TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

Paul Beutel
Institut für Numerische Mathematik

Klausurenplanung
oder das Problem der Knotenfärbung

Dozent: Hr. Dr. M. Herrich
Dresden // 8. Dezember 2022

Stand: 08.11.2022

Klausurplan 11/I

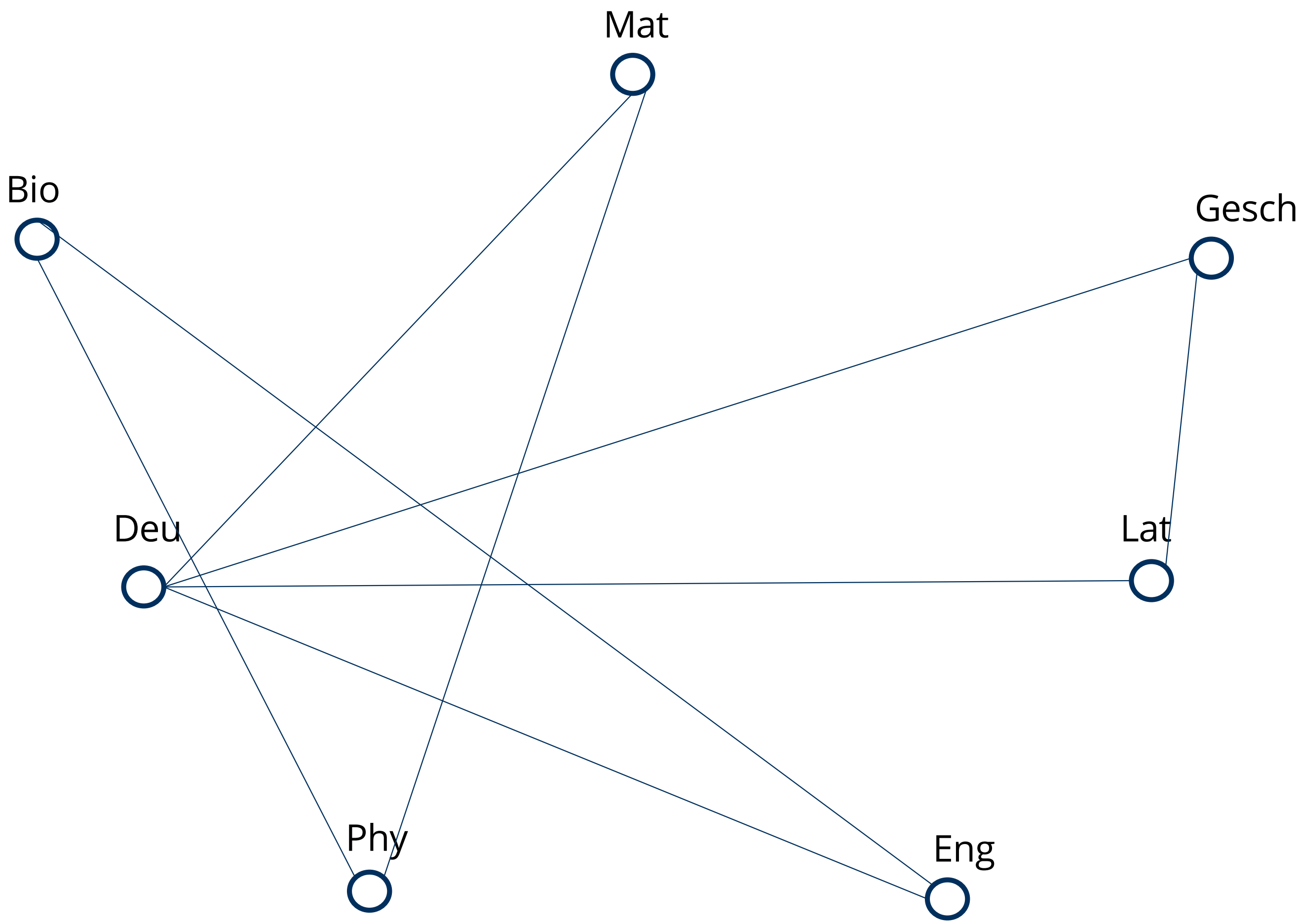
12. – 14.10.2022	**Chorlager**
15. – 30.10.2022	**Herbstferien**
31.10.2022	**Reformationstag**
Fr, 04.11.2022	BIO1, CH1, EN1, EN2, EN3, EN4, GE1, PH1
Mo, 07.11.2022	DE1, DE2, DE3, DE4 (8.50 – 11.00 Uhr, ab 11.30 Uhr regulärer Unterricht)
	MA1, MA2, MA3
Mi, 09.11.2022	**Mathematikolympiade**
Mo, 14.11.2022	~~ast1~~, tok1, ~~ges2~~, ph2, geo2
Mi, 16.11.2022	**Buß- und Bettag**
Fr, 18.11.2022	fr1, fr2, en1, en2, ru1, bio1
Di, 22.11.2022	inf2, bio3, ku2, geo3, spa1
Mi, 23.11.2022	biot1, inf1, en21, eth1, ge1, ku4
Mo, 28.11.2022	ast1, ges2
Di, 29.11.2022	biot2, grw1, grw2, ph3, geo1, grw4
Do, 01.12.2022	ree1, rek1, ph1, ku3, ge3, eth3
Mi, 07.12.2022	bio4, ch1, inf3, eth4, grw3
14. – 20.12.2022	**Projektunterricht / Studientage Komplexe Leistung**
21.12.2022 – 02.01.2023	**BeBe-Ferientag und Weihnachtsferien**
Do, 05.01.2023	ma1, ma2, ma3
Di, 10.01.2023	de1, de2, de3 (8.50 – 11.00 Uhr, ab 11.30 Uhr regulärer Unterricht)
Mi, 11.01.2023	DE1, DE2, DE3, DE4 (7.50 – 10.00 Uhr, ab 10.30 Uhr regulärer Unterricht)
Do, 12.01.2023	**Tag der offenen Hochschultür**
Do, 19.01.2023	phil1, ges1, bio2, eth2, ge2
Fr, 20.01.2023	mu1, mu2, ch2, ku1, ge4, ge5
Mo, 23.01.2023	BIO1, CH1, EN1, EN2, EN3, EN4, GE1, PH1
Mi, 25.01.2021	MA1, MA2, MA3
Do, 26.01.2023	**Klausurtag Bundeswettbewerb Fremdsprachen**
01.02.2023	**Notenstopp 11/II**
03.02.2023	**Studientag Komplexe Leistung**
11. – 26.02.2023	**Winterferien**

