Triangulation

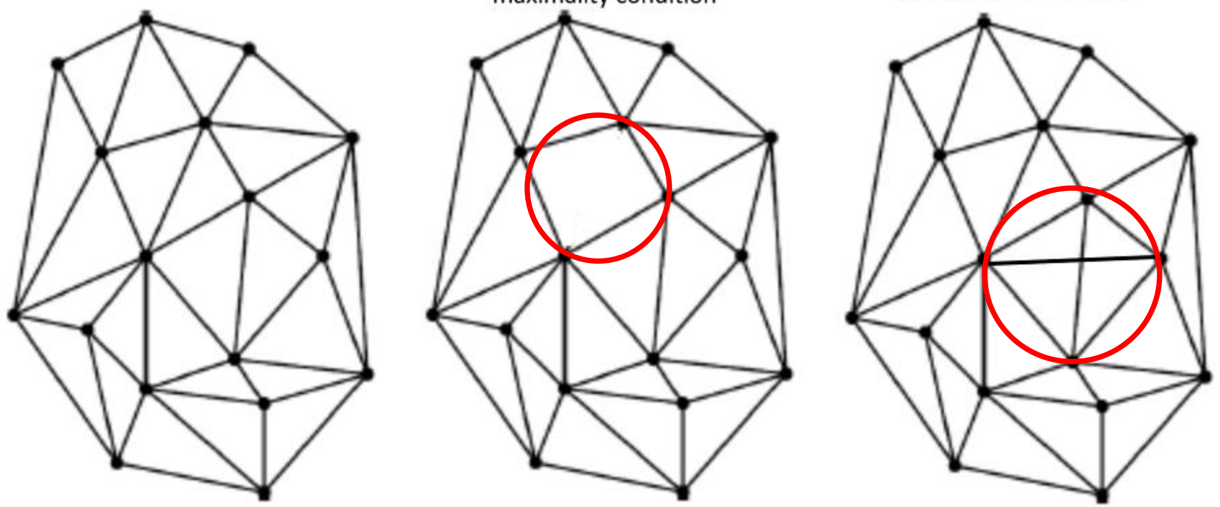
<u>Definition</u> (Triangulation). Eine Triangulation $\mathcal{T}$ einer Punktmenge $P = \{p_1, \ldots, p_N\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine *maximale* „Familie“ von Dreiecken in der Form:

$$\mathcal{T} = \{T_i = \mathcal{C}\left(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}\right)\text{: die Kanten } \overline{p_{i_1}p_{i_2}}, \overline{p_{i_2}p_{i_3}}, \overline{p_{i_1}p_{i_3}} \text{ schneiden sich mit keiner Kante } \overline{p_{k_1}p_{k_2}}, \overline{p_{k_2}p_{k_3}}, \overline{p_{k_1}p_{k_3}} \text{ eines anderen Dreiecks } T_k, ;\, k \neq i;\, i, k = 1, \ldots, M_T\}$$

„*Maximal*“ bedeutet in diesem Kontext, dass kein weiteres Dreieck hinzugefügt werden kann, ohne dass sich Dreieckskanten schneiden.

No triangulation: Violates maximality condition

No triangulation: Violates no intersection condition



Triangulation

<u>Definition</u> (Triangulation). Eine Triangulation $\mathcal{T}$ einer Punktmenge $P = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine *maximale* „Familie“ von Dreiecken in der Form:

$$\mathcal{T} = \{T_i = \mathcal{C}\left(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}\right)\text{: die Kanten } \overline{p_{i_1}p_{i_2}}, \overline{p_{i_2}p_{i_3}}, \overline{p_{i_1}p_{i_3}} \text{ schneiden sich mit keiner Kante } \overline{p_{k_1}p_{k_2}}, \overline{p_{k_2}p_{k_3}}, \overline{p_{k_1}p_{k_3}} \text{ eines anderen Dreiecks } T_k, ; k \neq i; i, k = 1, \dots, M_T\}$$

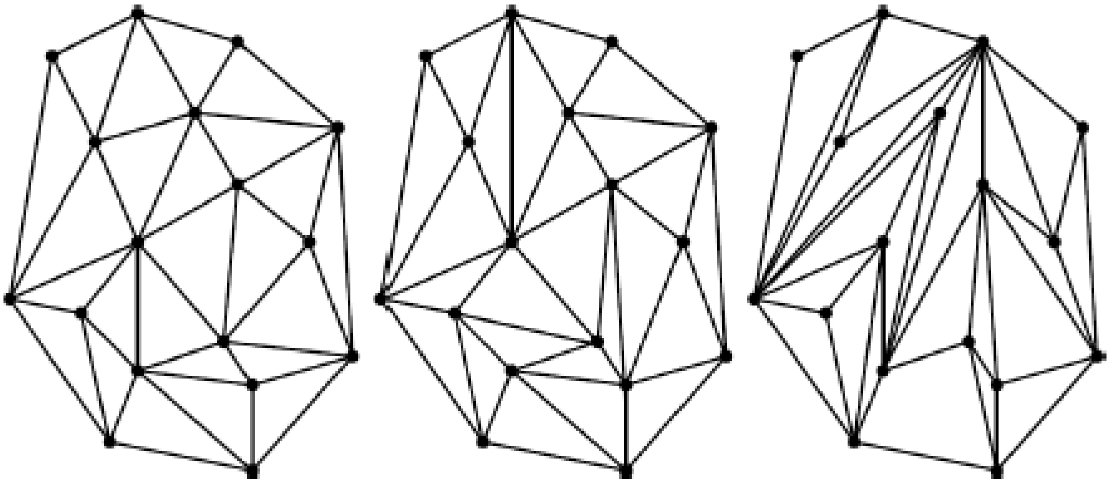
„*Maximal*“ bedeutet in diesem Kontext, dass kein weiteres Dreieck hinzugefügt werden kann, ohne dass sich Dreieckskanten schneiden.

Allgemeine Eigenschaften von $\mathcal{T}$ (Notation gemäß Online-Skript):

- Jedes $T \in \mathcal{T}$ mit $T = \mathcal{C}(p_i, p_j, p_k)$ ist **nicht-degeneriert**: $p_i \neq p_j \neq p_k$ und $\text{area}(T) > 0$
- Ein Dreieck $T = \mathcal{C}\left(p_i, p_j, p_k\right)$ **keinen anderen** Punkt $p_l \in \mathrm{P}$ mit $l \neq i, j, k$
- $\mathcal{T}$ überdeckt die **komplette konvexe Hülle** von P: $\cup\, \mathcal{T} = [P]$
- Dreiecke überlappen sich, wenn überhaupt, nur an ihren Grenzen: $T_i \cap T_j = \emptyset \quad \forall i \neq \mathrm{j}$

Triangulation

Die Triangulation einer gegeben Punktmenge ist **NIEMALS** eindeutig. Es gibt immer mehrere Lösungen, um die gegebenen Punkt mit Dreiecken zu verbinden, welche die genannten Eigenschaften aufweisen.



Triangulation

Die Triangulation einer gegeben Punktmenge ist **NIEMALS** eindeutig. Es gibt immer mehrere Lösungen, um die gegebenen Punkt mit Dreiecken zu verbinden, welche die genannten Eigenschaften aufweisen.

Es lassen sich aber zumindest eine generelle Aussagen über die Triangulierung einer gebenen Punktmenge treffen:

Gegeben sei die Punktmenge $P = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^2$ (in genereller Position). $\mathcal{T}(P)$ enthält immer

$$M_T = 2N - K - 2$$

Dreiecke und

$$M_K = 3N - K - 3$$

Kanten. K ist dabei die Anzahl der Punkte auf der konvexen Hülle von P.

