Die Isomorphie von Graphen ist eine Äquivalenzrelation, wenn sie die drei grundlegenden Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllt: Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Um dies zu zeigen, definiere ich zuerst, was Graphen Isomorphie bedeutet:

Zwei Graphen G und H sind isomorph, wenn es eine Bijektion $f{:}V(G) \to V(H)$ zwischen den Knotenmengen $V(G)$ und $V(H)$ gibt, so dass zwei Knoten u und v in G genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn die Knoten $f(u)$ und $f(v)$ in H ebenfalls durch eine Kante verbunden sind.

Reflexivität: Jeder Graph ist zu sich selbst isomorph. Für einen gegebenen Graphen G ist die Identitätsabbildung $f{:}V(G) \to V(G)$, bei der jeder Knoten auf sich selbst abgebildet wird, eine isomorphe Abbildung. Daher ist G isomorph zu G.

Symmetrie: Wenn ein Graph G isomorph zu einem Graphen H ist, dann ist auch H isomorph zu G. Angenommen, $f{:}V(G) \to V(H)$ ist eine isomorphe Abbildung, die G und H als isomorph ausweist. Dann ist die Umkehrfunktion f–1:$V(H) \to V(G)$ ebenfalls eine isomorphe Abbildung, die H und G als isomorph ausweist.

Transitivität: Wenn ein Graph G isomorph zu einem Graphen H ist und H isomorph zu einem weiteren Graphen K ist, dann ist G isomorph zu K. Angenommen, $f{:}V(G) \to V(H)$ und $g{:}V(H) \to V(K)$ sind isomorphe Abbildungen. Dann ist die Komposition $g \circ f{:}V(G) \to V(K)$ eine isomorphe Abbildung, die G und K als isomorph ausweist.

Da die Isomorphie von Graphen diese drei Eigenschaften erfüllt, ist sie eine Äquivalenzrelation.