

Themenblock 4

Aufgaben mit Lösungshilfe Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1:

Ein Produktionsbetrieb verfügt über 3 Fertigungsabteilungen. In diesen Abteilungen können Störungen im Produktionsablauf auftreten. Wir betrachten die (einfachen) Ereignisse

$$A_i = \{\text{Abteilung } i \text{ arbeitet ungestört}\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

(a) Drücken Sie die folgenden Ereignisse mittels A_i , $i = 1, 2, 3$ aus:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{alle Abteilungen arbeiten ungestört}\}, \\ B &= \{\text{genau zwei Abteilungen arbeiten ungestört}\}, \\ C &= \{\text{genau eine Abteilung arbeitet ungestört}\}. \end{aligned}$$

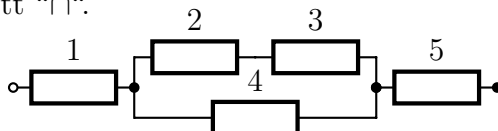
(b) Geben Sie eine sprachliche Formulierung der folgenden Ereignisse an:

$$D = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3, \quad E = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \quad F = C \cup D.$$

Aufgabe 2:

In einer elektrischen Schaltung bedeute: $A_k = \{\text{Element } k \text{ fällt aus}\}$, $A = \{\text{Gesamtsystem fällt aus}\}$ ¹.

(a) Stellen Sie für folgenden Schaltplan das Ereignis A durch eine geeignete Verknüpfung der Ereignisse A_k , $k = 1, \dots, 5$ dar. Verwenden Sie hier für die Verknüpfung die Operationen: Vereinigung “ \cup “ und Schnitt “ \cap “.



(b) Entwerfen Sie eine Schaltung für die Ereignisgleichung $A = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$, d.h. eine Schaltung für ein System, welches genau dann ausfällt, wenn $(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$ eintritt.

Aufgabe 3:

Es werden 100 bei einer Sichtprüfung ausgesonderte Kugellagerringe auf die Einhaltung der vorgeschriebenen Abmessungen (Merkmal M_1), auf ihre Oberflächengüte (Merkmal M_2) und auf ihren Härtegrad (Merkmal M_3) geprüft.

Prüfen Sie, ob die Anzahlen der als fehlerhaft ermittelten Kugellagerringe zueinander im Widerspruch stehen, siehe Tabelle 1.

Anleitung: Untersuchen Sie die Daten in Tabelle 1 auf die Anzahlen der Kugellagerringe mit genau k ermittelten Fehlern, $k \in \{1; 2; 3\}$.

¹Das Gesamtsystem fällt genau dann aus, wenn kein Weg vor links nach rechts existiert bei dem nur funktionierende Elemente passiert werden.

| Fehlermerkmal | Anzahl |
|---------------------------|--------|
| M_1 | 50 |
| M_2 | 30 |
| M_3 | 23 |
| M_1 und M_2 | 8 |
| M_1 und M_3 | 20 |
| M_2 und M_3 | 10 |
| M_1 und M_2 und M_3 | 5 |

Table 1: Fehlermerkmal und absolute Häufigkeiten der aufgetretenen Fehler.

Aufgabe 4:

Aus einer Sendung von Maschinenteilen, unter denen sich n einwandfreie und m minderwertige befinden mögen, wähle man zur Kontrolle willkürlich s Stück aus. Bei der Überprüfung zeige sich, dass die ersten k der s Maschinenteile einwandfrei sind.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das $(k + 1)$ -te Maschinenteil einwandfrei ist.

Aufgabe 5:

Für die zufälligen Ereignisse A und B gelten die Relation $A \subset B$ sowie die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0.6$ und $P(B) = 0.8$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der nachstehenden Ereignisse.