Beweis: Euler-Poincaré-Theorem

⇒ **Die Anzahl der Dreiecke und Dreieckskanten ist konstant für alle möglichen $\boldsymbol{\mathcal{T}(P)}$.**

Delaunay Triangulation

Sei $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ der duale Graph bezüglich einer Voronoi Vermaschung $\mathcal{V}$.

Definition (Delaunay Triangulation). Eine Triangulation $\mathcal{T}$ wird als Delaunay Triangulation bezeichnet wenn

$$\mathcal{T} = \{T_i = \mathcal{C}\left(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}\right) \colon \overline{p_{i_1} p_{i_2}}, \overline{p_{i_2} p_{i_3}}, \overline{p_{i_1} p_{i_3}} \in \mathcal{D}(\mathcal{V}), i = 1, \ldots, M_T\}$$

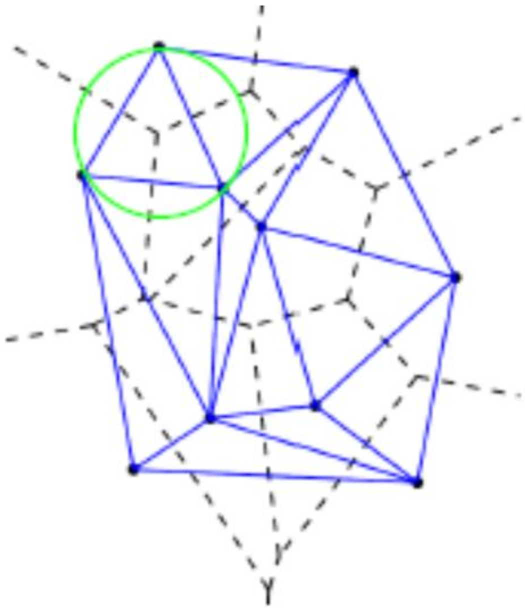
Delaunay Triangulation

Sei $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ der duale Graph bezüglich einer Voronoi Vermaschung $\mathcal{V}$.

<u>Definition</u> (Delaunay Triangulation). Eine Triangulation $\mathcal{T}$ wird als Delaunay Triangulation bezeichnet wenn

$$\mathcal{T} = \{T_i = \mathcal{C}\left(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}\right): \overline{p_{i_1} p_{i_2}}, \overline{p_{i_2} p_{i_3}}, \overline{p_{i_1} p_{i_3}} \in \mathcal{D}(\mathcal{V}), i = 1, \ldots, M_T\}$$

<u>Lemma.</u> Eine Triangulation $\mathcal{T}$ einer Punktmenge $P \in \mathbb{R}^2$ ist genau dann eine **Delaunay Triangulation**, wenn der Umkreis jedes Dreiecks $T \in \mathcal{T}$ keinen Punkt $p \in P$ in seinem Inneren enthält.



Konstruktive Delaunay Triangulation

<u>Definition</u> (Winkel-maximale Triangulation) Sei $\mathcal{T}$ eine Triangulation einer Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ und sei $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3M_T})$ die aufsteigend sortierte Sequenz der Dreieckswinkel. Des weiteren sei $A(\mathcal{T}') = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{3M_T})$ die aufsteigend sortierte Sequenz der Dreieckswinkel einer zweiten Triangulation $\mathcal{T}'$ von P.
Dann kann man sagen

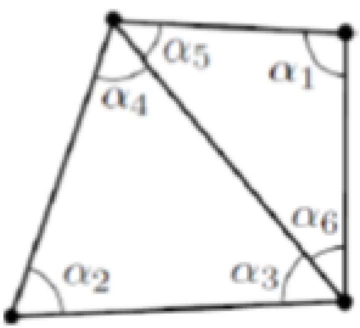
$$A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}'),$$

falls ein Index I existiert, für den gilt

$$\alpha_i = \alpha'_i \text{ für } i < I \text{ und } \alpha_I > \alpha'_I.$$

Die Triangulation $\mathcal{T}$ wird als „Winkel-maximal“ bezeichnet, wenn für jede mögliche Triangulation $\mathcal{T}'(P)$ gilt:

$$A(\mathcal{T}) \geq A(\mathcal{T}')$$

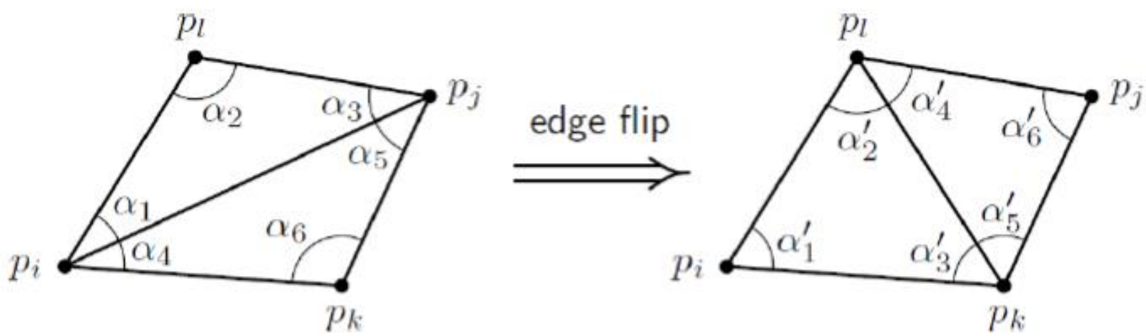


Konstruktive Delaunay Triangulation

<u>Definition</u> („illegale“ Kante, Kanten-flip) Sei $\mathcal{T}$ eine Triangulation einer Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ und seien $T_1 = \mathcal{C}(p_i, p_j, p_k)$, $T_2 = \mathcal{C}(p_i, p_j, p_l)$ zwei benachbarte Dreiecke dieser Triangulation, deren Vereinigung ein konvexes Viereck bilden.
Jetzt lässt sich ein weiteres Paar benachbarter Dreiecke $T'_1 = \mathcal{C}(p_i, p_l, p_k)$, $T'_2 = \mathcal{C}(p_j, p_k, p_l)$ definieren.
Wen für die beteiligten Winkel gilt:

$$\min_{1=1,\dots,6} \alpha_i < \min_{1=1,\dots,6} \alpha'_i$$

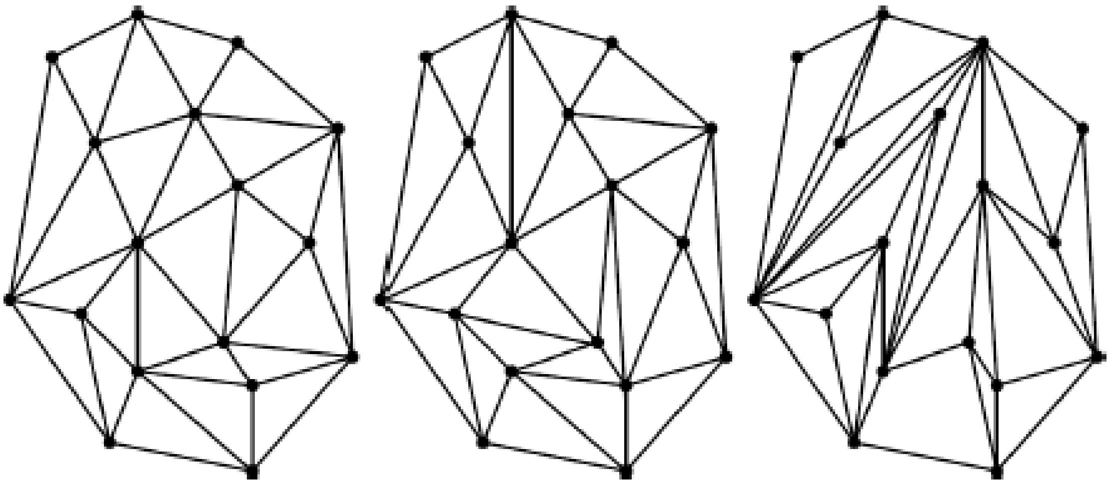
dann wird die Kante $\overline{p_i p_j}$ als **„illegale“ Kante** bezeichnet. Die Überführung von T_1, T_2 nach T'_1, T'_2 wird als „Kanten-flip“ (*edge flip*) bezeichnet.



