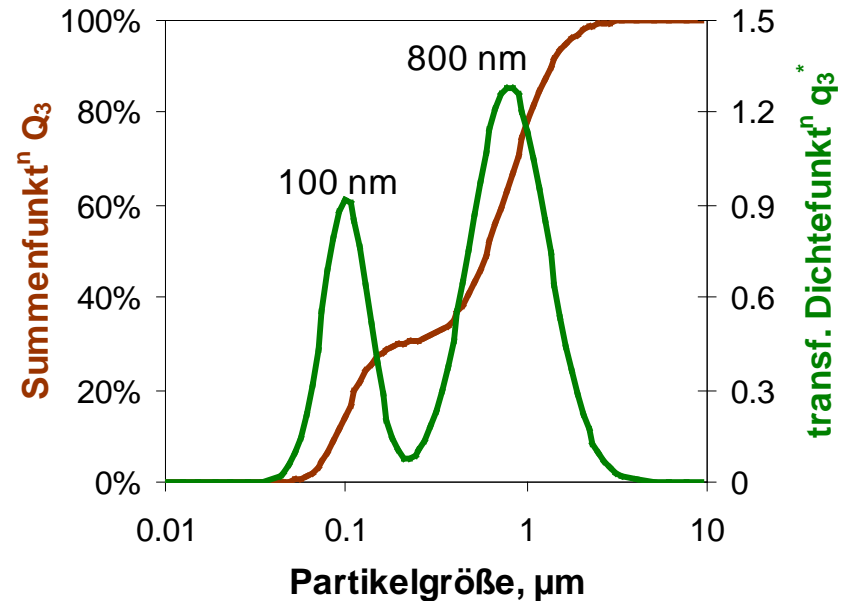
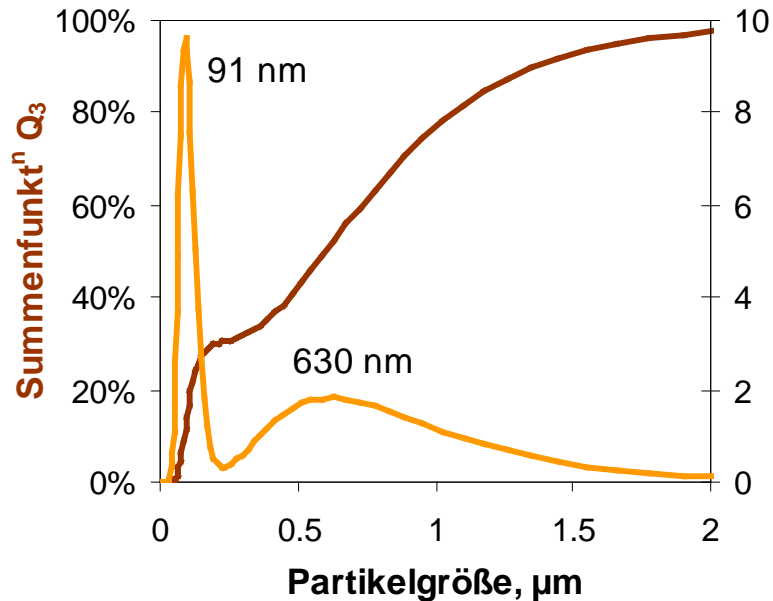
- Beispiele für Mengenarten

- Gewicht von Partikeln einheitl. Dichte: $\kappa_{\text{weight}}(x) \sim x^3$ $q_{\text{weight}}(x) = q_3(x)$
- Röntgenschwächung an den Partikeln: $\kappa_{\text{Xray}}(x) \sim x^3$ $q_{\text{Xray}}(x) = q_3(x)$
- Lichtextinktion an opaken μm -Partikeln: $\kappa_{\text{ext}}(x) \sim x^2$ $q_{\text{ext}}(x) = q_2(x)$
- Lichtstreuung an Nanopartikeln $\kappa_{\text{sca}}(x) \sim_{x > 1\mu\text{m}} x^6$ $q_{\text{int}}(x) = q_6(x)$
- Brechungsindexinkrement von Nanopartikeln: $\kappa_{\text{RI}}(x) \sim_{x < 0.1\mu\text{m}} x^3$ $q_{\text{RI}}(x) = q_3(x)$

- Mengenartkonversion von A nach B

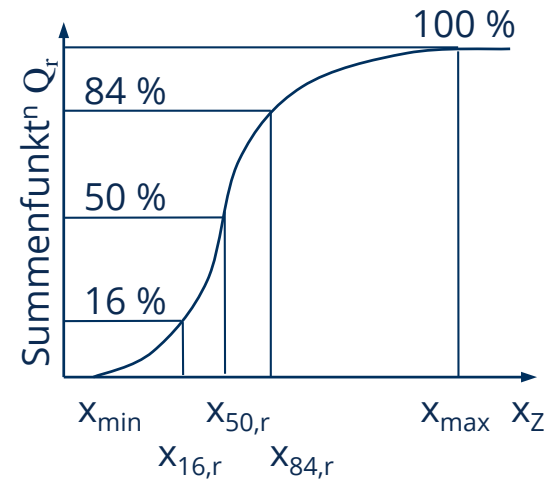
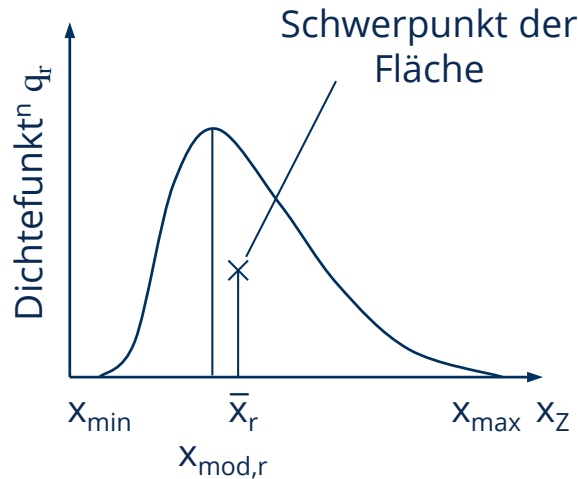
$$q_B(x) = \frac{\kappa_B(x)}{\kappa_A(x)} q_A(x) \bigg/ \int \frac{\kappa_B(x)}{\kappa_A(x)} dQ_A$$

