Themenblock 5

Aufgaben mit Lösungshilfe Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1:

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{, für } x \leq 1 \\ ax + b & \text{, für } 1 < x \leq \frac{7}{2} \\ c + \ln(x - \frac{5}{2}) & \text{, für } x > \frac{7}{2} \end{cases}$$

bestimme man die Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion überall stetig und differenzierbar ist. Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[-2, 6]$.

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = ax + b$, sowie $f_3 : (\frac{5}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = c + \ln(x - \frac{5}{2})$ auf ihren Definitionsbereichen stetig und differenzierbar sind.

Aufgabe 2:

Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq b$. Von der Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei bekannt, dass sie an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist.
Zeigen Sie, dass die Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Ableitungsfunktionen der Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen mit Hilfe des entsprechenden Satzes aus der Vorlesung.

(a) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$

(b) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

(c) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

(d) $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(Hinweis: Die Funktion sinh in Teilaufgabe (d) heißt *sinus hyperbolicus* und ist durch $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ definiert.)

Aufgabe 4:

Ermitteln Sie sämtliche partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung für die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bei (a) – (e) und $D \subseteq \mathbb{R}^3$ bei (f).

(a) $f(x, y) = x^2y^3 + xy^4 - x^2 + 2\sqrt{y}$

(b) $f(x, y) = e^{x/y}$

(c) $f(x, y) = e^{2y}\sin x + \frac{y}{x}$

(d) $f(x, y) = x\ln(x^2 - y)$

(e) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

(f) $f(x, y, z) = x^2ye^z + \sin(x - y) - xz^3$

Aufgabe 5:

Gegeben ist die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x \cdot e^{2x}$$

(a) Berechnen Sie unter Benutzung geeigneter Ableitungsregeln die dritte Ableitungsfunktion von f.

(b) Untersuchen Sie mittels vollständiger Induktion, ob die n-te Ableitungsfunktion $f^{(n)}$ von f durch

$$g_n(x) = e^{2x} \cdot \left(n \cdot 2^{n-1} + 2^n \cdot x\right) , \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}$, beschrieben ist.

(c) Berechnen Sie zur Funktion g_n in Formel (1) in Abhängigkeit von n die Nullstelle.

Aufgabe 6:

(a) Durch Erwärmen vergrößert sich der Radius einer Kugel von $r_1 = 2.000\text{mm}$ auf $r_2 = 2.034\text{mm}$. Berechnen Sie mithilfe des Differentials $\mathrm{d}V$ die (ungefähre) relative Zunahme des Kugelvolumens.

(b) Bestimmen Sie, mit welcher Genauigkeit der Durchmesser D einer Kugel zu messen ist, wenn der relative Fehler des daraus berechneten Kugelvolumens unter 1% liegen soll.

Aufgabe 7:

Die Bestimmung des (elektrischen) Widerstandes R mittels Wheatstone'scher Brückenschaltung[1] ergibt sich aus

$$R = \frac{W \cdot x}{L - x}$$

wobei W den Vergleichswiderstand, L die Länge des Schiebewiderstandes und x des Abgleiches bezeichnen.

Berechnen Sie die Stelle x, an welcher sich bei der Bestimmung von R der kleinste relative Fehler ergibt. Geben Sie dessen Größe an.

Aufgabe 8:

Die durch eine Funktionsgleichung der Form

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \text{ mit } \ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$$

und $x \in \mathbb{R}$ beschriebene Kurve wird *Parabel dritter Ordnung* genannt.

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c und d jener Funktion f, deren Funktionsgraph G_f:

(1) den Koordinatenursprung $O(0, 0)$ enthält sowie

(2) den Punkt $P(1, -2)$ als Wendepunkt besitzt und

(3) in P eine Wendetangente besitzt, deren Nullstelle $x_1 = 2$ ist.

[1] Vgl. beispielsweise http://de.wikipedia.org/wiki/Wheatstonesche_Messbrücke

Aufgabe 9:

Gegeben ist ein Ellipsenbogen c als Graph der Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ mit

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8}}, \quad x \in D_f$$

Berechnen Sie die Funktionsgleichung des Kreisbogens k, der c an der Stelle $x_0 = 0$ berührt und dort dieselbe Krümmung $\kappa(x_0)$ besitzt. Dieser wird *Schmiegkreis* von c im Kurvenpunkt $P(x_0, f(x_0))$ genannt.