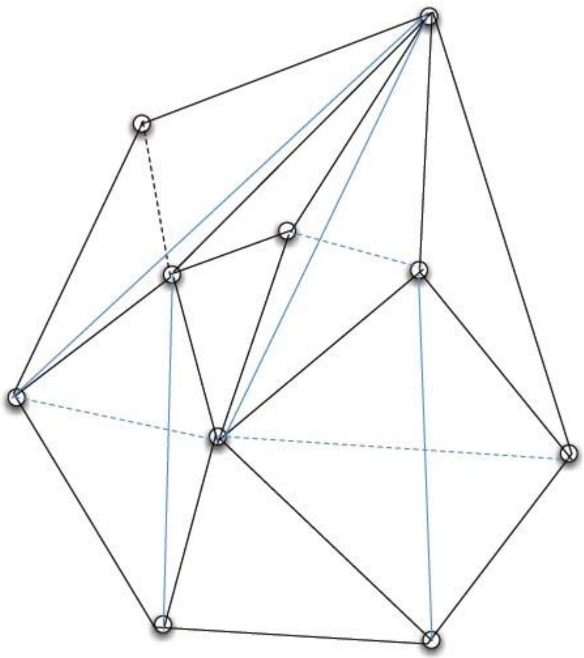
Konstruktive Delaunay Triangulation

Wenn eine Triangulation $\mathcal{T}$ eine „illegale“ Kante beinhaltet, führt ein Kanten-Flip zu einer neuen Triangulation $\mathcal{T}'$ mit $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$. Wenn dies iterativ durchgeführt wird, bis keine „illegale“ Kanten mehr vorhanden sind, führt dies zu einer **Delaunay Triangulation**.

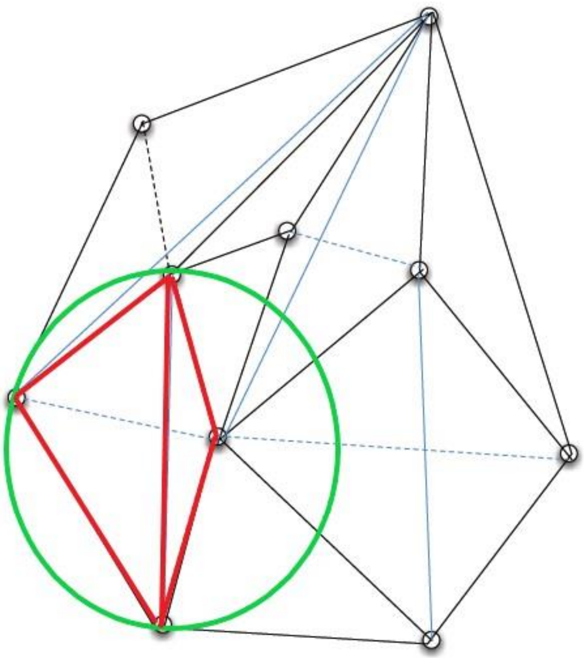
Theorem (Charakterisierung einer Delaunay Triangulation) Sei $\mathcal{T}$ eine Triangulation einer Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$. $\mathcal{T}$ ist genau dann eine Delaunay Triangulation (im Sinne der Definition über die duale Vermaschung zu einer Voronoi Vermaschung), wenn sie keine „illegalen“ Kanten enthält.



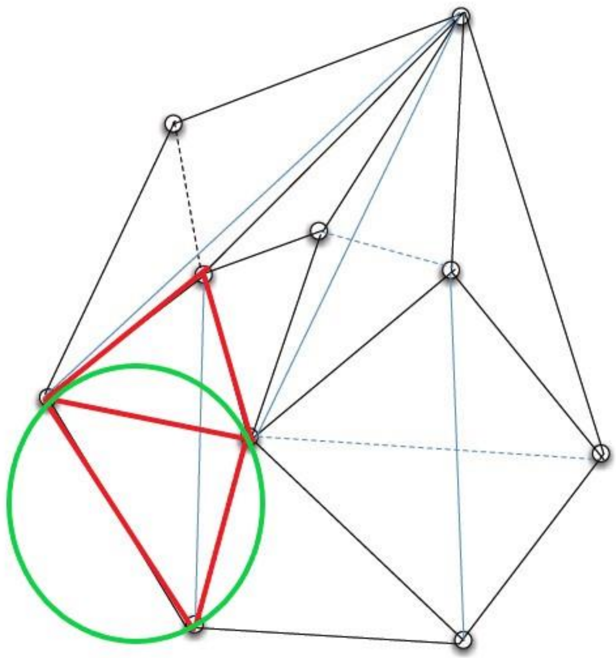
Konstruktive Delaunay Triangulation



Konstruktive Delaunay Triangulation



Konstruktive Delaunay Triangulation



Constrained Delaunay Triangulation

In bestimmten Situationen liegen bereits vor der Triangulierung wichtige Zusatzinformationen bezüglich der Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Knoten vor.

Z.b.

- Bekannte Höhenlinien (Isolinien der Höhe, Linie mit konstanten Höhenwerten); diese Linienobjekte sollten als Kanten in einer Triangulierung erhalten bleiben.
- Linien, welche Störungen / Diskontinuitäten repräsentieren (diese Linien müssen erhalten bleiben, keine Dreieckskante darf ein solche Linie schneiden)

Constrained Delaunay Triangulation

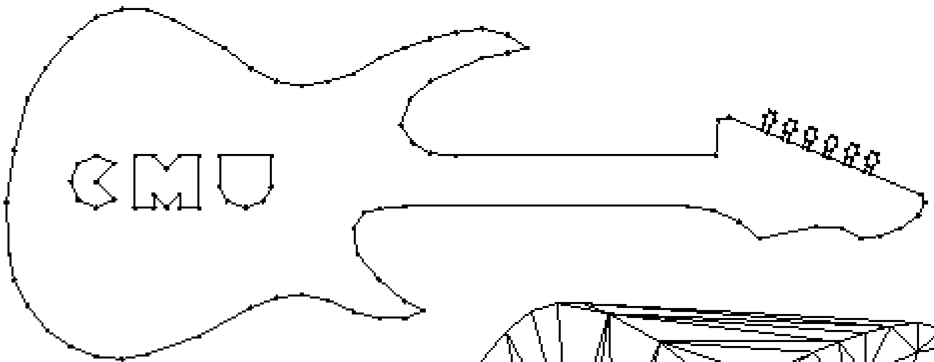
In bestimmten Situationen liegen bereits vor der Triangulierung wichtige Zusatzinformationen bezüglich der Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Knoten vor.

Z.b.