Lineare oder logarithmische Abszisse?



- breite Verteilungen: logarithmische Abszisse aussagekräftiger
→ transformierte Dichtefunktion q^*
- aber: Maxima von q^* haben andere Bedeutung als für q (größere Partikel werden überbetont)

Charakteristische Verteilungsparameter



- aus Dichtefunktion:
 - Modalwert(e) $x_{\text{mod},r}$
 - Mittelwerte
 - arithm.: $\bar{x}_{1,r} = \bar{x}_r = \int x q_r(x) dx$
 - harmon.: $\bar{x}_{-1,r} = 1 / \int x^{-1} q_r(x) dx$
 - Standardabw.: $s_r^2 = \int (x - \bar{x}_{1,r})^2 q_r(x) dx$
- aus Summenfunktion:
 - Medianwert $x_{50,r}$
 - Quantil-Paare \rightarrow Verteilungsbreite
 - z.B. $x_{16,r}$ & $x_{84,r}$
 - z.B. $x_{10,r}$ & $x_{90,r}$

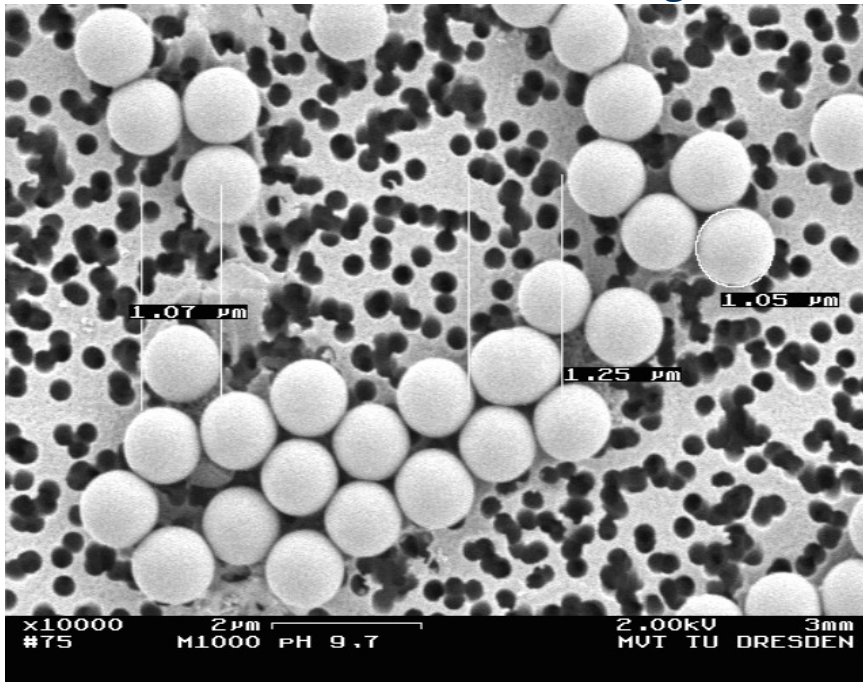
Charakteristische Verteilungsparameter

- Modalwert $x_{\text{mod},r}$:
Der Modalwert beschreibt die häufigste(n) Partikelfraktion(en) und erlaubt Aussagen über deren Veränderung. Von seltenen Partikelfraktionen wird er nicht beeinflusst; für seine Ermittlung muss man die Größenverteilung an ihren Rändern nicht genau auflösen. Vergleiche der auf dieselbe Mengentyp bezogenen Modalwerte verschiedener Geräte zeigen die Korrelation der Äquivalentdurchmesser.
- Mittelwerte $\bar{x}_{k,r}$:
Mittelwerte enthalten stets Aussagen über die gesamte Verteilung; sie zeigen sowohl Änderungen in den Hauptfraktionen als auch an den Rändern an. In arithmetischen Mitteln werden die feinen und groben Fraktionen gleich gewichtet. Quadratische Mittelwerte betonen die Präsenz von Grobpartikeln, während harmonische Mittelwerte vor allem von den feinen Fraktionen beeinflusst werden. Für die Bestimmung von Mittelwerten muss die Dichtefunktion $q_r(x)$ über den gesamten Größenbereich, bekannt sein.
- Medianwert $x_{50,r}$:
Der Medianwert ist ein zweckmäßiges Maß für die mittlere Lage der PGV. Zwar müssen für seine Bestimmung die Mengenanteile der feinsten und größten Partikel korrekt ermittelt werden; jedoch nicht ihre Partikelgrößen. Globale Änderungen am Partikelsystem werden vom Medianwert gut wiedergegeben.
- 90%-Quantil $x_{90,r}$:
Dieses grobe Quantil ist oft ein geeigneter Parameter um die Veränderungen am groben Ende der Größenverteilung zu überwachen. Es ist zwar kein Ersatz für die maximale Partikelgröße, lässt sich aber mit höherer Zuverlässigkeit als die maximale Partikelgröße oder $x_{99,r}$ ermitteln. Das gilt insbesondere bei Dateninversion im Fall spektroskopische Messprinzipien.