Plan für heute

- **(k-)Färbung**
- **chromatische Zahl $\chi(G)$**
- Abschätzung der chromatischen Zahl
- verschärfte Abschätzung der chromatischen Zahl → Satz von Brooks (1941)
- **Algorithmen zur Färbung**
- einfacher Färbealgorithmus
- Welsh-Powell-Algorithmus
- sequenzielle Algorithmus nach dem minimalen Knotengrad
- **Anwendungen der Knotenfärbung**

Das Klausurenproblem

	Bio	Mat	Gesch	Deu	Eng	Lat	Phy
Bio	x				x		x
Mat		x		x			x
Gesch			x	x		x	
Deu		x	x	x	x	x	
Eng	x			x	x		
Lat			x	x		x	
Phy	x	x					x

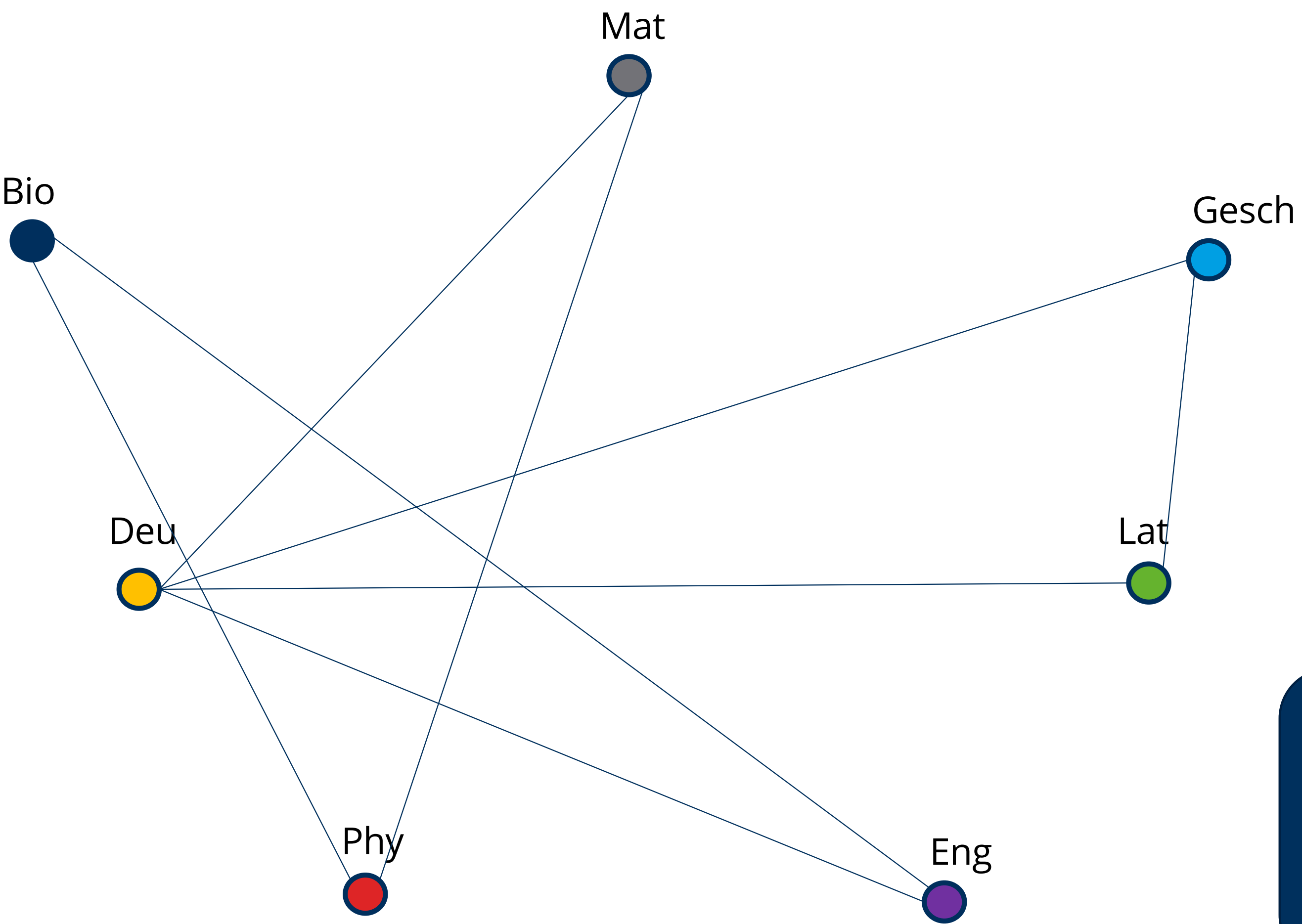

Mat
Bio
Gesch
Deu
Lat
Phy
Eng

(Knoten-)Färbung, Farben, k-färbbar, chromatische Zahl

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\mathrm{V} \ldots \mathit{Menge\ der\ Knoten}$ und $\mathrm{E} \ldots \mathit{Menge\ der\ Kanten}$.