- Bekannte Höhenlinien (Isolinien der Höhe, Linie mit konstanten Höhenwerten); diese Linienobjekte sollten als Kanten in einer Triangulierung erhalten bleiben.
- Linien, welche Störungen / Diskontinuitäten repräsentieren (diese Linien müssen erhalten bleiben, keine Dreieckskante darf ein solche Linie schneiden)

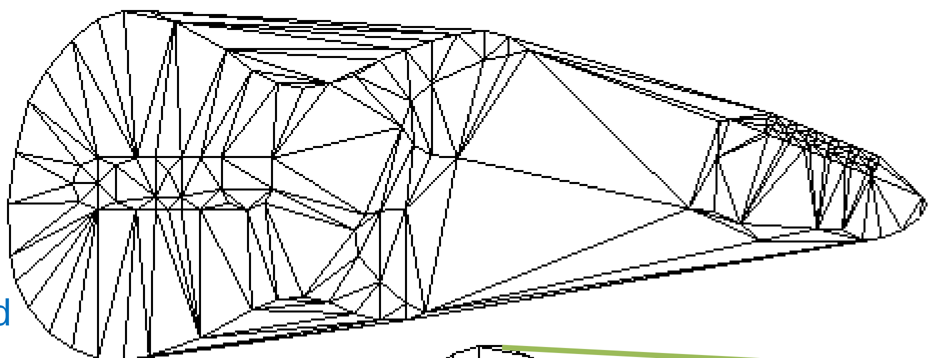
Das **lokale Vorgehen** bei der Konstruktion einer Delaunay Triangulierung erlaubt es, diese Zusatzinformationen bzgl. Kanten direkt zu berücksichtigen. Die entstehende Triangulierung ist immer noch größenteils „winkel-maximal", außer für die Dreiecke, welche durch die Zusatzinformationen beeinflusst wurden bzw. eine solche „constrained" Kante verwenden.

Constrained Delaunay Triangulation

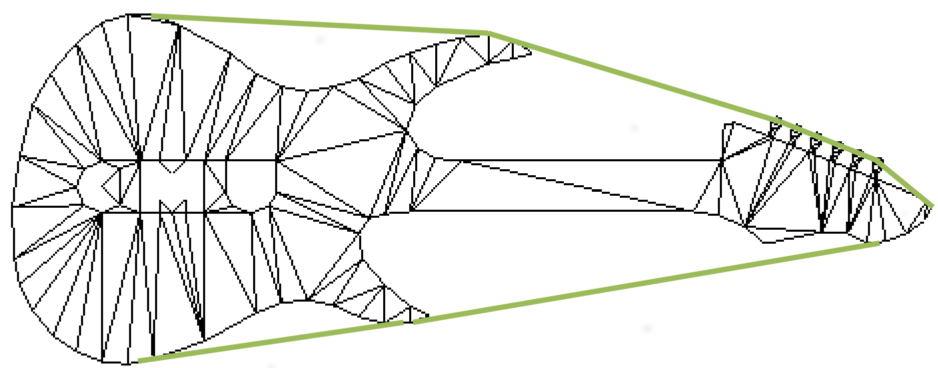


Gegeben seinen die Umrisskanten / Knoten einer Gitarre.

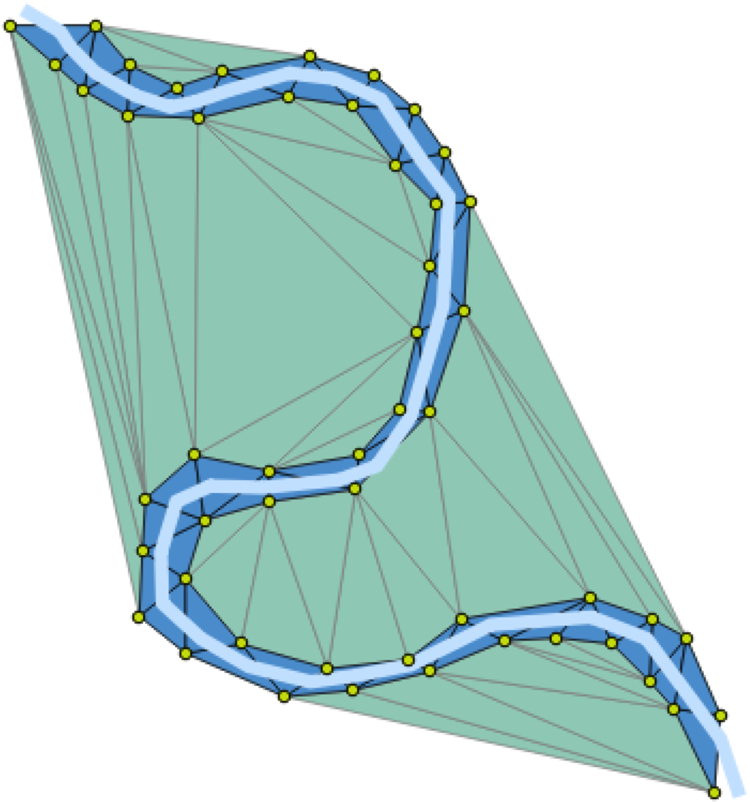
Eine Triangulierung ohne Constraints führt zu folgendem Ergebnis. Einige Details der Gitarre gehen verloren und es wird die komplette konvexe Hülle vermascht.



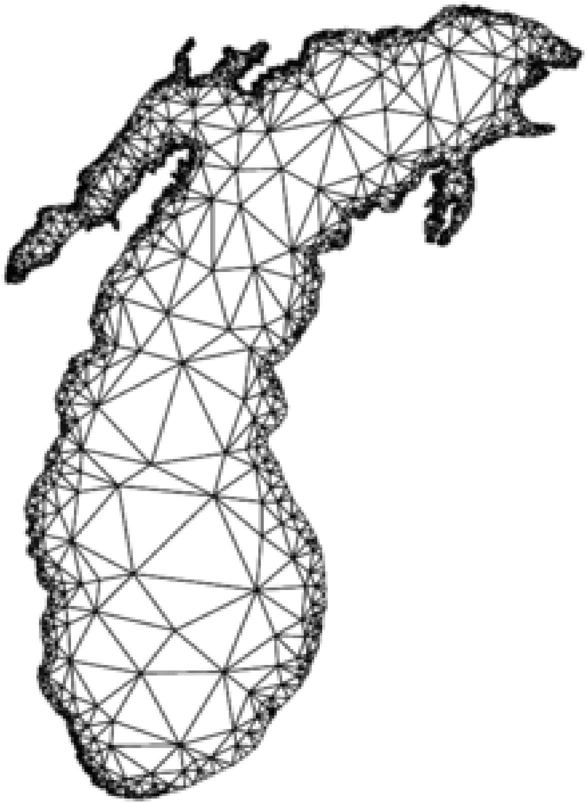
Werden die Umrisskanten als Constraints verwendet, bleiben alle Details erhalten. Es wird zwar immer noch die komplette konvexe Hüllte trianguliert, alle „äußeren“ Dreiecke lassen sich aber nachträglich entfernen.



Constrained Delaunay Triangulation



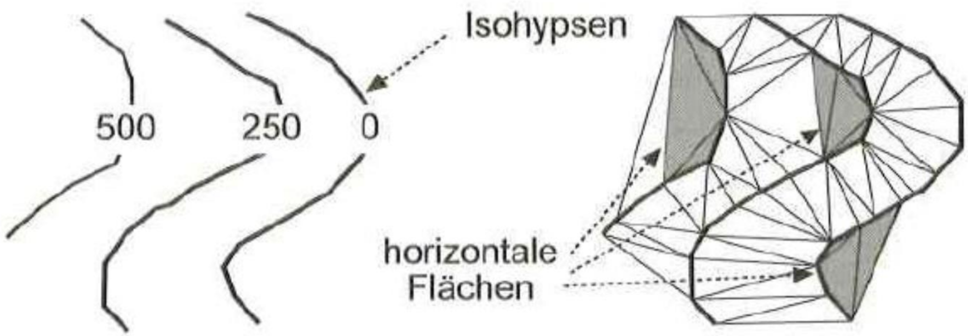
Triangulierung mittels Constraints welche das Flussbett beschreiben.