Enge und breite Größenverteilungen

monodispers

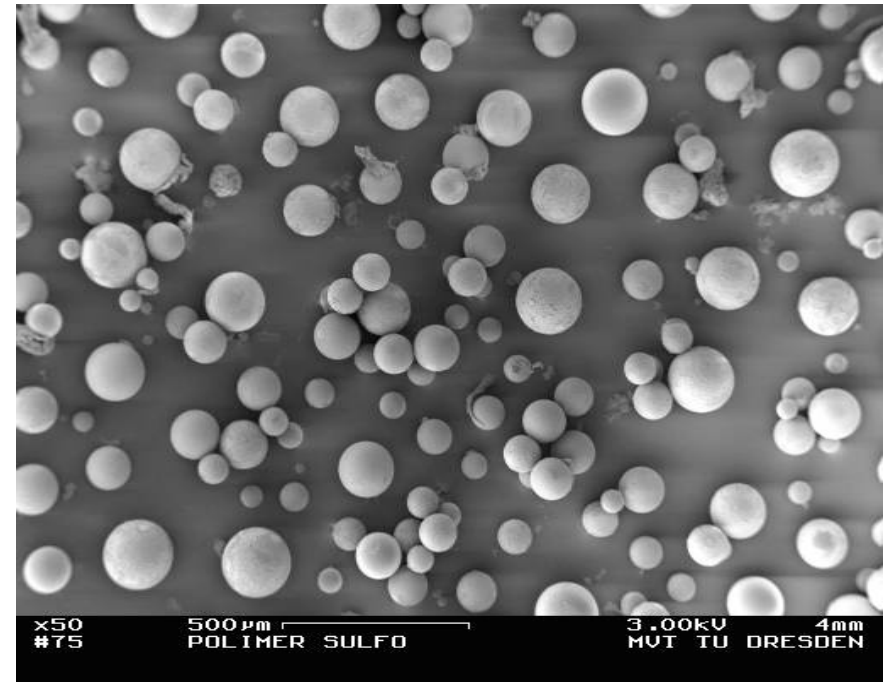
(einheitliche Größe bzw. sehr eng verteilt)



Standardabweichung: $s_r \leq 0.05 \cdot \bar{x}_{1,r}$

polydispers

(breit verteilt)



Standardabweichung: $s_r > 0.05 \cdot \bar{x}_{1,r}$

3.2 Kennzeichnung von Merkmalsverteilungen – Momente und mittlere Partikelgrößen –

Momente einer Verteilung

- Definitionen

- k -tes Moment von $q_r(x)$

$$M_{k,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^k \cdot q_r(x) dx \quad (\text{Erwartungswert von } x^k)$$

- unvollständ. k -tes Moment

$$M_{k,r}(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} x^k \cdot q_r(x) dx$$

- zentrales k -tes Moment

$$m_{k,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \bar{x}_{1,r})^k \cdot q_r(x) dx$$

- allgemeine Betrachtung

- momentenerzeugenden Fkt.

$$\mu_r(t) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} e^{t \cdot x} \cdot q_r(x) dx$$

- Ableitg. des k -ten Moments

$$M_{k,r} = \left. \frac{\partial^k \mu_r}{\partial t^k} \right|_{t=0}$$

- Ableitg. der k -ten Kumulante

$$\kappa_{k,r} = \left. \frac{\partial^k \ln \mu_r}{\partial t^k} \right|_{t=0}$$

- Umrechnung der Momente:

$$M_{k,r} = \frac{M_{k+r-e,e}}{M_{r-e,e}}$$

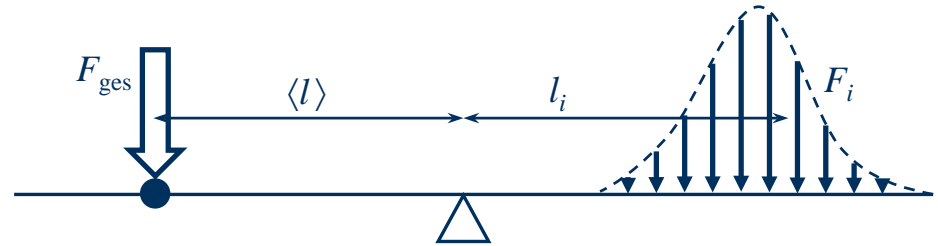
$$M_{k,r} = \frac{M_{k+r,0}}{M_{r,0}}$$

Zur Veranschaulichung von Momenten

Deutung am drehbar gelagerten Balken

- Drehmoment für räumlich verteilte Kräfte (= Kraft \times Hebelarm):
Das resultierende Drehmoment für die Rotation um eine Achse ergibt sich durch Aufsummieren der Produkte aus Teilkraft F_i und jeweiliger Hebellänge l_i ; das gleiche Drehmoment wirkt, wenn die gesamte Kraft im mittleren Hebelabstand $\langle l \rangle$ angreift.