- (a) $P(A \cap B)$ (b) $P(A|B)$ (c) $P(B|A)$ (d) $P(A \cup B)$ (e) $P(\bar{A}|B)$
(f) $P(B|\bar{A})$ (g) $P(A \cup \bar{B})$ (h) $P(\bar{A} \setminus B)$ (i) $P(B \setminus A)$

Aufgabe 6:

Ist für die Elemente $A \in \mathcal{E}$ und $B \in \mathcal{E}$ eines Ereignisfeldes \mathcal{E} die Relation

$$P(A|B) = P(A)$$

erfüllt, so heißt A *unabhängig* vom Ereignis B .²

Die zufälligen Ereignisse A und B seien unabhängig mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0.6$ und $P(B) = 0.8$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- (a) $P(A \cap B)$ (b) $P(A|B)$ (c) $P(B|A)$ (d) $P(A \cup B)$ (e) $P(\bar{A}|B)$
(f) $P(B|\bar{A})$ (g) $P(A \cup \bar{B})$ (h) $P(\bar{A} \cap B)$ (i) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Aufgabe 7:

Entscheiden Sie, welche der folgenden Zufallsvariablen $X(\omega)$ diskret bzw. stetig sind. Geben Sie die möglichen Werte der Zufallsgrößen an.

- (a) $X(\omega)$... Täglicher Verbrauch an Elektroenergie in einem Haushalt
(b) $X(\omega)$... Anzahl der Ausschussteile eines Lieferpostens
(c) $X(\omega)$... Benzinverbrauch eines PKW auf 100 km

²Es folgt daraus auch B unabhängig von A .

Aufgabe 8:

In einem Betrieb sind durchschnittlich 96% der hergestellten Erzeugnisse brauchbar. Von jeweils 100 brauchbaren Erzeugnissen eignen sich im Mittel 75 für den Einbau in Präzisionsgeräten.

Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

A ... Ein zufällig ausgewähltes Erzeugnis ist brauchbar.

B ... Ein zufällig ausgewähltes Erzeugnis eignet sich für den Einbau in Präzisionsgeräten.

- Geben Sie die Ereignisrelation zwischen A und B an.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein brauchbares Erzeugnis für den Einbau in Präzisionsgeräten geeignet ist.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erzeugnis, das für den Einbau in Präzisionsgeräten geeignet ist, brauchbar ist.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein unbrauchbares Erzeugnis für den Einbau in Präzisionsgeräten geeignet ist.

Aufgabe 9:

Drei Maschinen produzieren gleichartige Teile, die gemeinsam in einem Zwischenlager aufbewahrt werden. Die erste und zweite Maschine produzieren pro Zeiteinheit gleich viel, die dritte Maschine jedoch doppelt soviel wie Maschine 1. Die durchschnittlichen Ausschussquoten der Maschinen betragen 2%, 1% bzw. 5%.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig dem Lager entnommenes Teil Ausschuss ist.
- Ein zufällig aus dem Lager ausgewähltes Teil sei kein Ausschuss. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Teil auf Maschine 3 gefertigt wurde.

Aufgabe 10:

Die Zufallsgröße $X(\omega)$ besitze folgendes Verteilungsgesetz:

| | | | | | |
|--------------|-----|------|-----|------|-----|
| $X = x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 |
| $P(X = x_i)$ | 0.1 | 0.25 | 0.5 | 0.05 | c |

- Berechnen Sie die Konstante c und die Verteilungsfunktion F_X der Zufallsgröße $X(\omega)$.
- Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_X von $X(\omega)$.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X(\omega)$

A ... Werte nicht größer als 4

B ... Werte kleiner als 3

C ... mindestens den Wert 3

D ... höchstens den Wert 3

annimmt.

Aufgabe 11:

Die Zufallsgröße $X(\omega)$ hat die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x^2 & x \in [0, 2] \\ 0 & x \notin [0, 2] \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Konstante c und die Verteilungsfunktion F_X $X(\omega)$. Skizzieren Sie F_X .

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X(\omega)$

A... Werte nicht größer als 1

B... Werte zwischen 1 und 3

C... Werte zwischen 1 und 1.5

D... den Wert 1

annimmt.

Aufgabe 12:

Die stetige Verteilung mit der Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, c\}$,

$$f(t) = \begin{cases} c & \text{wenn } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt *Gleichverteilung* auf dem Intervall $[a, b]$.