Triangulierung einer Insel mit der Küstenlinie als Constraints. Alle äußeren Dreiecke wurden nachträglich entfernt.

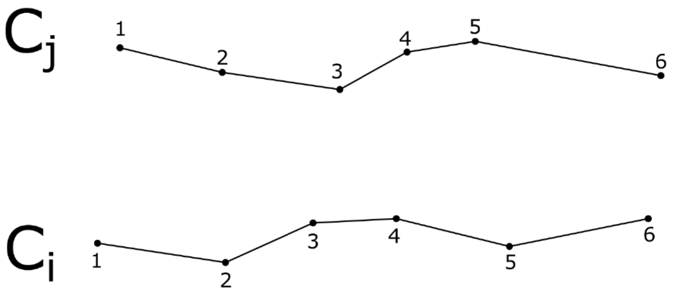
Parkettierung (*tiling*)

Triangulierung von Linienobjekten (z.B. Isohypsen, Isobaren) kann prinzipiell etwa als Constrained Delaunay Triangulation aufgefasst werden. Allerdings können dann u.U. ungewünschte Effekte auftreten (z.B. Plateaueffekte):



Parkettierung

Triangulierung von Linienobjekten (z.B. Isohypsen, Isobaren) kann prinzipiell etwa als Constrained Delaunay Triangulation aufgefasst werden. Allerdings können dann u.U. ungewünschte Effekte auftreten (z.B. Plateaueffekte):

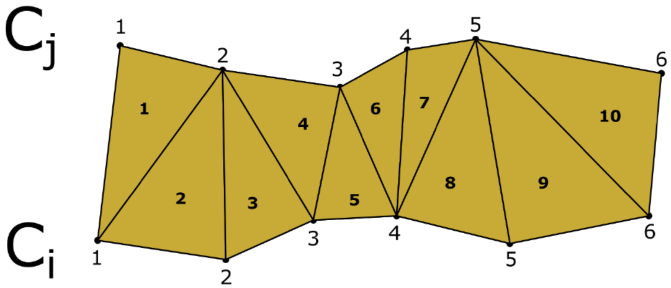


Es seien zwei Folgen $C_i = \{p_1, \ldots, p_n\}$ und $C_j = \{q_1, \ldots, q_m\}$ von Punkten gegeben.
Eine **Parkettierung (Tiling)** mittels Dreiecken ist dann gegeben, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. aufeinanderfolgende Punkte eines Linienobjektes C_i oder C_j sind durch eine Dreieckskante verbunden,
2. jedes Dreieck enthält maximal zwei Punkte, die in demselben Linienobjekt C_i oder C_j enthalten sind.

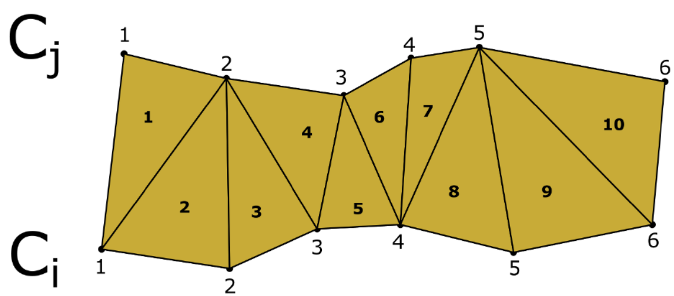
Parkettierung

Eine Parkettierung muss nicht zwangsläufig die gesamte konvexe Hülle aller Punkte umfassen. Ebenso ist es nicht ausgeschlossen, dass sich 3D Dreiecke überschneiden, wenn sie in die 2D Ebene projiziert werden (eine Parkettierung stellt also keine klassische Triangulierung dar).

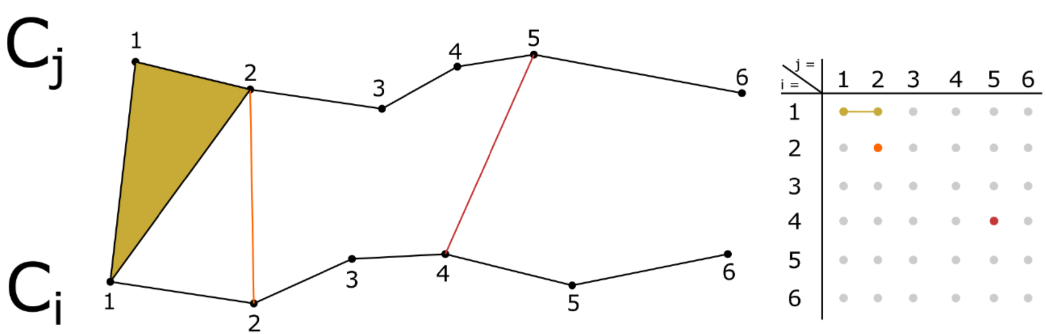


Parkettierung

Eine Parkettierung muss nicht zwangsläufig die gesamte konvexe Hülle aller Punkte umfassen. Ebenso ist es nicht ausgeschlossen, dass sich 3D Dreiecke überschneiden, wenn sie in die 2D Ebene projiziert werden (eine Parkettierung stellt also keine klassische Triangulierung dar).

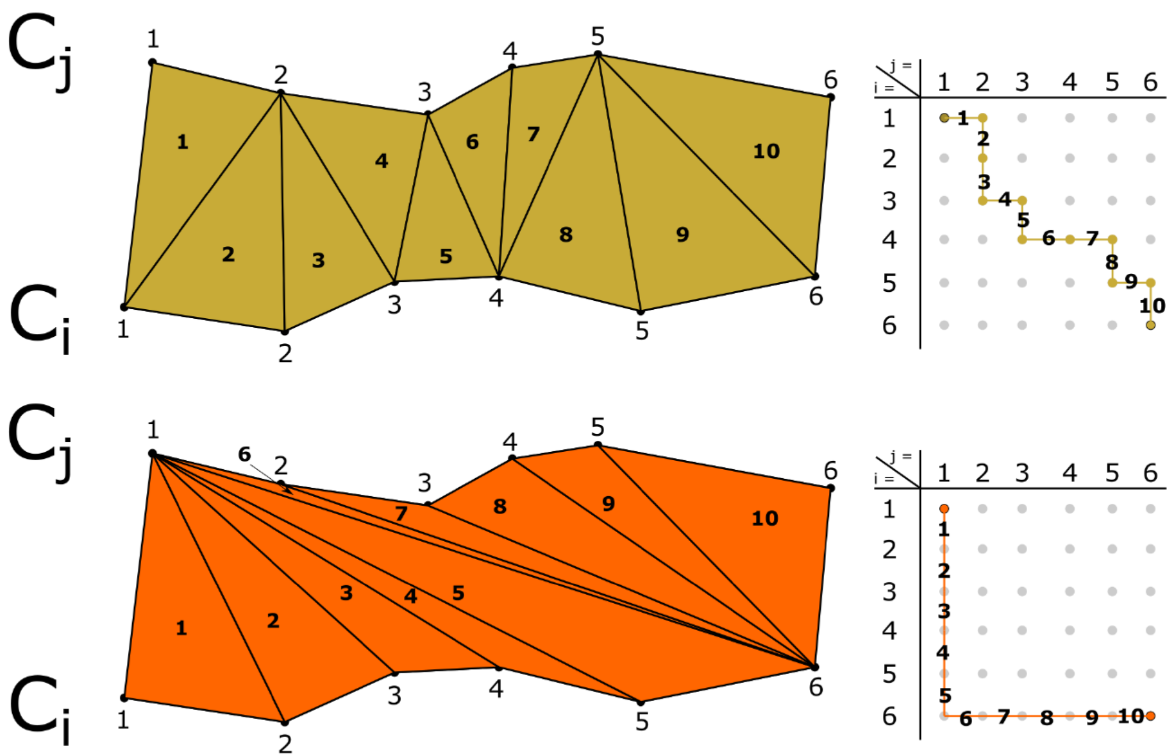


Parkettierungen können mit Hilfe eines Suchgraphens dargestellt werden: jeder Eintrag der Matrix beschreibt eine Verbindungslinie zwischen den Punkten der jeweiligen Zeile und Spalte.