Sei F eine beliebige Menge … Menge der Farben.

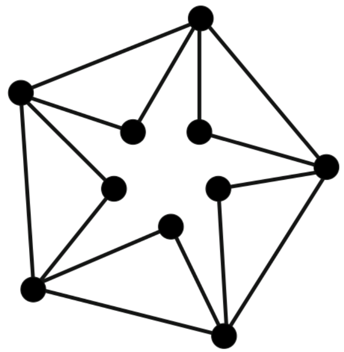
- **f heißt Farbe $\Leftrightarrow f \in F$**
- **Eine $(Knoten-)F\ddot{a}rbung$ ist eine Abbildung $c: V \to F$, sodass $c(u) \neq c(v)$ für bel. $\mathrm{u}, v \in V$ mit $(u, v) \in E$.**
- **G ist $k - f\ddot{a}rbbar$, falls es eine Färbung $c: V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ gibt.**
- **Das kleinste k, für das G noch $k - f\ddot{a}rbbar$ ist, heißt $chromatische\ Zahl\ \chi(G)$ von G.**



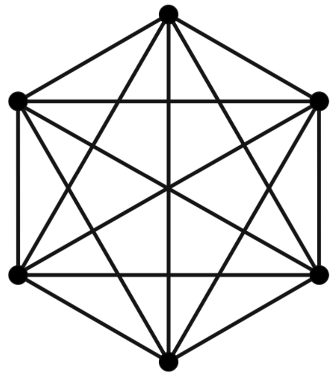
offensichtlich 7-färbbar
→ jeder Knoten erhält eine eigene Farbe

→ jede Klausur an einem einzelnen Tag

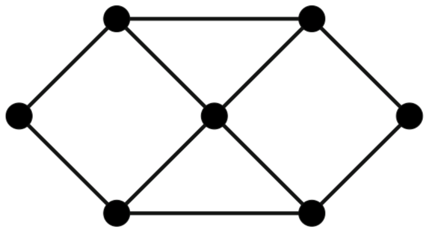
Übung: Bestimmung der chromatischen Zahl eines Graphen



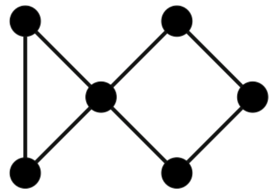
(c)



(d)