$$\langle l \rangle \cdot \sum F_i = \sum l_i \cdot F_i = \int l dF$$



- Trägheitsmoment für räumlich verteilte Massen (= Masse \times Achsenabstand²)
Die kinetische Energie einer bewegten Masse entspricht der Hälfte des Produktes aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat. Rotiert die Masse um eine Achse, kann ihre Geschwindigkeit als Produkt von Winkelgeschwindigkeit und Achsenabstand berechnet werden. Die kinetische Energie eines Körpers resultiert folglich aus der Winkelgeschwindigkeit und der Summe aus Teilmassen m_i und den quadrierten Achsenabständen r_i , dem Trägheitsmoment.

$$I = \langle r^2 \rangle \cdot \sum m_i = \sum r_i^2 \cdot m_i = \int r^2 dm$$

Momente - Interpretationen

- $M_{1,0}$ anzahlgewichteter Erwartungswert von x (der Länge)
z.B. mittlere Länge/Größe bei Mikroskopauszählung oder FBRM
- $M_{1,2}$ flächengewichteter Erwartungswert von x (der Länge)
- $M_{1,3}$ volumengewichteter Erwartungswert von x (der Länge),
z.B. mittlere Größe bei Siebanalyse
- $M_{2,0}$ anzahlgewichteter Erwartungswert von x^2 (der Fläche)
z.B. mittlerer Extinktionsquerschnitt bei optischen Partikelzählern ($x \gg 1 \mu\text{m}$)
- $M_{2,2}$ flächengewichteter Erwartungswert von x^2 (der Fläche),
z.B. Mittelwert der Extinktionsfläche bei Dynamischer Extinktion ($x \gg 1 \mu\text{m}$)
- $M_{-1,3}$ volumengewichteter Erwartungswert von x^{-1} (der volumenspezifischen Fläche),
z.B. mittlere volumenspezifische Oberfläche
- $M_{3,3}$ volumengewichteter Erwartungswert von x^3 (des Volumens),
z.B. effektives Volumen beim Feststoffmischen
- $M_{-1,6}$ volumenquadratgewichteter Erwartungswert von x^{-1} ,
z.B. mit DLS bestimmter, effektiver Diffusionskoeffizient ($x \leq 100 \text{ nm}$)
- $M_{2,6}$ volumenquadratgewichteter Erwartungswert von x^2 ,
z.B. mit opt. Zentrifugationsanalyse bestimmte mittlere Sinkgeschwindigkeit
nicht-absorbierender Nanopartikel ($x \leq 100 \text{ nm}$)

Mittlere Partikelgrößen

- allgemeines Potenzmittel $\bar{x}_{k,r} = \sqrt[k]{M_{k,r}} = \sqrt[k]{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^k \cdot q_r(x) dx}$ (Höldersche Mittelwert)
- Beispiele
 - harmonisches Mittel $\bar{x}_{-1,r} = 1/M_{-1,r} = 1/\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} q_r(x)/x dx = 1/\sum_j \frac{\Delta Q_{r,j}}{\bar{x}_j}$
 - geometrisches Mittel $\bar{x}_{0,r} = \sqrt[0]{M_{0,r}} = \exp\left(\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \ln x \cdot q_r(x) dx\right) = \prod_j \bar{x}_j^{\Delta Q_{r,j}}$
 - arithmetisches Mittel $\bar{x}_{1,r} = M_{1,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x \cdot q_r(x) dx = \sum_j \bar{x}_j \Delta Q_{r,j}$
 - quadratisches Mittel $\bar{x}_{2,r} = \sqrt{M_{2,r}} = \sqrt{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 \cdot q_r(x) dx} = \sqrt{\sum_j \bar{x}_j^2 \Delta Q_{r,j}}$
 - kubisches Mittel $\bar{x}_{3,r} = \sqrt[3]{M_{3,r}} = \sqrt[3]{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^3 \cdot q_r(x) dx} = \sqrt[3]{\sum_j \bar{x}_j^3 \Delta Q_{r,j}}$

SAUTER-Durchmesser

Partikelsystem

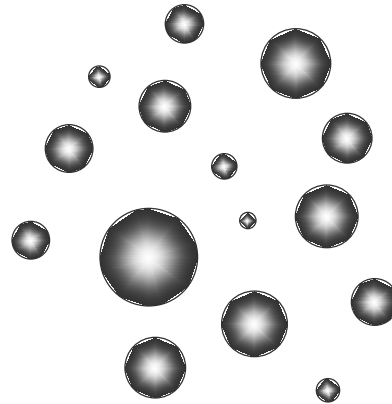


Volumen V_{disp}

Oberfläche S_{disp}

$$\text{vol.-spez. OF } S_V = \frac{S_{\text{disp}}}{V_{\text{disp}}}$$

volumengleiche Kugeln



Volumen V_{disp}

Oberfläche $\Psi \cdot S_{\text{disp}}$

vol.-spez. OF $\Psi \cdot S_V$

Kugel mit x_{ST}



$$x_{\text{ST}} = \frac{\int x_V^3 dQ_0}{\int x_V^2 dQ_0} = \frac{6}{\Psi \cdot S_V}$$