Parkettierung

Jede Parkettierung kann mittels eines Pfades in dem Suchgraphen dargestellte werden



Parkettierung

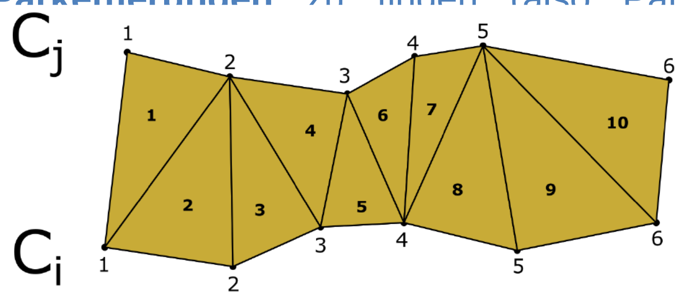
Eine **Gewichtungen der Kanten** in dem Suchgraphen erlauben es, die in einem gewissen Sinne **optimale Parkettierungen** zu finden (also Parkettierungen, die eine gewissen Zielfunktion minimieren; etwa die Gesamtfläche der Parkettierung).

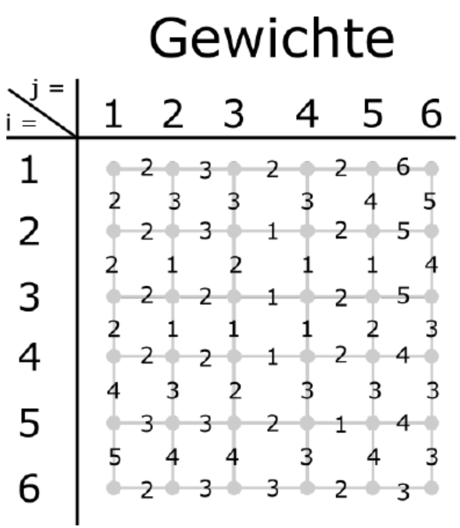
Dazu stellt man Graphen mit gewichteten Kanten auf: einzeln gewichtet, als auch kumulativ gewichtet.

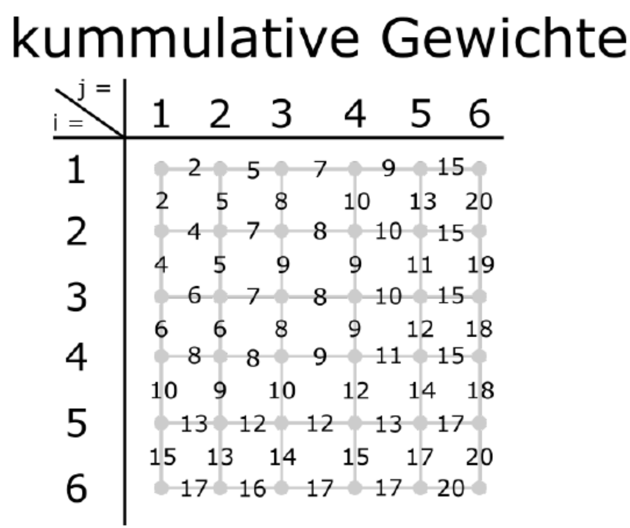
Parkettierung

Eine **Gewichtungen der Kanten** in dem Suchgraphen erlauben es, die in einem gewissen Sinne **optimale Parkettierungen** zu finden (also Parkettierungen, die eine gewissen Zielfunktion minimi … rung).

Dazu stellt man G … zeln gewichtet, als auch kumulativ gewichtet.

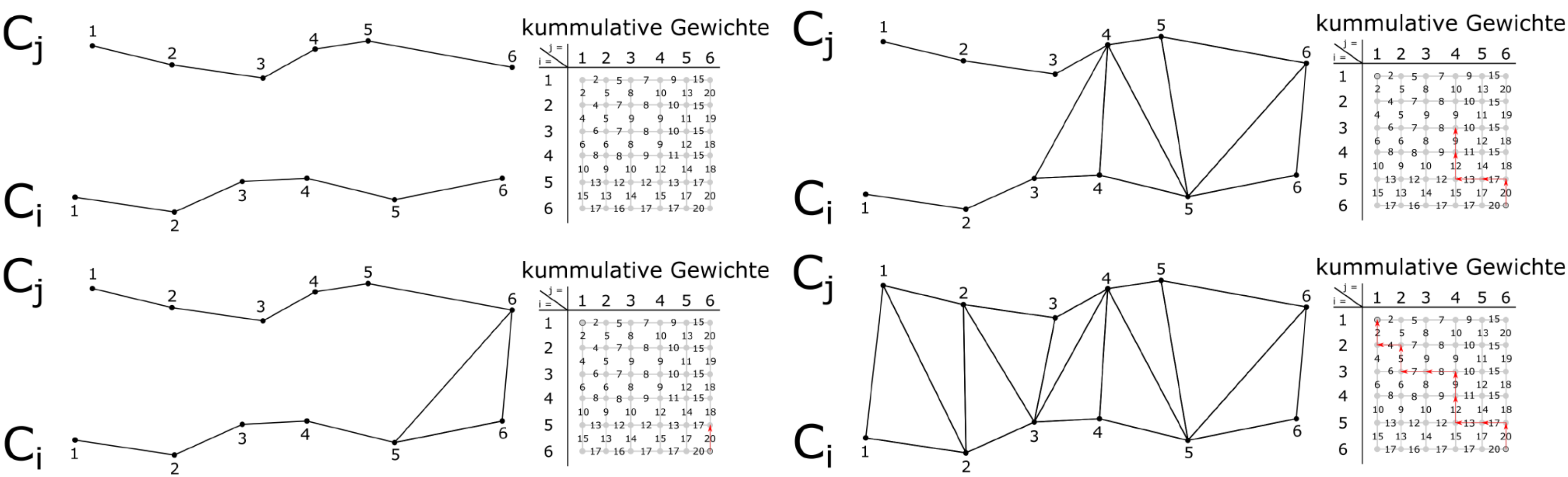






Parkettierung

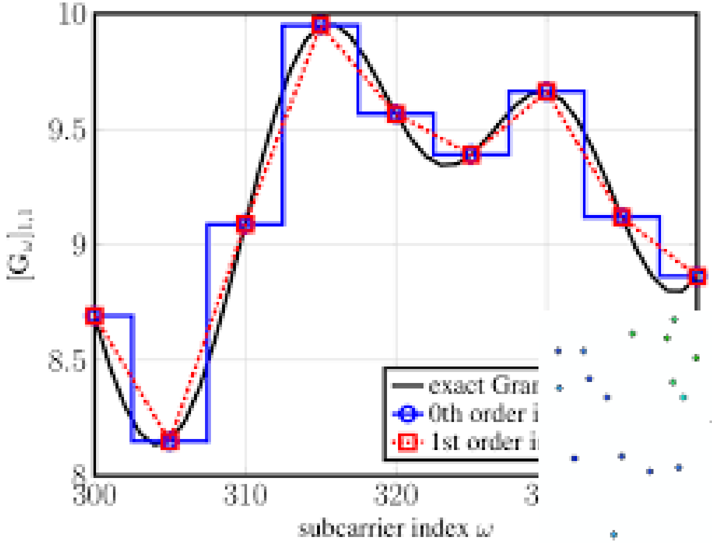
Die optimale Parkettierung ergibt sich durch den kürzesten Pfad im kumuliert gewichteten Graphen. Diese optimale Parketierung muss nicht eindeutig sein.