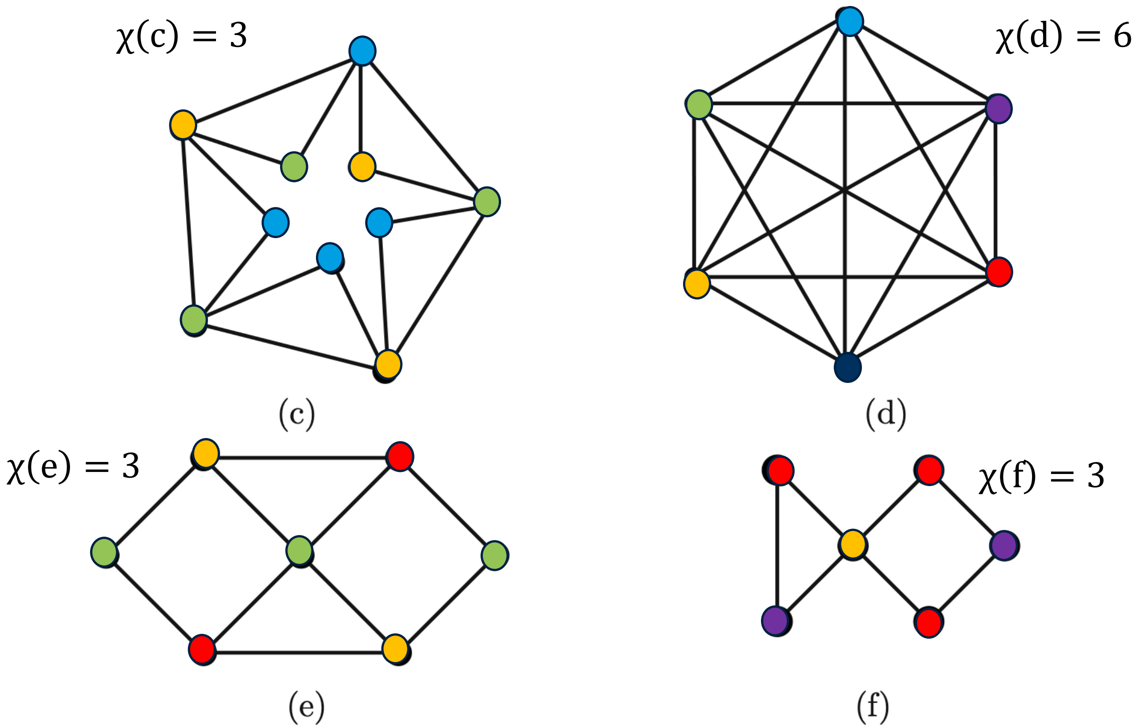


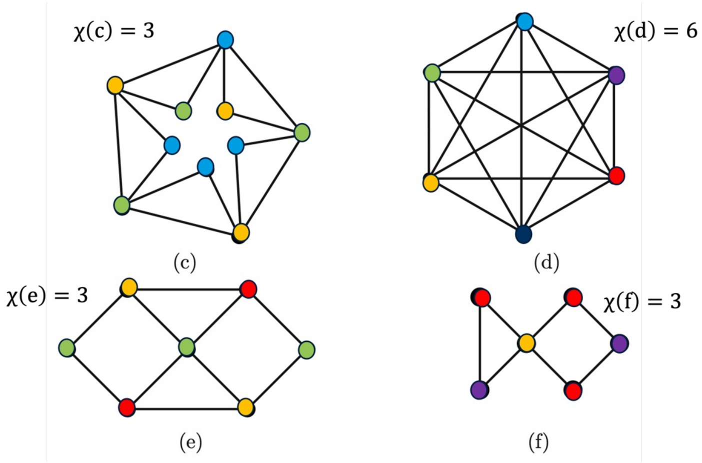
(e)



(f)

Übung: Bestimmung der chromatischen Zahl eines Graphen





Gesucht: grobe Abschätzung der chromatischen Zahl anhand der Beispiele…

$$1 \leq \chi(G) \leq n$$

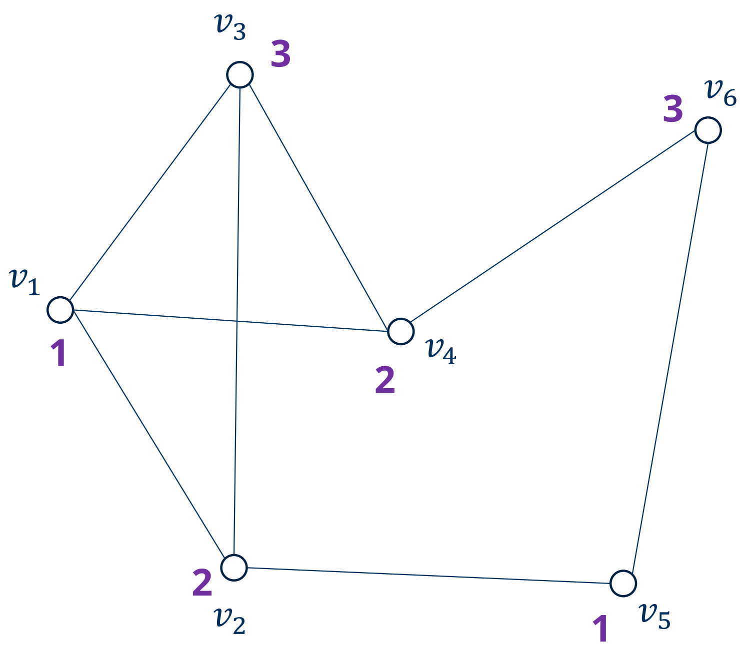
n…Anzahl der Knoten

Satz zur Abschätzung der chromatischen Zahl anhand $\mathbf{\Delta(G)}$

$$Sei\ G\ ein\ Graph\ und\ \Delta(G)\ der\ Maximalgrad\ von\ G, dann\ gilt$$
$$1 \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Beweis: mittels eines Algorithmus‘, der zu jedem G eine Färbung konstruiert, welche maximal $\Delta(G) + 1$ Farben enthält.