Aufgabe 10:

Ermitteln Sie für folgende Kurven, die Stelle an welchen die Funktion die stärkste Krümmung aufweist. Geben Sie den zugehörigen Krümmungskreis an und fertigen Sie eine Skizze an (per Hand oder mit einer Software ihrer Wahl).

(a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x)$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

Aufgabe 11:

Gegeben ist die Gleichung

$$1 = 2 \cdot \frac{\ln 3}{x^2} \tag{2}$$

(a) Geben Sie Intervalle möglichst kleiner Länge mit ganzzahligen Intervallgrenzen an, zwischen denen jeweils Lösungen x^* der Gleichung (2) liegen.

(b) Bestimmen Sie eine Lösung x^* der Gleichung (2) auf 4 Nachkommastellen gerundet mithilfe des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 12:

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe von 3 Iterationen des Newton-Verfahrens mit dem Startpunkt $x_0 = 1$ näherungsweise die Lösung der Gleichung

$$\cos x = x.$$

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens (4 Iterationen) näherungsweise den Wert von $\sqrt{2}$.

Aufgabe 13:

Gegeben sind die Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2 und P_3 einer Bézier-Kurve k dritter Ordnung

$$P_0(-2, 0, 0), \quad P_1(-2, 0, +2), \quad P_2(0, +1, +1), \quad P_3(+1, +1, +1).$$

(a) Geben Sie die Bézier-Darstellung von $k \subset \mathbb{R}^3$ unter Verwendung der Bernstein-Polynome dritten Grades an (letztere sind explizit anzugeben).

(b) Berechnen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a) einen Richtungsvektor der Kurventangente an die Bézier-Kurve in einem beliebigen Kurvenpunkt.

Zeigen Sie, dass die Richtungsvektoren im Start- und Endpunkt der Bézier-Kurve durch das Kontrollpolygon $P_0 - P_1 - P_2 - P_3$ bestimmt sind.

Aufgabe 14:

Gegeben sind die vektorwertigen Funktionen $t \mapsto f(t)$ und $t \mapsto g(t)$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{3}{2} \cdot \sin(3t) \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \tag{3}$$

über derselben reellen Variable $t \geq 0$.

(a) Ordnen Sie den vektorwertigen Funktionen in Formel (3) die Lissajous-Figuren in Abbildung 1 zu.

Begründen Sie graphisch mithilfe der Amplituden der in den Koordinatenfunktionen beschriebenen Schwingungen und/oder der Frequenzverhältnisse.

(b) Berechnen Sie für die Funktion f aus Formel (3) in $[0, 2\pi)$ alle horizontalen und vertikalen Tangenten an die Lissajous-Figuren und geben Sie diese in Punkt-Richtungsform an.

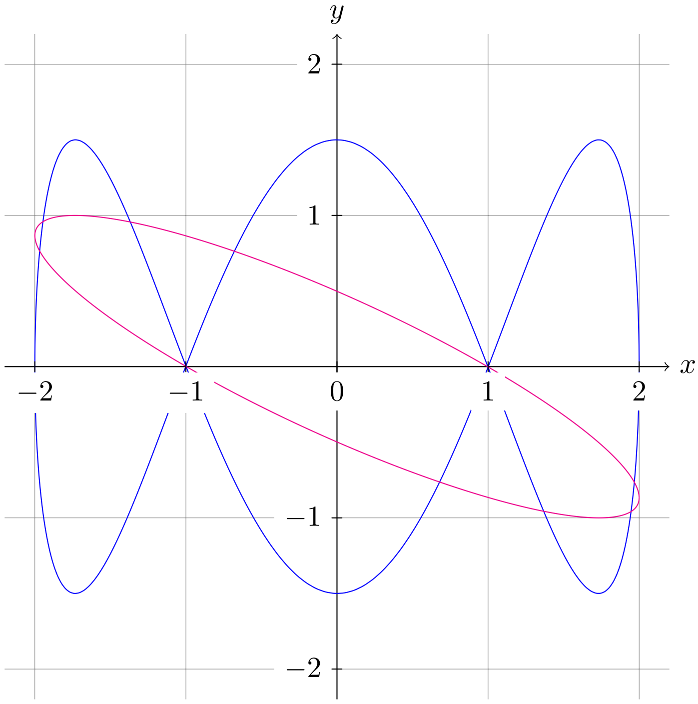

Figure 1: Lissajous-Figuren zu den vektorwertigen Funktionen f und g in Formel (3).