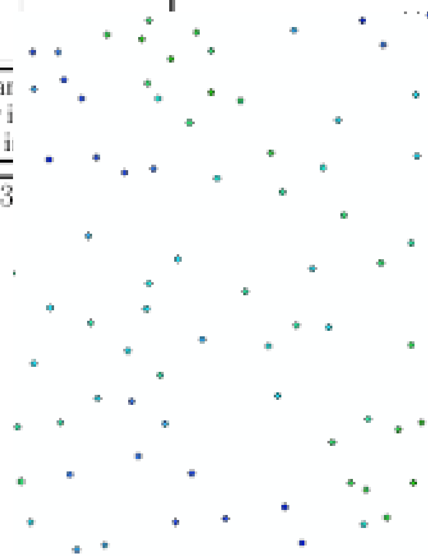
Übersicht

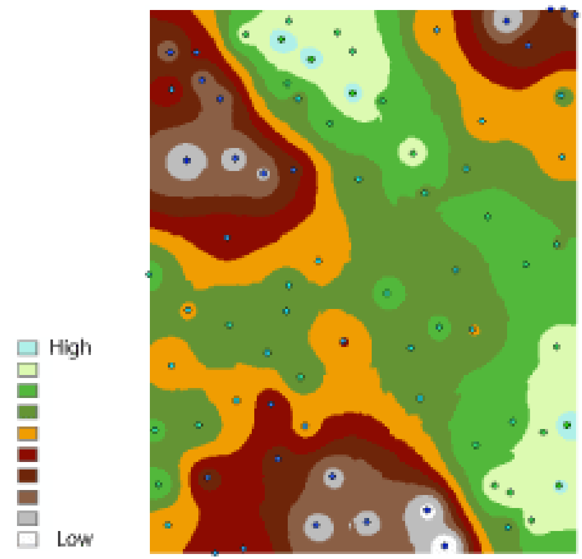
1. Definitionen, Funktionen, Anwendungen
2. Koordinatensysteme und -transformationen
3. Räumliche Datenmodellierung
4. Vermaschungen
5. **Räumliche Interpolation**
6. Transformationen, Filtermethoden

Beispiele



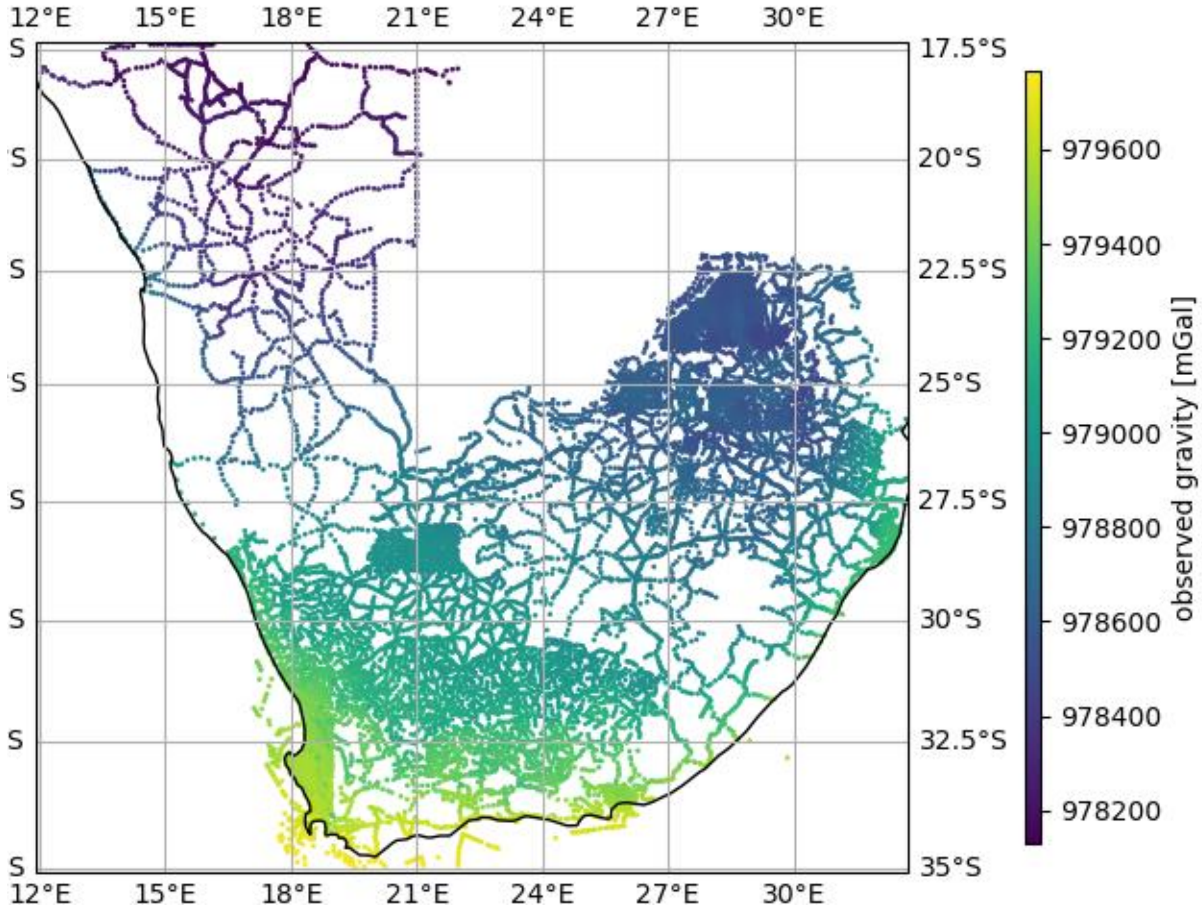
10
9.5
9
8.5
8
300
310
320
subcarrier index ω
exact Grar
0th order i
1st order i