Färbungsalgorithmus



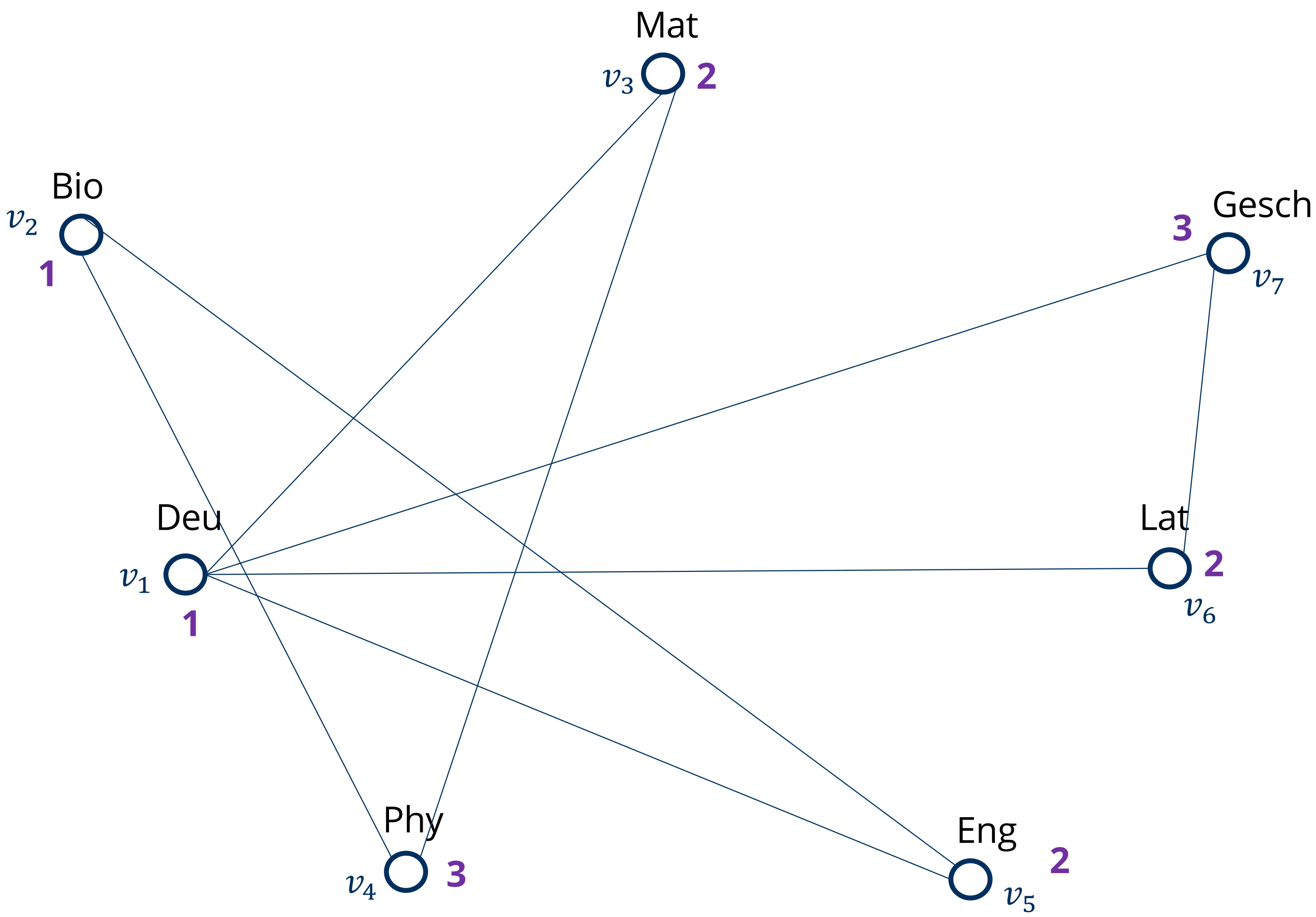
Input	Graph G.
Output	Knotenfärbung mit maximal $\Delta(G) + 1$ Farben.
Schritt 1	Knoten von G mit $v_1, \dots, v_n$ nummerieren.
Schritt 2	v_1 mit Farbe 1 färben.
Schritt 3	Knoten der Reihe nach betrachten und für jeden die kleinste unbenutzte Farbe in Bezug auf die bereits eingefärbten Nachbarn auswählen.