(c) Bestimmen Sie aus der Lissajous-Figur zur Funktion g die Phasendifferenz zwischen den Schwingungen in den Koordinatenfunktionen.

Aufgabe 15:

Rollt ein Kreis k mit Radius r auf der Außenseite eines Kreises k_0 mit Radius $R > r$ ab, ensteht als Ortskurve eines mit k fest verbundenen Punktes P eine sogenannte *Epizykloide* c.

Die Rollkurve c wird durch die vektorwertige Funktion

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = (R + r) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - \mu r \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{R+r}{r} t\right) \\ \sin\left(\frac{R+r}{r} t\right) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{4}$$

beschrieben, worin $\mu > 0$ die relative Lage von P zum Rollkreis k_0 angibt.

Speziell sind die Parameterwerte $R = 5$, $r = 1$ und $\mu = 1$ sowie $t \in [0, 2\pi)$ gewählt, siehe hierzu Abbildung 2.

(a) Berechnen Sie aus der Formeldarstellung (4) unter Benutzung der Ableitungsregeln die Vektoren der die Momentangeschwindigkeit $\dot{f}(t)$ und -beschleunigung $\ddot{f}(t)$ in Abhängigkeit der Variablen t.

Für den Betrag $v(t)$ der Momentangeschwindigkeit gilt

$$[v(t)]^2 = \left[\dot{f}_1(t)\right]^2 + \left[\dot{f}_2(t)\right]^2$$

worin $\dot{f}_1(t)$ bzw. $\dot{f}_2(t)$ die ersten Ableitungen von $f_1(t)$ bzw. $f_2(t)$ nach t bezeichnen, siehe Formel (4).

(b) Berechnen Sie jene Argumente $t_0 \in [0, 2\pi)$, für die

$$[v(t_0)]^2 \ \rightarrow \ \text{max.}$$

und damit auch $v(t_0)$ maximal. Geben Sie den lokal maximalen Geschwindigkeitsbetrag $v(t_0)$ an.

(c) Zeigen Sie durch Auswertung von $f(t)$ in Formel (4), dass an den Stellen t_1 mit

$$t_1 = \frac{2k}{5} \cdot \pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ein Punkt auf dem Kreis k_0 erhalten wird.

Geben Sie für alle $t_1 \in [0, 2\pi)$ die Momentangeschwindigkeit $\dot{f}(t_1)$ und -beschleunigung $\ddot{f}(t_1)$ an und tragen Sie die Richtungen $\ddot{f}(t_1)$ in Abbildung 2 ein.

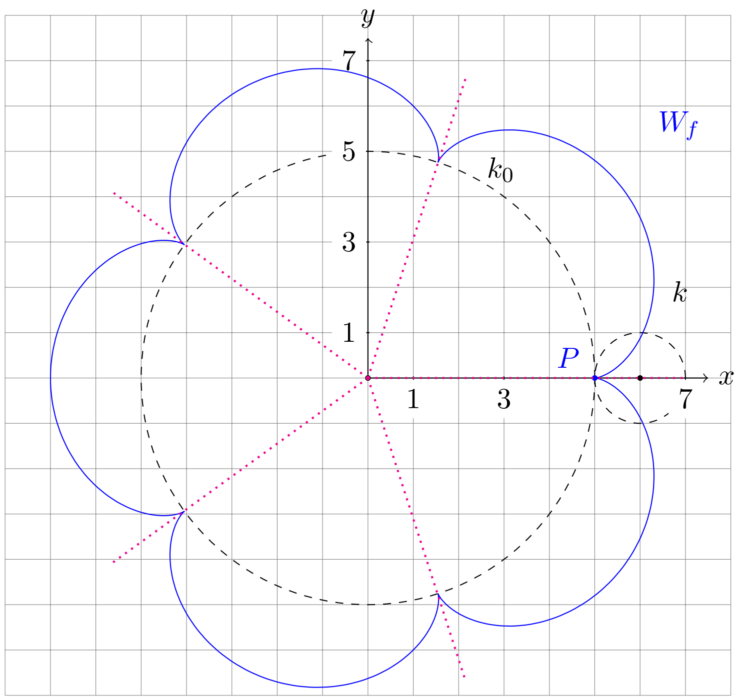

Figure 2: Epizykloide für Kreisradien $R = 5$, $r = 1$, Lageparameter $\mu = 1$ eines mit k fest verbundenen Punktes P.