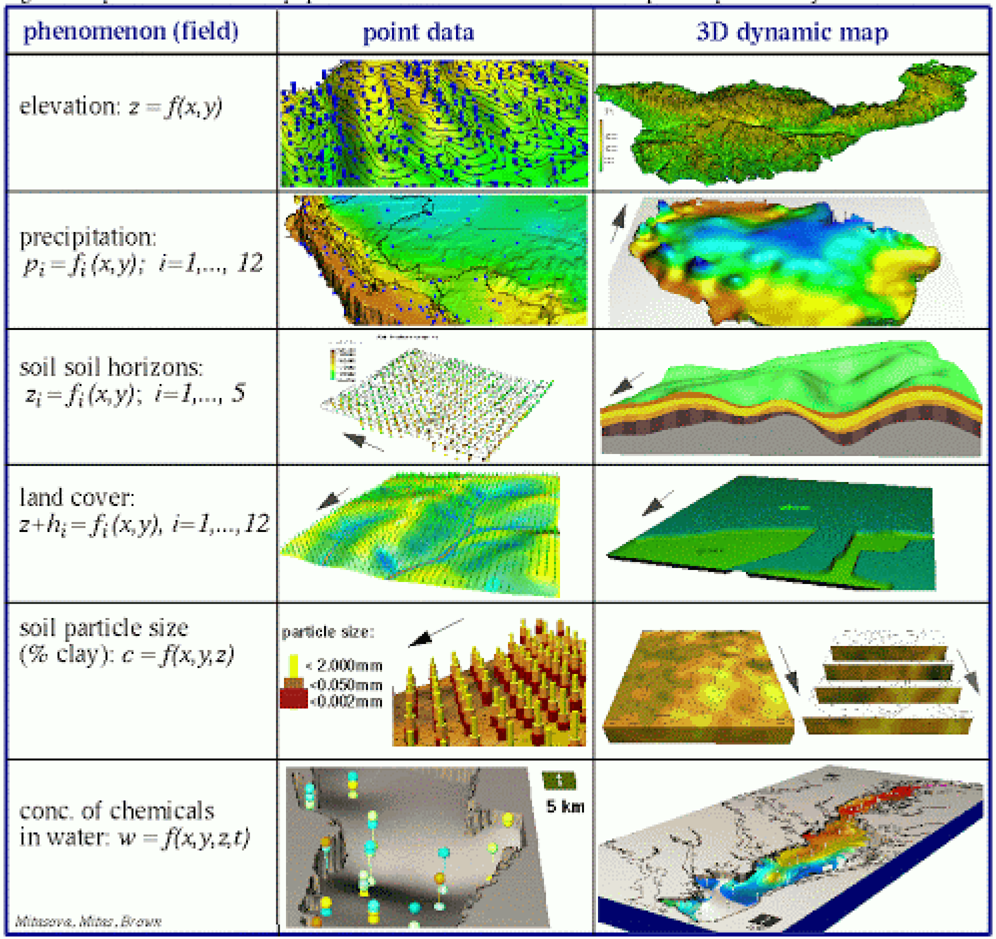
High
Low

Beispiele


12°E
15°E
18°E
21°E
24°E
27°E
30°E
17.5°S
20°S
22.5°S
25°S
27.5°S
30°S
32.5°S
35°S
979600
979400
979200
979000
978800
978600
978400
978200
observed gravity [mGal]

Beispiele

Figure 1. Representation of landscape phenomena as multivariate fields with interpolation performed by the RST method.



fatra.cnr.ncsu.edu/~hmitaso/gmslab/asae97/mitasova973034.html

Interpolation

Im Allgemeinen liegen Messwerte nur an endlich vielen Positionen $x_1, \dots, x_N$ vor (dies können physische Positionen im Raum, Zeitpunkte oder andere abstrakte Positionen sein). Für jede Position x_i liegt ein Messwert y_i für einen Parameter vor.

Das Ziel einer Interpolation ist die „Vorhersage" des gesuchten Parameters y an einer beliebigen Position x, an dem initial kein Messwert vorliegt.

Dies erfolgt zumeist, indem eine Funktion f, mit

$f(x_i) = y_i, i = 1, \dots, N$ (**klassische / exakte Interpolation**) oder zumindest

$f(x_i) \approx y_i, i = 1, \dots, N$ (**Approximation**),

gefunden wird, welche bestimmte Eigenschaften aufweisen soll.

Die „Vorhersage" für eine Position x erfolgt dann über $y = f(x)$.

Interpolation

Gegeben sei $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, N$. Die Interpolationsfunktion liegt zumeist in einen von zwei Formen vor, entweder

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) y_i \,,$$

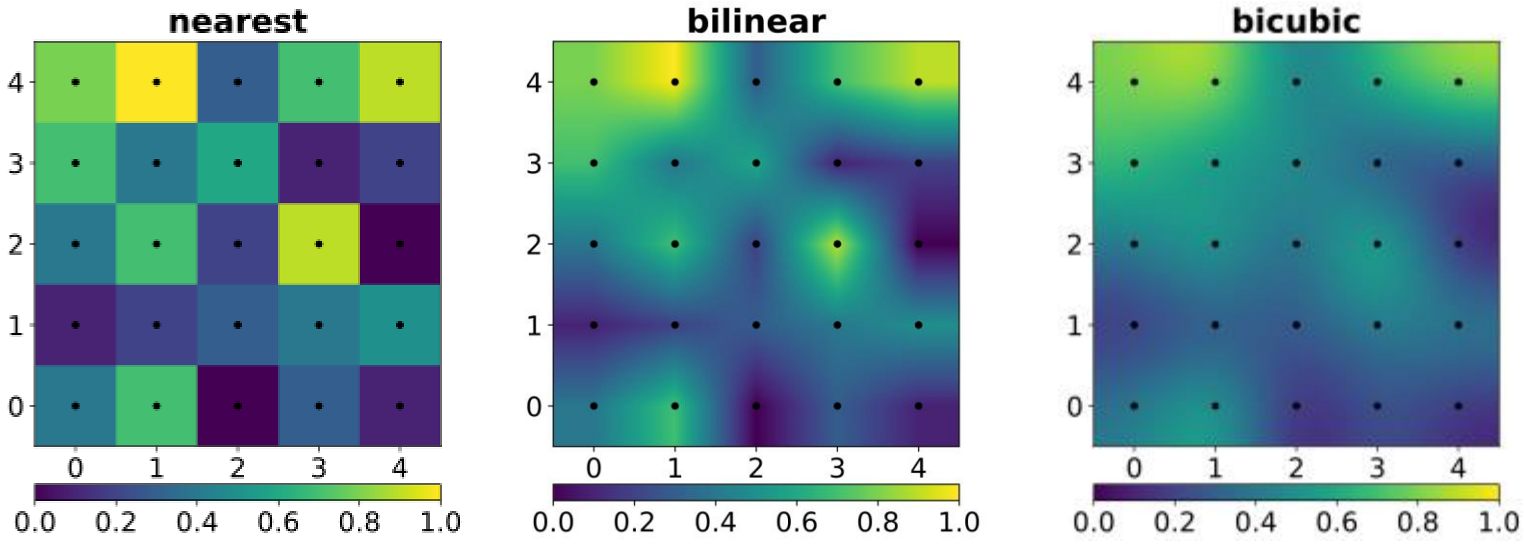
wobei hier die Gewichte λ_i von x abhängen, oder

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(x) \,,$$

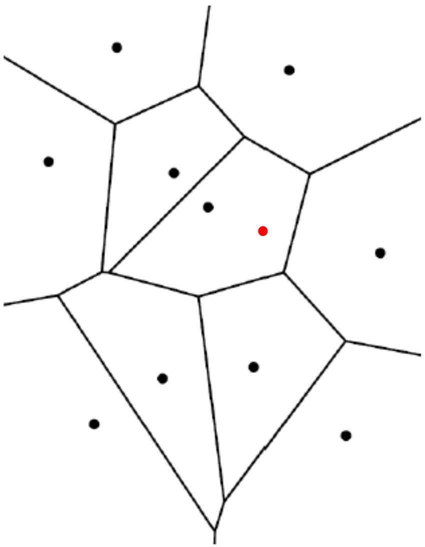
mit konstanten Gewichten λ_i(abhängig von y_i).

Gitter-basierte / Element-basierte Interpolation

- **Nearets Neighbour Interpolation** (basiert auf Voronoi Vermaschung): $f(x)$ diskontinuierlich
- **Natural Neighbour Interpolation** (Voronoi Vermaschung benötigt): $f(x)$ kontinuierlich + differenzierbar
- **Lineare Interpolation auf Triangulationen**: $f(x)$ kontinuierlich
- **Bilinear Interpolation** (benötigt Rechteck-Gitter): $f(x)$ kontinuierlich



Nearest Neighbour Interpolation



Sei $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_N\}$ die Voronoi Vermaschung der Punktmenge $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ und sei y_i ein Parameterwert an einem Punkt p_i, dann

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) y_i$$

mit den Gewichten

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, x \in V_i \\ 0, x \notin V_i \end{cases}$$

Eigenschaften:

- $f(x)$ diskontinuierlich;
- Lokaler Interpolator, der nur auf (p_i, y_i) basiert, wenn $x \in V_i$;
- Extrapolation ist konzeptuell möglich.