

Themenblock 2

Aufgaben mit Lösungshilfe Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1. Die Winkelfunktionen $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$ lassen sich am Einheitskreis definieren. Hierfür sei $P(x, y)$ ¹ ein Punkt auf dem Einheitskreis um $O(0, 0)$. Es gelten

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y}$$

falls α den Winkel bezeichnet, den \overrightarrow{OP} mit der positiven Richtung der x -Achse einschließt.

(a) Rechnen Sie die exakten Winkelfunktionswerte $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ und $\cot \alpha$ nach für

$$\alpha \in \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ\}$$

Hinweis: Ergänzen Sie die Punkte O und P zu einem gleichseitigen bzw. gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck.

(b) Formen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Winkelfunktionen in Winkelfunktionswerte zum Argument α um.

$$\sin(2\alpha), \quad \cos(2\alpha), \quad \tan(2\alpha) (\cos(2\alpha) \neq 0), \quad \cos(\alpha - 90^\circ), \quad \sin(180^\circ - \alpha)$$

(c) Berechnen Sie: (i) $\sin 1230^\circ$ (ii) $\cos(-120^\circ)$ (iii) $\tan 330^\circ$.

(d) Ermitteln Sie alle Winkel α (im Gradmaß, auf zwei Nachkommastellen gerundet), für die $\sin \alpha = 0.8$ gilt.

Aufgabe 2. Formen Sie in Quotienten mit rationalen Nennern um.

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \quad \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3}}{3\sqrt{3} - \sqrt{5}}, \quad \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \text{für } a \in [0, \infty), b \in [0, \infty) \text{ mit } a \neq b$$

Aufgabe 3.

(a) Bestimmen Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, für welche die komplexen Zahlen

$$z_1 = (3a - 5) + (a + b^2)i \quad \text{und} \quad z_2 = (2a - 7) - (3a + 7)i$$

gleich sind.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die $z = \bar{z}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass genau für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) = 0$ gilt: $z = -\bar{z}$.

¹ (x, y) bezeichnet die Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem.

Aufgabe 4. Kennzeichnen Sie in der Gaußschen Zahlenebene die nachstehenden Teilmengen komplexer Zahlen $z \in \mathbb{C}$.

- (a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = r(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})) \text{ mit } r \in \mathbb{R}^+\}$
- (b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = (\frac{5}{2} \cos \varphi + 1) + i \cdot \frac{5}{2} \sin \varphi \text{ mit } \varphi \in [0, \pi]\}$
- (c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$
- (d) $M_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \in (-1, 3]\}$
- (e) $M_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) \leq 5\}$

Aufgabe 5. Gegeben sind zwei beliebige komplexe Zahlen $z_j \neq 0, j \in \{1, 2\}$, in Polardarstellung

$$z_j = |z_j|(\cos \varphi_j + i \sin \varphi_j), |z_j| \in \mathbb{R}^+, \varphi_j \in (-\pi, \pi]$$

- (a) Berechnen Sie den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ und vereinfachen Sie das Ergebnis unter Verwendung der Additionstheoreme für Winkelfunktionen.
- (b) Formulieren Sie eine Regel für die Division komplexer Zahlen in Polardarstellung. ²

Aufgabe 6. Gegeben sei die Formel für eine endliche Summe

$$\sum_{k=0}^4 (e^{ikx}) = \frac{1 - (e^{ix})^5}{1 - e^{ix}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

worin $e = 2.7182818\dots$ die Eulerzahl und i die imaginäre Einheit bezeichnen, d. h. es gilt $i^2 = -1$.

- (a) Stellen Sie die linke Seite der Gleichung (1) ohne Verwendung des Summenzeichens dar.
- (b) Stellen Sie linke und rechte Seite der Gleichung (1) unter Benutzung der Formel von Moivre

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

als Summe $a(x) + i \cdot b(x)$ dar, worin $a(x)$ bzw. $b(x)$ den Real- bzw. Imaginärteil bezeichnen.

- (c) Leiten Sie aus der Formel (1) eine Formel für den Realteil ab.

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Lösungen z_1 und z_2 des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (2 - i) \cdot z_1 + (3 + i) \cdot z_2 &= 4i \\ z_1 - (8 - i) \cdot z_2 &= 2 + i. \end{aligned}$$

Aufgabe 8.

- (a) Bestimmen Sie jeweils die Teilmenge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$ zu den nachstehenden Betragsgleichungen und -ungleichungen.

$$(i) |z - 3 - i| = 1 \qquad (ii) |z + 2| \leq 2 \qquad (iii) |z - i| < 2 \wedge |z - 1 - i| = 1$$

- (b) Geben Sie ebenso jeweils alle Lösungen $z \in \mathbb{R}$ an.
- (c) Kennzeichnen Sie die Teilmengen aus (a) und (b) in der Gaußschen Zahlenebene.