Selbständige Bearbeitung Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 16:

Gegeben sei die Funktion $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{, falls} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls} \quad x = 0 \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f im gesamten Definitionsbereich stetig und differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitungsfunktion f'.

(b) Untersuchen Sie auch f' auf Stetigkeit.

Aufgabe 17:

Bestimmen Sie jeweils alle Punkte des Funktionsgraphen G_f zur Funktion f, die eine zur x-Achse parallele Tangente besitzen.

(a) $f : x \mapsto y = 5 \cdot e^{-x^2}$

(b) $f : x \mapsto y = 3(x-2)^2(x-1)$

(c) $f : x \mapsto y = \sin x \cdot \cos x$

(d) $f : x \mapsto y = 4x^3 - 6x^2 - 9x$

(e) $f : t \mapsto y = (2-t) \cdot e^{-5t}$

Als Definitionsbereich wird jeweils $D = \mathbb{R}$ festgelegt.

Aufgabe 18:

(a) Bestimmen Sie diejenigen Punkte des Funktionsgraphen zu $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$, in denen die Tangenten parallel zur Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x - 2$ verlaufen.

(b) Berechnen Sie den spitzen Winkel, unter welchem sich die Funktionsgraphen zu den Funktionen $f : x \mapsto y = \sin x$ und $h : x \mapsto y = \cos x$ mit $x \in \mathbb{R}$ schneiden.

Aufgabe 19:

Welche Geradengleichung beschreibt die Tangente an die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \ln(x^2 + 5x)$$

im Punkt $P(1, f(1))$?

Aufgabe 20:

Die Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ mit

$$f(x) = \sin x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

soll in einer Umgebung von $x_0 = 0$ durch eine lineare Funktion approximiert werden.

(a) Geben Sie die explizite Darstellung der Tangente t an den Funktionsgraph zu f an der Stelle x_0 an.

(b) Berechnen Sie die Ordinatenzuwächse Δf und $\mathrm{d}y$ (der Tangente t) für Abszissenzuwächse

$$\Delta x = \mathrm{d}x = \pm 0.01\ (\pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.4)$$

Geben Sie auch die prozentuale Änderung der absoluten Ordinatenabweichung $|\Delta f - \mathrm{d}y|$ bezogen auf den Funktionswert $f(x_0 + \Delta x)$ an.

(c) Berechnen Sie das Differential $\mathrm{d}f$ für $\mathrm{d}x$.

Aufgabe 21:

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto y = f(x) = x^3 + x - 12$ mit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie ganze Zahlen an, zwischen denen eine Nullstelle x^* von f liegt.

(b) Bestimmen Sie x^* auf 3 Nachkommastellen gerundet mithilfe des Newton-Verfahrens unter Zuhilfenahme des Hornerschemas.

Aufgabe 22:

Die Lissajous-Figur c ist beschrieben durch die vektorwertige Funktion

$$f : t \mapsto (x, y) = (f_1(t), f_2(t)) = \left(\frac{3}{2} \cdot \cos(3 \cdot t), 2 \cdot \sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi)$$

(a) Bestimmen Sie die Amplituden der durch die Koordinatenfunktionen f_1 und f_2 beschriebenen Schwingungen sowie deren Frequenzverhältnis.

(b) Berechnen Sie die Kurvenpunkte von c mit vertikalen Tangenten (parallel zur y-Achse). Geben Sie die (tangentialen) Ableitungsvektoren in diesen Punkten an.

(c) Zeigen Sie, dass die Punkte $A(0, 2)$ und $B(0, -2)$ sowie $C(0, 1)$ und $D(0, -1)$ alle zum Wertebereich W_f der Funktion f gehören. Entscheiden Sie, in welchen dieser Punkte horizontale Tangenten an die Lissajous-Figur existieren.

(d) Skizzieren Sie den Wertebereich der Funktion f.

Aufgabe 23:

Rollt ein Kreis k mit Radius r auf der Innenseite eines Kreises k_0 mit Radius $R > r$ ab, ensteht als Ortskurve eines mit k fest verbundenen Punktes P eine Hypozykloide.

Die Parameterdarstellung von $P(t)$ ergibt sich durch die Funktion f mit

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = (R - r) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \mu r \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{R-r}{r}\, t\right) \\ -\sin\left(\frac{R-r}{r}\, t\right) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \tag{5}$$

wobei $\mu \left(= \frac{c}{r}\right) > 0$ mit Parameter $c > 0$ die Lage von P zum Rollkreis beschreibt.