Fortsetzung Beweis…

- **Färbungsalgorithmus färbt die Knoten der Reihe nach so, dass zwei benachbarte Knoten unterschiedliche Farben bekommen**
- **ein Knoten besitzt maximal $\Delta(\mathrm{G})$ Nachbarn (folgt aus Definition von $\Delta(\mathrm{G})$)**
- **Somit werden maximal $\Delta(G) + 1$ Farben verwendet**

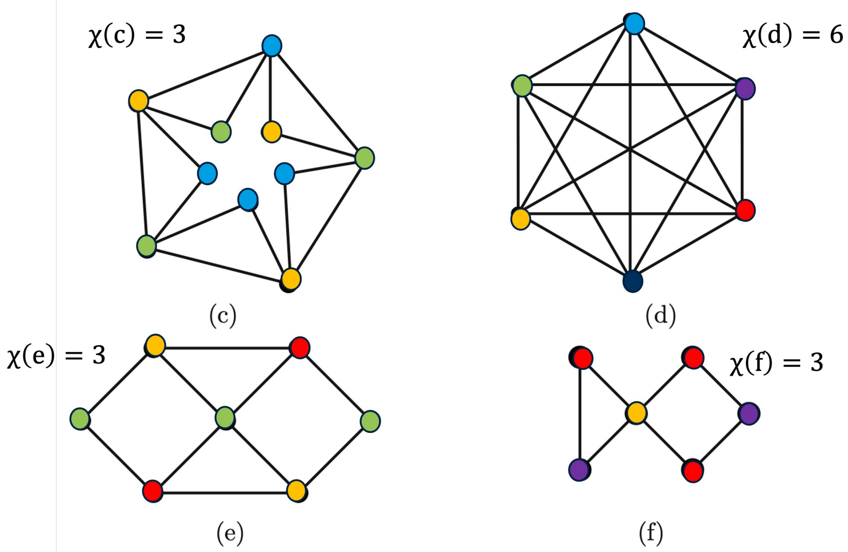
w. z. b. w.

Übung: Färbungsalgorithmus



Input	Graph G.
Output	Knotenfärbung mit maximal $\Delta(G) + 1$ Farben.
Schritt 1	Knoten von G mit $v_1, \dots, v_n$ nummerieren.
Schritt 2	v_1 mit Farbe 1 färben.
Schritt 3	Knoten der Reihe nach betrachten und für jeden die kleinste unbenutzte Farbe in Bezug auf die bereits eingefärbten Nachbarn auswählen.

Überlegung...



$$1 \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Frage: In welchem Beispiel ist die Abschätzung scharf, also $\chi(G) = \Delta(G) + 1$?

Antwort: Beispiel (d)

Satz von Brooks

Sei G ein zusammenhängender Graph mit $n > 2$. Dann gilt: $\chi(G) \leq \Delta(G)$, außer G ist vollständig oder ein Kreis ungerader Länge. In diesen beiden Fällen gilt $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Beweis für den Fall, dass nicht alle Knoten $\Delta(\mathrm{G})$ als Grad haben…

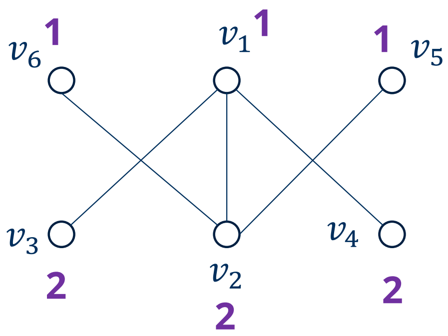
- **Sei** $\boldsymbol{G \coloneqq (V, E), |G| \ldots Anzahl\ der\ Knoten\ von\ G, d(v) \ldots Grad\ vom\ Knoten\ v}$
- **Induktion nach** $|\boldsymbol{G}|$
- $\boldsymbol{\Delta(G) \leq 2 \Rightarrow G\ ist\ Weg\ oder\ Kreis}$ **→ Behauptung ist ersichtlich**
- **Sei nun** $\boldsymbol{\Delta(G) \geq 3.}$

- **Induktionsanfang:** $|G| = 3$
  - Annahme: $\Delta(G) \geq 3$ → nichts ist zu zeigen ☺
- **Induktionsvoraussetzung:** $\boldsymbol{\chi(H) \leq \Delta(H)}$ **für alle Graphen H mit** $\boldsymbol{|H| < |G|}$