Volumen $\frac{\pi}{6} \cdot x_{\text{ST}}^3$

Oberfläche $\pi \cdot x_{\text{ST}}^2$

vol.-spez. OF $\Psi \cdot S_V = \frac{6}{x_{\text{ST}}}$

Sauter-Durchmesser = spezieller Mittelwert der Partikelgrößenverteilung,
unmittelbar mit der volumenspezifischen Oberfläche verbunden

Beschreibung von Breite und Form einer Verteilung

- Verteilungsbreite

- Varianz:

$$s_r^2 = m_{2,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \bar{x}_{1,r})^2 \cdot q_r(x) dx \quad m_{2,r} = M_{2,r} - M_{1,r}^2$$

- Standardabweichung:

$$s_r = \sqrt{m_{2,r}} = \sqrt{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \bar{x}_{1,r})^2 \cdot q_r(x) dx}$$

- geometr. Std.-abw.:

$$\sigma_{g,r} = \sqrt{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (\ln x / \bar{x}_{0,r})^2 \cdot q_r(x) dx}$$

- Form der Verteilung

- Schiefe:

$$\gamma_1 = \frac{m_{3,r}}{m_{2,r}^{3/2}} = \frac{1}{s_r^3} \cdot \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \bar{x}_{1,r})^3 \cdot q_r(x) dx$$

$\gamma_1 < 0 \rightarrow$ linksschief, $\gamma_1 = 0 \rightarrow$ symmetrisch, $\gamma_1 > 0 \rightarrow$ rechtsschief

- Wölbung:

$$w = \frac{m_{4,r}}{m_{2,r}^2} = \frac{1}{s_r^4} \cdot \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \bar{x}_{1,r})^4 \cdot q_r(x) dx = \frac{\kappa_{4,r}}{\kappa_{2,r}^2} + 3$$

- Exzesswölbung:

$$\gamma_2 = w - 3$$

$\gamma_2 < 0 \rightarrow$ flachgipfelig, $\gamma_2 = 0 \rightarrow$ normalgipfelig, $\gamma_2 > 0 \rightarrow$ steilgipfelig

3.3 Kennzeichnung von Merkmalsverteilungen

– *mathematische Verteilungsfunktionen* –

Normalverteilung (NVT)

Gauß-Verteilung, Gaußsche Glockenkurve

- Dichtefunktion:
$$nd(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right)$$

Parameter: arithmetischer Mittelwert \bar{x} und Standardabweichung σ

- Summenfunktion:
$$ND(x) = \int_{-\infty}^x nd(\xi) d\xi$$

- Median- und Modalwert $x_{50} = x_{\text{mod}} = \bar{x}$

- Schiefe und Exzesswölbung: $\gamma_1 = 0 \quad \gamma_2 = 0$

- Anmerkungen

- Definitionsbereich umfasst negative Partikelgrößen
- Verteilung von Messwerten, z. B. bei der Partikelgrößenanalyse
- selten genutzt für PGV^{en} (nur bei engen Verteilungen)
- negative Momente nicht unbedingt konvergent

Logarithmische Normalverteilung (LNVT)

log-normal distribution

- Dichtefunktion:
$$lnd(x) = \frac{1}{\sigma_{\ln} \cdot x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{\ln}} \ln \frac{x}{x_{50}}\right)^2\right)$$

Parameter: Medianwert x_{50} und logarithmische Standardabweichung σ_{\ln}

- Summenfunktion:
$$LND(x) = \int_0^x \ln d(\xi) d\xi$$

- Mittel, Modalwert, Momente: $\bar{x}_{1,r} = x_{50,r} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma_{\ln}^2}$ $x_{\text{mod}} = x_{50} \cdot e^{-\sigma_{\ln}^2}$ $M_k = x_{50}^k \cdot e^{\frac{1}{2}k^2\sigma_{\ln}^2}$