(a) Berechnen Sie c , so dass f eine Verteilung beschreibt.

(b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion F zur Dichtefunktion f . Zeichnen Sie die Schaubilder von f und F für $a = -2$ und $b = 1$.

(c) Berechnen Sie mithilfe der Verteilungsfunktion allgemein

$$P\left(\frac{a+b}{2} \leq X < b\right)$$

Aufgabe 13:

Die Zufallsgröße X sei standardnormalverteilt, d. h. $X \sim N(0, 1)$.

Berechnen Sie unter Benutzung der tabellierten Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung:

(a) $P(X < 2.44)$

(b) $P(X \geq -1.42)$

(c) $P(X < -1.44)$

(d) $P(-2.44 \leq X < 2.44)$

(e) $P(X \geq 2.04)$

Wiederholen Sie die Aufgabe für eine normalverteilte Zufallsgröße mit $X \sim N(3, 4)$ unter Umrechnung in die Standardnormalverteilung und Verwendung von Φ .

Aufgabe 14:

Bestimmen Sie anhand der Tabelle für die Verteilungsfunktion einer $N(0; 1)$ -verteilten Zufallsgröße $U(\omega)$ die jeweils unbekannte Intervallgrenze.

(a) $P(U < a) = 0.5$

(b) $P(U < b) = 0.3210$

(c) $P(0.15 \leq U < c) = 0.35$

(d) $P(-0.22 \leq U < d) = 0.413$

(e) $P(-e \leq U < e) = 0.95$

(f) $P(|U| \leq f) = 0.4682$

(g) $P(U \geq g) = 0.8002$

(h) $P(U \geq h) = 0.4010$.

Aufgabe 15:

In einer Warenlieferung von $N = 100$ Stück befinden sich $M = 4$ defekte. Bei einer Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang $n = 3$ bezeichne X die Anzahl der defekten Stücke.

Berechnen Sie die Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X = m)$ unter der Annahme, dass X einer *Binomialverteilung* $\text{bin}(n, p)$ unterliegt.

Aufgabe 16:

Aus einem Lieferposten automatisch hergestellter Kondensatoren werden 100 Stück zufällig herausgegriffen und an ihnen die jeweilige Kapazität gemessen. Ein Kondensator ist unbrauchbar, wenn seine Kapazität nicht in den geforderten Toleranzgrenzen liegt.

Der durchschnittliche, aus Erfahrung bekannte Ausschussprozentsatz betrage 3%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:

- (a) unter den 100 Kondensatoren genau 3 unbrauchbare sind.
- (b) unter den 100 Kondensatoren höchstens 3 unbrauchbare sind.

Hinweis: Überlegen Sie, welche Verteilung der Zufallsvariablen angenommen werden kann.

Selbständige Bearbeitung Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 17:

Gegeben seien jeweils eine Menge Ω , sowie zwei Teilmengen $A, B \subset \Omega$.

- (a) $\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}$, $A = \{4, 5, 6, 7, 9, 11\}$, $B = \{3, 5, 9, 20\}$
- (b) $\Omega = [-1, 3]$, $A = [0, 1]$, $B = (\frac{1}{2}, 2]$
- (c) $\Omega = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 3\}$, $B = [0, \infty)$.

Bilden Sie die Mengen \bar{A} , \bar{B} , $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$, $B \cap \bar{A}$, $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \bar{B}$, $B \cup (\overline{B \cup \bar{A}})$. Komplemente sind jeweils bezüglich der Menge Ω zu bilden.

Aufgabe 18:

Die Symbole \cup und \cap aus der Mengenlehre haben nicht nur optisch eine enge Verwandtschaft zu den Symbolen \vee und \wedge aus der Logik. So gilt beispielsweise für zwei Mengen A und B :

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \wedge (x \in B).$$

Finden Sie in diesem Sinne äquivalente Formulierungen für die folgenden Ausdrücke:

- (a) $x \in (A_1 \cup A_2)$
- (b) $x \in ((A_1 \cap A_2) \cup \bar{A}_3)$
- (c) $x \notin \bigcup_{i=1}^n A_i$
- (d) $x \in A_1 \setminus A_2$

Aufgabe 19:

Seien A_i , $i \in \mathbb{N}$ und $A_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}$ Teilmengen einer Menge Ω .