Induktionsschritt

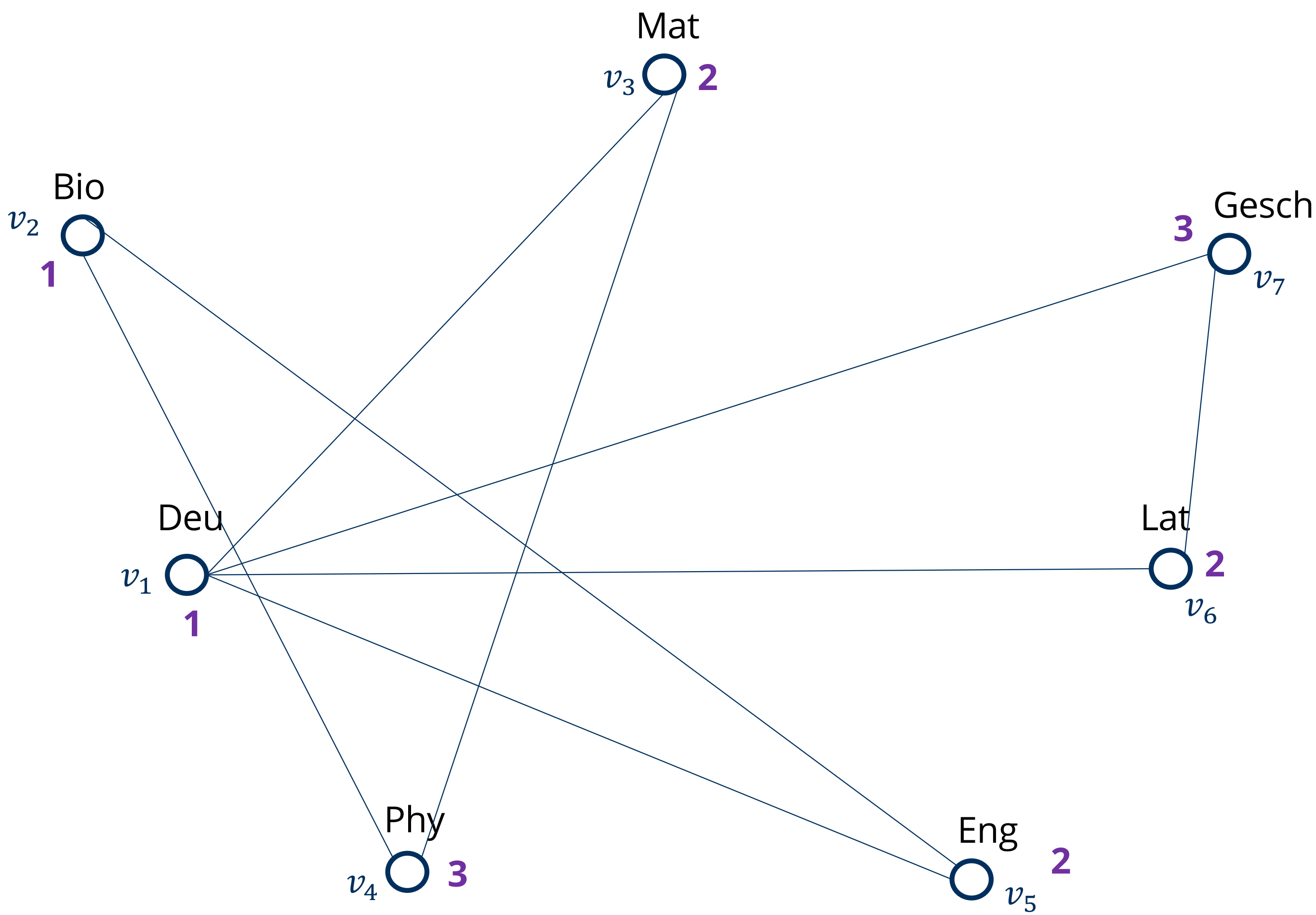
- **Wähle $v \in V$ mit $d(v) < \Delta(G)$ (existiert, da nicht alle Knoten Maximalgrad haben)**
- **betrachte nun $H := G - v$**
- **H besitzt weniger Knoten als G → kein Knoten in H hat mehr Nachbarn als in G, da $\Delta(H) \leq \Delta(G)$**
- **IV → es existiert $\Delta(G)$-Färbung von H**
- **anschließend noch v zu färben**
  - v hat nur $d(v) < \Delta(\mathrm{G})$ Nachbarn → mindestens eine der $\Delta(G) - vielen$ Farben bleibt für v übrig → somit entsteht $\Delta(G)$-Färbung für G

Welsh-Powell-Algorithmus



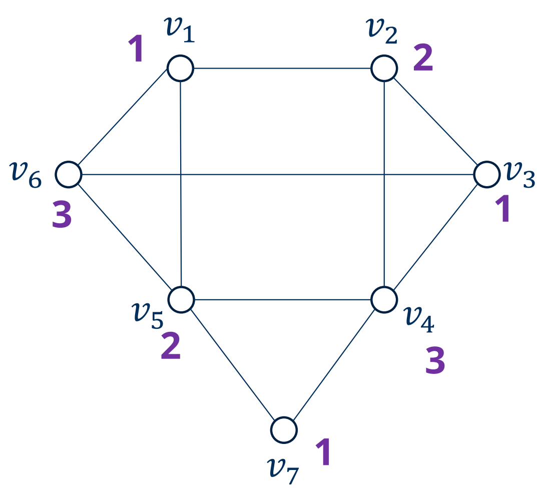
Input	Graph G.
Output	Knotenfärbung mit maximal $\Delta(G) + 1$ Farben.
Schritt 1	Knoten von G mit $v_1, \dots, v_n$ nummerieren, sodass $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$.
Schritt 2	v_1 mit Farbe 1 färben.
Schritt 3	Knoten der Reihe nach betrachten und für jeden die kleinste unbenutzte Farbe in Bezug auf die bereits eingefärbten Nachbarn auswählen.