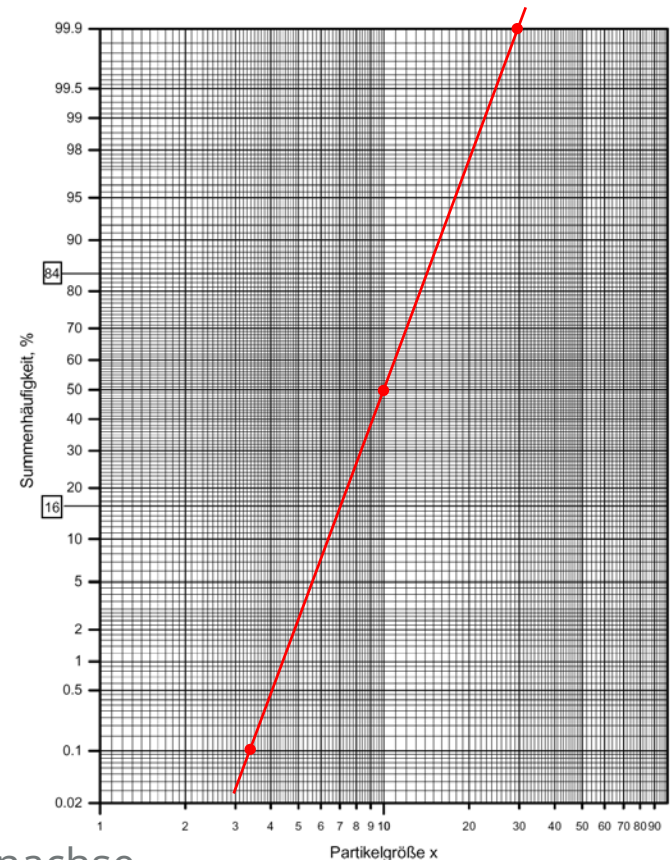
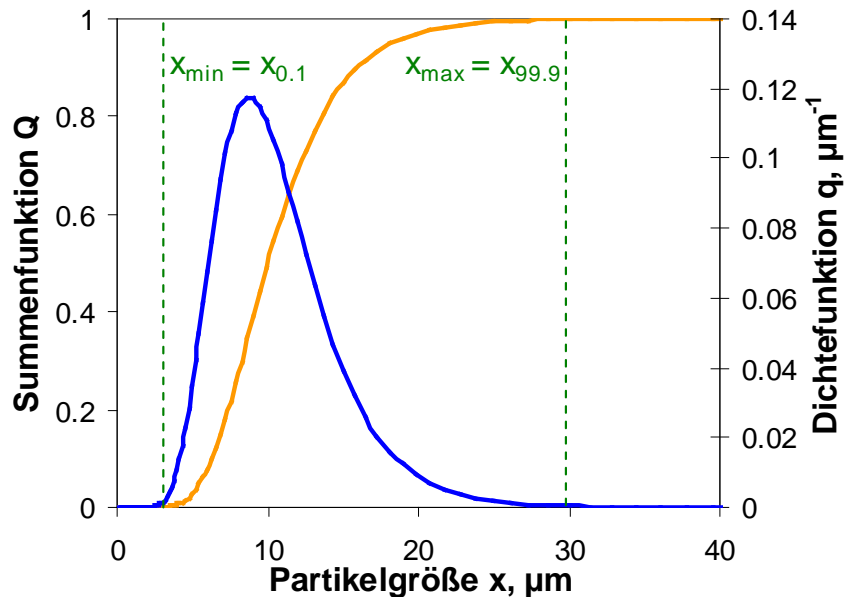
- Std.-abw., Schiefe & Exzess: $s = \bar{x} \sqrt{e^{\sigma_{\ln}^2} - 1}$ $\gamma_1 = \left(2 + e^{\sigma_{\ln}^2}\right) \cdot \sqrt{e^{\sigma_{\ln}^2} - 1}$
 $\gamma_2 = e^{4\sigma_{\ln}^2} + 2e^{3\sigma_{\ln}^2} + 3e^{2\sigma_{\ln}^2} - 6$

- Anmerkungen

- einfache Umrechnung der Mengengrößen und Momentenberechnung
- alle Momente sind berechenbar
- gute Approximation für viele technische Partikelsysteme
- günstig für Modellierung von partikeltechnologischen Prozessen

Logarithmische Normalverteilung (LNVT)

Darstellung im log. Wahrscheinlichkeitsnetz



- logarithmisches Wahrscheinlichkeitspapier:
Umkehrfunktion von Φ vs. logarithmische Größenachse
- ermöglicht:
 - Test, ob eine exp. bestimmte Summenfunktion als LNVT erklärbar
 - Parametrierung dieser der LNVT, wobei $\sigma_{\ln} = \ln x_{84}/x_{16}$

RRSB-Verteilung (n. ROSIN, RAMMLER, SPERLING & BENNETT)

WEIBULL-Verteilung

- Dichtefunktion:
$$rrsb(x) = \frac{p}{x_{63}} \cdot \left(\frac{x}{x_{63}}\right)^{p-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{x_{63}}\right)^p\right)$$

Parameter: 63%-Quantil x_{63} und Verteilungsformparameter p

- Summenfunktion:
$$RRSB(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{x_{63}}\right)^p\right)$$
- Median, Mittel+Modalwert:
$$x_{50} = \sqrt[p]{\ln 2} \cdot x_{63} \quad \bar{x} = x_{63} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right) \quad x_{\text{mod}} = x_{63} \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{1/p}$$
- Varianz, Momente:
$$s^2 = x_{63}^2 \cdot \left(\Gamma\left(\frac{2}{p} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)^2\right) \quad M_k = x_{63}^k \cdot \Gamma\left(\frac{k}{p} + 1\right)$$