(a) Schreiben Sie die folgenden Aussagen unter Verwendung von Quantoren (\forall , \exists):

$$(i) x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \quad (ii) x \in \bigcup_{i \in \{1, \dots, 15\}} \bar{A}_i, \quad (iii) x \in \bigcup_{i=1}^8 \bigcap_{j=1}^9 A_{i,j}.$$

(b) Schreiben Sie die folgenden Aussagen unter Verwendung von Schnitt- und Vereinigungssymbolen:

$$(i) \forall i \in \{1, \dots, 10\} : x \notin A_i, \quad (ii) \exists i \in \mathbb{N} \exists j \in \mathbb{N} : (x \in A_i) \wedge (x \in B_j).$$

Aufgabe 20:

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebig ausgewählte natürliche Zahl³ N

(a) bei Quadrierung

(b) bei Erhebung in die vierte Potenz

(c) bei Multiplikation mit einer beliebigen natürlichen Zahl

eine Zahl ergibt, die mit einer 1 endet.

Aufgabe 21:

Ein (mathematisches) Pendel schwingt ohne Dämpfung. Die maximale Auslenkung des Pendels betrage 2° .

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu einem beliebig gewählten Zeitpunkt t die Auslenkung größer als 1° ist.

Vergleichen Sie mit der Lösung der Schwingungsgleichung $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$ zur Beschreibung einer freien ungedämpften Schwingung.

Hinweis: Für kleine Auslenkungen kann $\sin \varphi \approx \varphi$ angenommen werden.

Aufgabe 22:

Zur Kontrolle der Zuverlässigkeit von Federelementen wird ein beschleunigtes Prüfverfahren benutzt:

- Einwandfreie Federn werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 auch als einwandfrei eingestuft.
- Untaugliche Federn werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8 als solche erkannt.

Durchschnittlich sind 3% der produzierten Federn untauglich.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) eine als gut eingestufte Feder untauglich ist.

(b) eine als untauglich eingestufte Feder gut ist.

(c) Berechnen Sie, wie viele tatsächlich einwandfreie Federn enthält im Mittel ein Posten von 350 als einwandfrei eingestuften Federn.

³Unter "beliebig gewählter Zahl" soll hier eine k -stellige ($k > 1$) ganze Zahl verstanden werden, bei der jede Ziffer zwischen 0 und 9 gleichmäßig ist.

Aufgabe 23:

Ein System bestehe aus 20 Elementen der gleichen Zuverlässigkeit p . Alle Elemente arbeiten unabhängig voneinander. Die Zuverlässigkeit des Systems soll mindestens 0,9 betragen. Wie groß muss p mindestens sein, wenn die 20 Elemente

- (a) in Reihe geschaltet, (b) parallel geschaltet sind?

Aufgabe 24:

Zur Produktion einer bestimmten Sorte von Bauteilen stehen 8 alternative Maschinen zur Verfügung. In der folgenden Tabelle sind deren Anteil an der Gesamtproduktion, sowie der jeweilige Ausschussanteil pro Maschine gegeben:

| Maschine | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------------------------------------|----|----|-----|-----|----|----|----|----|
| Ausschussanteil in % | 1 | 1 | 0,2 | 0,2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Anteil an der Gesamt-Produktion in % | 10 | 10 | 20 | 20 | 10 | 10 | 10 | 10 |