²Die Regel kann in Analogie zu der für die Multiplikation komplexer Zahlen, die in Polardarstellung gegeben sind, formuliert werden.

Aufgabe 9. Gegeben sei eine Doppelkurbel mit den Drehgelenken A (ortsfest) und B (beweglich) sowie den Gliedern a, b mit den Längen $s_a = 4$ und $s_b = 5$, siehe Abbildung 1.

- (a) Identifizieren Sie die möglichen Lagen A, B und C mit komplexen Zahlen entsprechend Abbildung 1 und geben Sie diese in Abhängigkeit von α und β an.
- (b) Ermitteln Sie eine Betragsungleichung zur Beschreibung der Teilmenge M der komplexen Zahlen, die bei der Bewegung der Doppelkurbel durch C angenommen werden können. Skizzieren Sie die Menge M .
- (c) Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden komplexen Zahlen in M enthalten sind.
 (i) $z_1 = -i$ (ii) $z_2 = 0$ (iii) $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (iv) $z_4 = -\frac{37}{4}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$ (v) $z_5 = 9i$
- Wie viele verschiedene Lagen der Doppelkurbel sind dabei möglich?

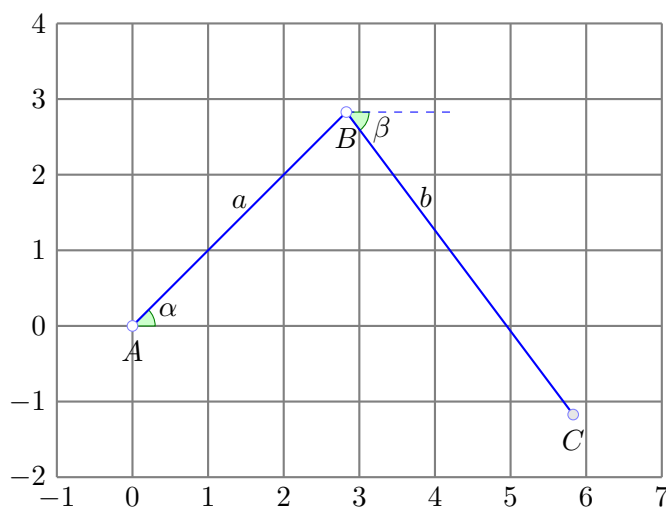


Figure 1: Doppelkurbel mit den Gliedern a und b und den Drehgelenken A und B .

Aufgabe 10. Berechnen Sie näherungsweise alle komplexen Wurzeln w_k zu

$$(w_k)^3 = z \text{ mit } z = 2i, k \in \{0, 1, 2\}$$

auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Stellen Sie die komplexen Wurzeln in der Gaußschen Zahlenebene dar. Zeichnen Sie ebenfalls das Dreieck, dessen Eckpunkte durch w_k beschrieben sind.

Wiederholen Sie die Rechnung für

(a) $(w_k)^4 = -1 + i$ und (b) $(w_k)^3 = -8$.

Aufgabe 11. Gegeben sind die Zahlen $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ und $z_3 \in \mathbb{C}$ mit

$$z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1 \quad \text{und} \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| \tag{2}$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der nachstehenden beiden Aussagen.

- (i) Die Zahlen z_1, z_2 und z_3 sind Lösungen einer Gleichung $z^3 = c$ mit $c \in \mathbb{C}$ in der Unbekannten z .
- (ii) Für die Zahlen z_1, z_2 und z_3 gilt die Gleichheit $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Aufgabe 12. Gegeben sind Quaternionen $Q \in \mathbb{H}$ der Form

$$Q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \text{ mit } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$$

worin \mathbf{i} , \mathbf{j} und \mathbf{k} die quaternionalen Einheiten beschreiben.

- (a) Seien $Q_1 = 1 + 2\mathbf{k}$ und $Q_2 = 1 + \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Berechnen Sie die Produkte $Q_1 \cdot Q_2$ und $Q_2 \cdot Q_1$ mit Hilfe der Produktregeln³

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \text{und} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad (3)$$

- (b) Zeigen Sie, dass mit den Produktregeln in Formelzeile (3) ebenfalls folgen

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad \text{und} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

Hinweis: Die Eigenschaft der Assoziativität des quaternionalen Produkts kann ohne Nachweis verwendet werden.

- (c) Gegeben ist eine Quaternion $Q \in \mathbb{H}$ in der Form

$$Q = \cos \alpha + \sin \alpha \cdot (b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Zeigen Sie, dass für den Betrag von Q gilt: $|Q| = 1 \iff b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

- (d) Zeigen Sie die, dass die (reelle) Gleichheit $Q \cdot \tilde{Q} = |Q|^2$ gilt, worin \tilde{Q} die zu Q quaternional-konjugierte Zahl beschreibt.