Für die nachfolgenden Teilaufgaben sind die Radien $R = 4$ und $r = 1$ gewählt. In Abbildung ?? sind Hypozykloiden unter Verwendung verschiedener Parameterwerte μ graphisch dargestellt.

(a) Berechnen Sie für $\mu = 1$ alle Stellen $t_0 \in [0, 2\pi)$, an denen die Momentangeschwindigkeit von $P(t_0)$ verschwindet, d. h.

$$\dot{f}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \left(\dot{f}_1(t_0)\right)^2 + \left(\dot{f}_2(t_0)\right)^2 = 0 \tag{6}$$

Geben Sie die Punkte $P(t_0)$ an.

Hinweis: Für die Bearbeitung von Teilaufgabe a ist es ausreichend, eine der in Formelzeile (6) genannten äquivalenten Bedingungen zu untersuchen.

(b) Zeigen Sie, dass an der Stelle $t_1 = 0$ die Momentangeschwindigkeit von $P(t_1)$ der jeweiligen Hypozykloide genau dann verschwindet, wenn für deren Parameter $\mu = 1$ gilt.

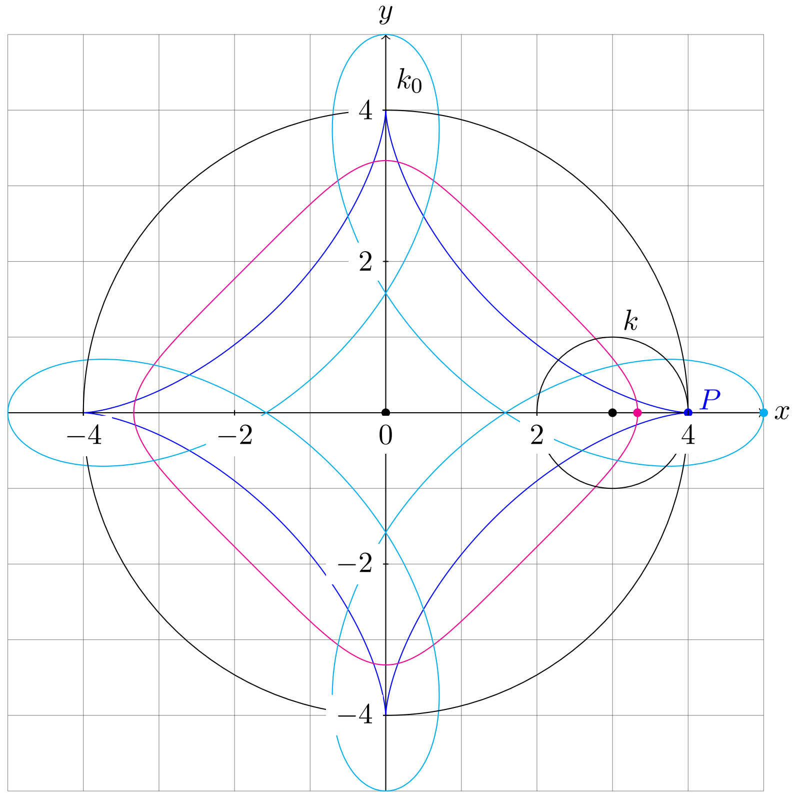

Figure 3: Hypozykloiden für Kreisradien $R = 4$, $r = 1$, Lageparameter $\mu \in \left\{1, \frac{1}{3}, 2\right\}$ eines mit k verbundenen Punktes P.

Aufgabe 24:

Ermitteln Sie durch Rechnung für die folgenden Funktionen

$$f : x \mapsto y = f(x), \quad x \in D$$

falls vorhanden - Nullstellen, (lokale) Extrempunkte, Wendepunkte sowie die Eigenschaften Monotonie und Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$.

(a) $f(x) = 0.2x^5 - x^4 + x^3 - 0.2, \; D = \mathbb{R}$ (b) $f(x) = x^2 e^{-x^2}, \; D = \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}, \; D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Skizzieren Sie diese Funktionen in einem geeignetem Intervall.

Aufgabe 25:

Gegeben sei die Funktionenschar

$$f_t : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : f_t(x) = \frac{4x - t}{x^2}, t \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, das Mononotonieverhalten, das Verhalten im Unendlichen sowie die Krümmung in Abhängigkeit des Parameters t. Fertigen Sie zudem eine Skizze an!