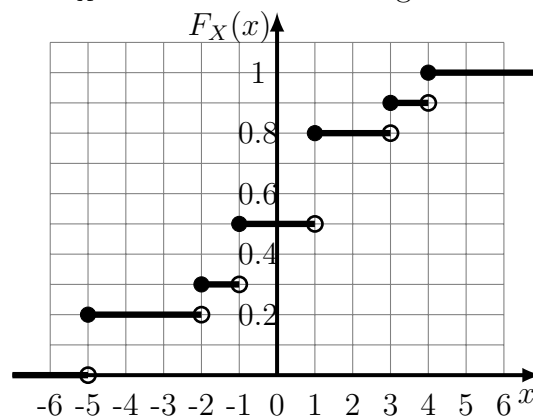
- (a) Die geplante Gesamtproduktion im nächsten Jahr beläuft sich auf 250 000 Bauteile. Wieviele Ausschussteile werden sich erwartungsgemäß darunter befinden?
- (b) Aus der laufenden Produktion wird zufällig ein Bauteil herausgegriffen. Es stellt sich heraus, dass dies Ausschuss ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil von Maschine 8 gefertigt wurde?
- (c) Die Maschinen 5 bis 8 sollen durch eine neue Maschine ersetzt werden, welche dann einen Anteil von 40% an der Gesamtproduktion haben soll. Wie groß darf der Ausschussanteil dieser Maschine maximal sein, damit der Ausschussanteil in der Gesamtproduktion maximal 0,5% beträgt?

Hinweis: Geben Sie hier die Wahrscheinlichkeiten auf 4 Nachkommastellen gerundet an.

Aufgabe 25:

Gegeben ist eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F_X wie in der Grafik dargestellt.

- (a) Ist X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable?
- (b) Geben Sie die Menge M an, welche alle möglichen Werte von X enthält.
- (c) Stellen Sie für alle $x \in M$ die Werte $P(X = x)$ in einer Verteilungstabelle und einem Stabdiagramm dar.
- (d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten
- (i) $P(X \leq 3)$,
 - (ii) $P(X > 5)$,
 - (iii) $P(X = 2)$,
 - (iv) $P(X < 9)$,
 - (v) $P(-3 < X \leq 3)$, und
 - (vi) $P(\frac{X^2}{2} \leq 3)$.



Aufgabe 26:

- (a) Berechnen Sie die Varianz σ^2 für eine Zufallsgröße $X(\omega)$ mit $X(\omega) \sim N(2; \sigma^2)$, wenn

$$P(0 \leq X < 4) = 0.68269.$$

- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert μ für eine Zufallsgröße $X(\omega)$ mit $X(\omega) \sim N(\mu; 16)$, wenn

$$P(X < 7) = 0.3265.$$

Aufgabe 27:

Ein Automat stellt Wellen her. Der Automat arbeite mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0.5$ mm und ohne systematischen Fehler. Der Automat wurde auf den Wellendurchmesser $d = 349.8$ mm eingestellt.

Bei der Herstellung werden drei Kategorien von Wellen betrachtet:

A ... Welle ist Ausschuss, wenn $d < 349.2$ mm

B ... Welle ist normgerecht, wenn $349.2 \text{ mm} \leq d < 350.5$ mm

C ... Welle ist nachzuarbeiten, wenn $d \geq 350.5$ mm ist.

Der Durchmesser einer Welle werde als normalverteilt angenommen.

- Diskutieren Sie, unter welchen Bedingungen die Voraussetzung über die Verteilung des Wellendurchmessers zutrifft.
- Berechnen Sie näherungsweise (gerundet auf drei Nachkommastellen) die Wahrscheinlichkeiten für die Kategorien *A*, *B* und *C* mit Hilfe der Tabelle für die Standardnormalverteilung einer Zufallsgröße, d. h. mittels $X(\omega) \sim N(0, 1)$.
- Ermitteln Sie, wie viele von dreihundert produzierten Wellen durchschnittlich Ausschuss sind.

Aufgabe 28:

Es sei $\lambda > 0$ eine beliebige Zahl. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass f die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariable X ist.
- Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F_X .
- Sei hier $\lambda = 2$. Skizzieren Sie den Verlauf von f und F_X . Verdeutlichen Sie in beiden Grafiken die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X \leq 2,5)$. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.
- Wie muss λ gewählt werden, damit $P(X \geq 3) = 0,5$ gilt?