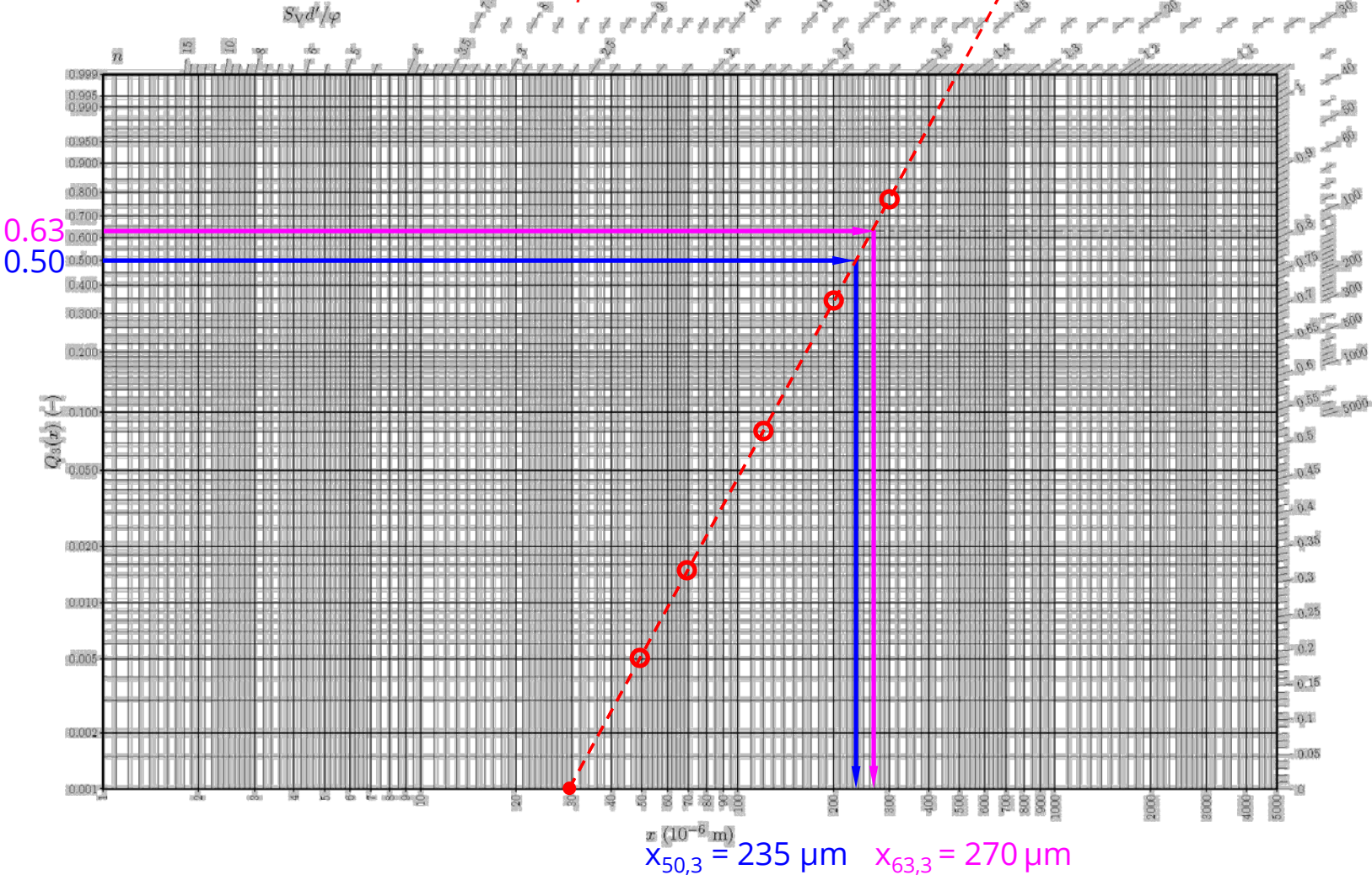
- Anmerkungen

- Form (z.B. Schiefe und Exzesswölbung) stark abhängig vom Formparameter p
- Mengenartkonversion von $q_3(x)$ in $q_0(x)$ nur für $p \geq 3$
- gute Approximation für $q_3(x)$ von Zerkleinerungsprodukten (Mahlprozesse)
- grafische Regression im RRSB-Netz

RRSB-Papier

$S_V \cdot x_{63}/f = 7.9$

$p = 3.15$



GGG-Verteilung (n. Gates, GAUDIN & SCHUHMANN)

Potenzverteilung

- Dichtefunktion:
$$ggs(x) = \frac{m}{x_{\max}} \cdot \left(\frac{x}{x_{\max}} \right)^{m-1}$$

Parameter: 63%-Quantil x_{63} und Verteilungsformparameter p

- Summenfunktion:
$$GGB(x) = \left(\frac{x}{x_{\max}} \right)^m$$

- Median, Mittel+Modalwert:
$$x_{50} = \sqrt[m]{\frac{1}{2}} \cdot x_{\max} \quad \bar{x} = \frac{m}{m+1} \cdot x_{\max} \quad x_{\text{mod}} = \begin{cases} x_{\max}, & m > 1 \\ 0, & m < 1 \end{cases}$$

- Standardabw., Momente:
$$s = \frac{x_{\max}}{m+1} \cdot \sqrt{\frac{m}{m+2}} \quad M_k = \frac{m}{m+k} \cdot x_{\max}^k, \quad k+m > 1$$

- Anmerkungen

- Form (z.B. Schiefe und Exzesswölbung) stark abhängig vom Formparameter m
- Mengenartkonversion von $q_3(x)$ in $q_0(x)$ nur für $m > 4$
- gute Approximation für $q_3(x)$ beim Grobzerkleinern (Brecher mit Maximalspalt)
- grafische Regression im doppeltlogarithmischen Netz