- (e) Beschreiben Sie die Drehung um die z -Achse des dreidimensionalen Koordinatensystems mit Winkel $\varphi = 60^\circ$ unter Verwendung des quaternionalen Produktes.

Berechnen Sie die gedrehten Bilder der Punkte $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ und $D(0, 0, 1)$.

Aufgabe 13. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n^2$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$, des Weiteren sei die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ mit

$$\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{a + b \cdot \sqrt{m} \mid a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\} \quad (4)$$

erklärt. Da $\mathbb{Q}(\sqrt{m}) \subset \mathbb{R}$, sind in $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ die Addition und Multiplikation aus \mathbb{R} erklärt.

- (a) Zunächst ist $m = 3$ gewählt. Zeigen Sie, dass Addition bzw. Multiplikation von beliebigen $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $y \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ wieder ein Element $(x + y) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ bzw. $(x \cdot y) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ bilden.
- (b) Bilden Sie das zu $x = a + b \cdot \sqrt{m}$ aus Formelzeile (4) multiplikativ inverse Element x^{-1} , d. h.

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$

Zeigen Sie, dass x^{-1} genau dann definiert und eindeutig ist, wenn $b^2 - m \cdot a^2 \neq 0$, d. h. für alle $x \neq 0$.

³Die Assoziativität und Kommutativität bezüglich der Addition sowie die Assoziativität bezüglich der Multiplikation von Quaternionen wird vorausgesetzt.

Selbständige Bearbeitung Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 14. Bestimmen Sie alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$, so dass für die komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z = (x^2 + 2x - 3) + i(x^2 - 4) \quad (i^2 = -1)$$

gelten: (a) $\operatorname{Re}(z) = 0$ (b) $\operatorname{Im}(z) = 0$. Geben Sie die Zahlen z an.

Aufgabe 15. Bestimmen Sie die arithmetischen Darstellungen der folgenden komplexen Zahlen z

$$(a) z = \frac{3 + 4i}{5} + \frac{5}{3 + 4i}$$

$$(b) z = \frac{1 + i}{1 - i} + \frac{4i}{1 + i} + 1$$

$$(c) z = \frac{(2 + i)^3}{2 - 3i}$$

$$(d) z = \frac{3 + 6i}{2 + i^3} - \frac{10i^4}{(1 + i)^2}$$

worin i mit $i^2 = -1$ die imaginäre Einheit bezeichnet.

Aufgabe 16.

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen durch Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dar.

$$z_1 = 3 - 4i$$

$$z_2 = -2 + 3i$$

$$z_3 = -5 - 2i$$

$$z_4 = 3$$

$$z_5 = -\frac{3}{2}i$$

$$z_6 = \frac{3}{2} \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)i \right)$$

$$z_7 = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)i$$

$$z_8 = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)i$$

(b) Bestimmen Sie in der Gaußschen Zahlenebene (siehe Abbildung 2) die durch Zeiger dargestellten komplexen Zahlen.

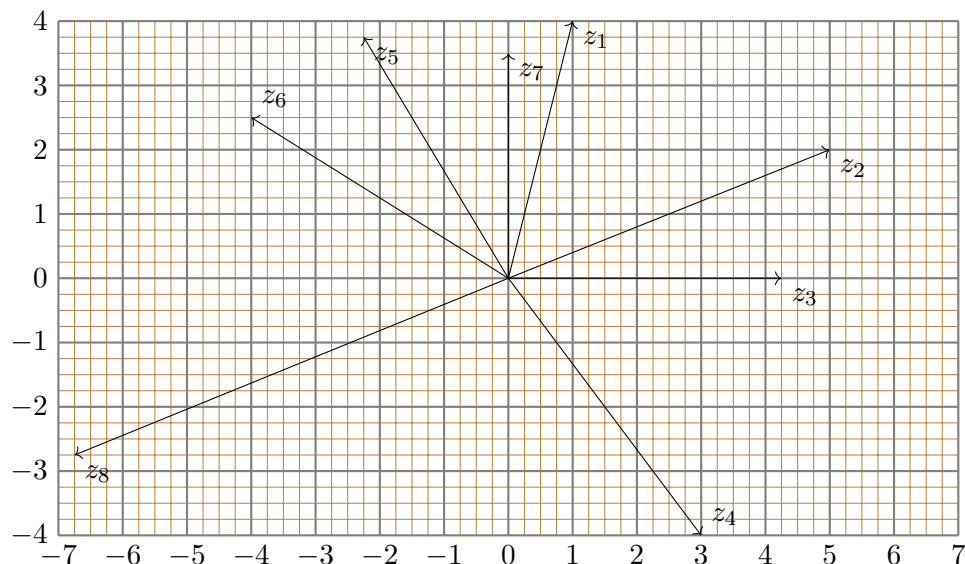


Figure 2: Komplexe Zahlen $z_i \in \mathbb{C}$ mit $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, die durch Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt sind. (Die Pfeilspitzen liegen auf dem Gitterraster.)