Vergleich von NVT und LNVT

- Standardnormalverteilung:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

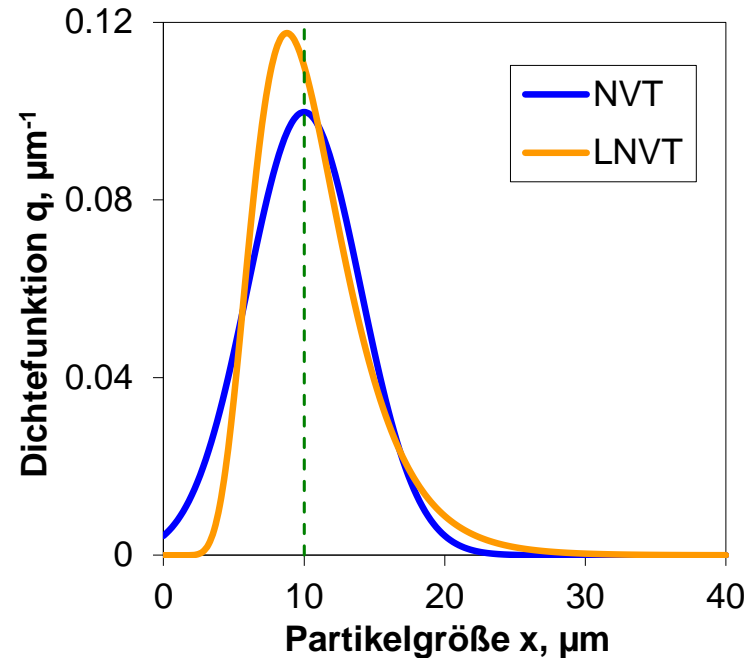
Transformation $Q_r(x) = \Phi(z)$

- Normalverteilung (NVT):

$$z = \frac{x - x_{50,r}}{s_r} \quad q_r(x) = \frac{1}{s_r \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

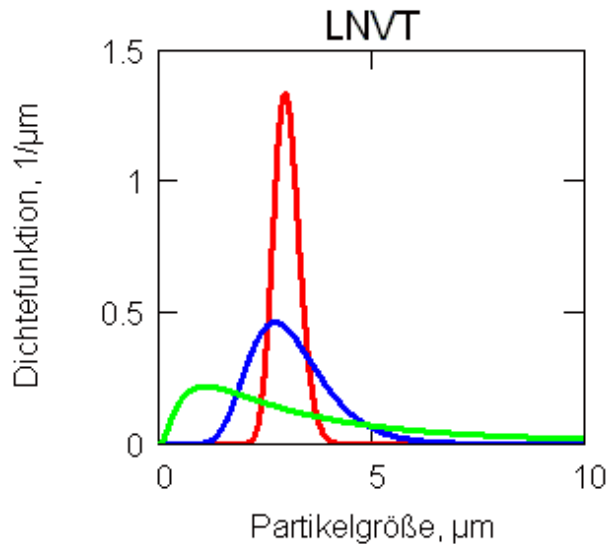
- Logarithmische Normalverteilung (LNVT):

$$z = \frac{1}{\sigma_{\ln}} \ln \frac{x}{x_{50,r}} \quad q_r(x) = \frac{1}{\sigma_{\ln} x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$



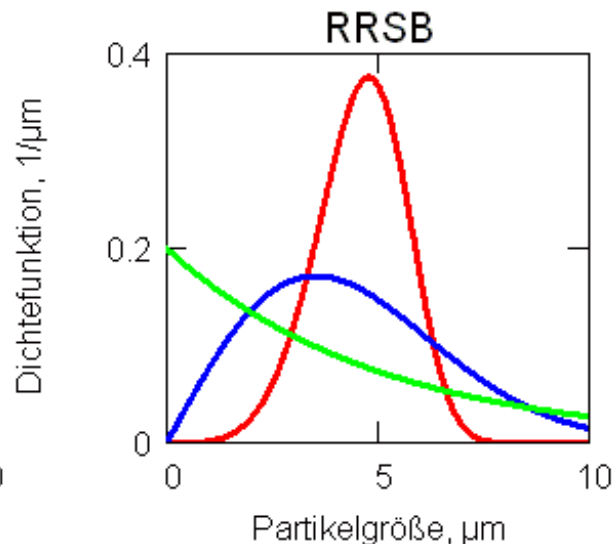
$$x_{50} = 10 \mu\text{m}, s = 4 \mu\text{m}$$

Vergleich von LNVT, RRSB und GGS



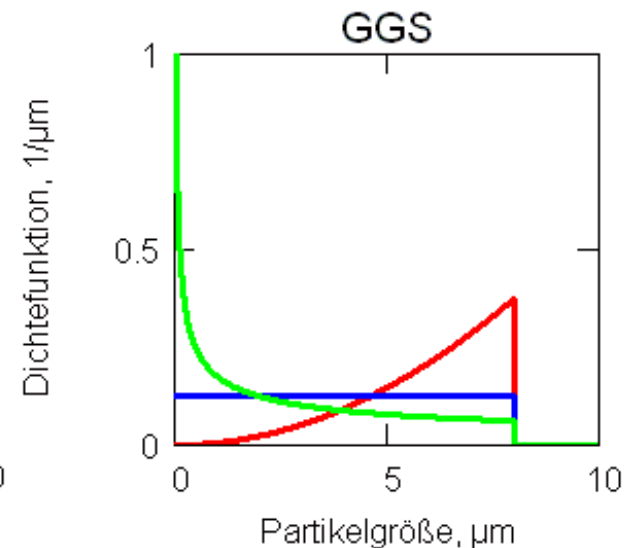
- $s_{ln} = 0.1$
- $s_{ln} = 0.3$
- $s_{ln} = 1$

- Form (Schiefe & Wölbung) sind unabhängig von σ_{ln}
- je größer σ_{ln} desto breiter die PGV



- $\rho = 5$
- $\rho = 2$
- $\rho = 1$

- Parameter ρ beeinflusst Breite und Form
- $\rho \rightarrow 1$: breit & rechtsschief
- $\rho \gg 1$: eng & linksschief



- $m = 3$
- $m = 1$
- $m = 0.5$

- Parameter m beeinflusst Breite und Form
- Grobbrechen $\rightarrow m > 1$, d.h. Modalwert = Maximum