Aufgabe 17. Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen z jeweils die gesuchten Größen.

- (a) $z = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) - i \sin(\frac{\pi}{3}))$ ges.: trigonometrische Form, $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$
 (b) $z = -3e^{i\frac{\pi}{3}}$ ges.: z und \bar{z} in exponentieller Form
 (c) $z = (e^{\frac{\pi}{2}i} + \sqrt{3}) \cdot i$ ges.: $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Arg}(z)$
 (d) $z = \frac{1 - e^{\frac{3}{2}\pi i}}{1 + i \cdot e^{-\pi i}}$ ges.: arithmetische und exponentielle Form

Aufgabe 18. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 3i$ und $z_2 = 5 - 2i$.

- (a) Berechnen Sie \bar{z}_1 , \bar{z}_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$.
 (b) Geben Sie zu z_1 und z_2 jeweils die Inversen bezüglich der Addition und Multiplikation in der kartesischen Form $a + ib$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) an.
 (c) Berechnen Sie $(z_1 + iz_2)^3$.

Wiederholen Sie die Aufgaben (a) bis (c) für die Zahlenpaare

- (i) $z_1 = \sqrt{3} \cdot (\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))$ und $z_2 = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}))$
 (ii) $z_1 = \cos(\frac{\pi}{12}) - i \sin(\frac{\pi}{12})$ und $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$.

Hinweis: Wandeln Sie hierfür - wo nötig - die komplexen Zahlen in eine geeignete Darstellungsform um.

Aufgabe 19. Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = 3, \quad z_2 = 2 \cdot i, \quad z_3 = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

- (a) Stellen Sie diese Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar. Zeichnen Sie ebenfalls das Dreieck Δ mit den durch z_1 , z_2 und z_3 gegebenen Eckpunkten.
 (b) Unterwerfen Sie Δ einer Drehung um den Koordinatenursprung mit Winkelmaß $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Berechnen Sie hierfür in \mathbb{C} die gedrehten Bilder der Eckpunkte von Δ .
 (c) Verschieben Sie Δ in Richtung des winkelhalbierenden Strahls des ersten Quadranten mit Betrag $r = 2$. Berechnen Sie hierfür in \mathbb{C} die verschobenen Bilder der Eckpunkte von Δ .
 (d) Untersuchen Sie, ob durch $z \mapsto z'$ mit

$$z' = z_\varphi(z - 1) + 1$$

und $z_\varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$ eine Drehung der Gaußschen Zahlenebene um den zu $z = 1$ gehörenden Punkt als Drehzentrum mit Winkelmaß φ gegeben ist.

Aufgabe 20. Berechnen Sie unter Benutzung der Periodizität der Winkelfunktionen für $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$:

- (a) $(1 - i)^{21}$ (b) $(1 + \sqrt{3}i)^{15}$ (c) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}+i}\right)^{32}$.

Aufgabe 21. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen in exponentieller Darstellung. Skizzieren Sie ferner die Lage dieser Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene.

- (a) $z^3 = 1 + i$ (b) $z^4 = 1 + i$ (c) $z^5 = -1024i$ (d) $z^6 = -729$

Aufgabe 22. Es seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2 - 5i$ und $z_2 = -4 - 3i$ betrachtet.¹

- (a) Berechnen Sie den Abstand der Zahlen z_1 und z_2 in der Gaußschen Zahlenebene.
- (b) Bestimmen Sie die Teilmenge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$ in der Gaußschen Zahlenebene, die von z_1 und z_2 den gleichen (aber nicht notwendig konstanten!) Abstand besitzen. Zeichnen Sie diese zusammen mit z_1 und z_2 in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 23. Bestimmen Sie die komplexe Zahl z' , die das Spiegelbild von $z = a + bi$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$ ist bei Spiegelung

- (a) am Ursprung
- (b) an der reellen Achse
- (c) an der imaginären Achse
- (d) an der winkelhalbierenden Geraden des I. und III. Quadranten
- (e) an der winkelhalbierenden Geraden des II. und IV. Quadranten

¹Die komplexen Zahlen werden im Folgenden mit den ihnen entsprechenden Punkten in der Gaußschen Zahlenebene identifiziert.