Übung: Welsh-Powell-Algorithmus



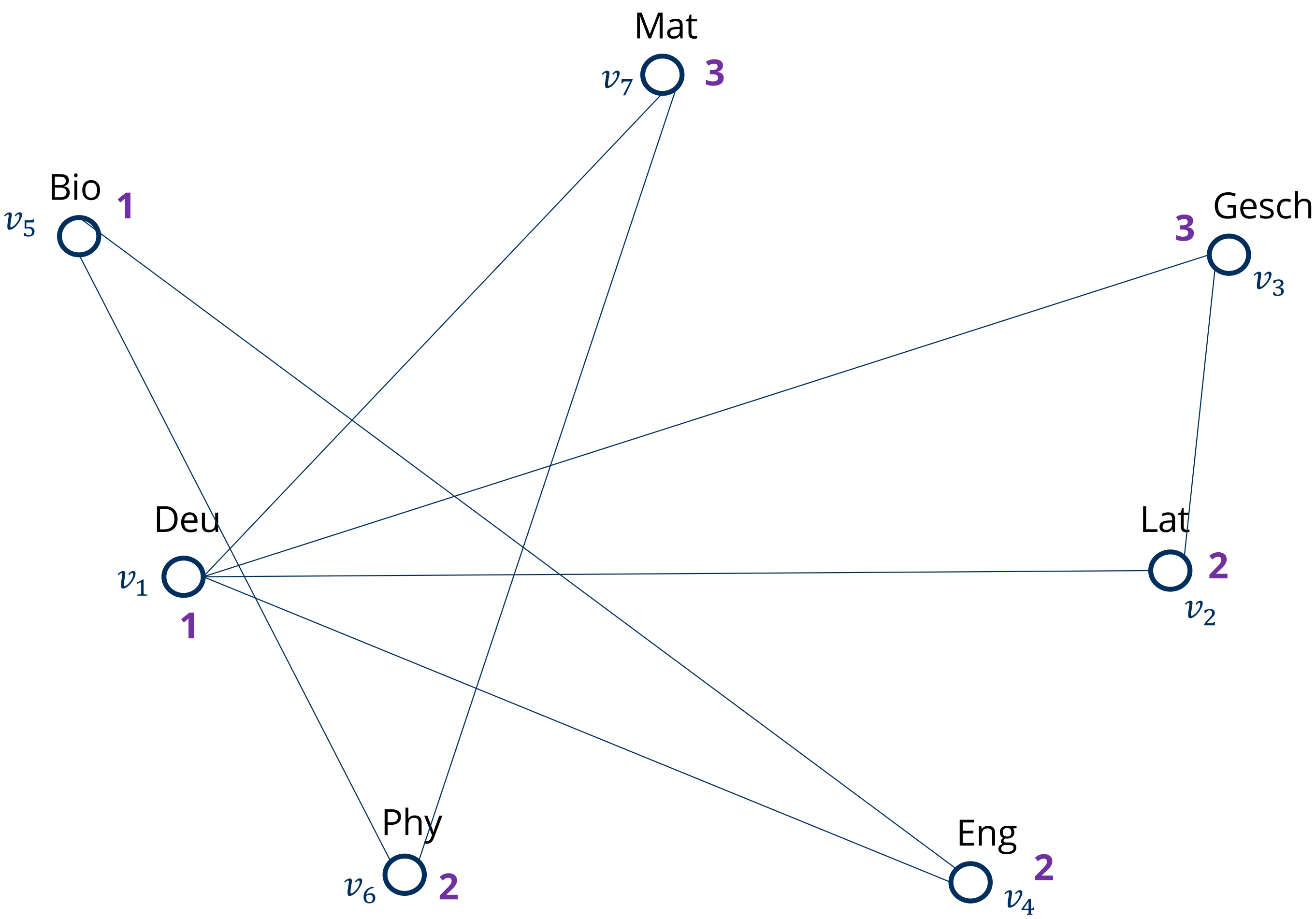
Input	Graph G.
Output	Knotenfärbung mit maximal $\Delta(G)+1$ Farben.
Schritt 1	Knoten von G mit $v_1, \ldots, v_n$ nummerieren, sodass $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$.
Schritt 2	v_1 mit Farbe 1 färben.
Schritt 3	Knoten der Reihe nach betrachten und für jeden die kleinste unbenutzte Farbe in Bezug auf die bereits eingefärbten Nachbarn auswählen.

Sequenzieller Algorithmus nach dem minimalen Knotengrad



Input	Graph G.
Output	Knotenfärbung mit maximal $\Delta(G) + 1$ Farben.
Schritt 1	a) Knoten mit kleinstem Grad → v_n b) Für $i = n-1, n-2, \dots, 1$ Knoten mit kleinstem Grad im knotengelöschten Untergraphen $G - \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}\}$ wählen → v_i
Schritt 2	v_1 mit Farbe 1 färben.
Schritt 3	Knoten der Reihe nach betrachten und für jeden die kleinste unbenutzte Farbe in Bezug auf die bereits eingefärbten Nachbarn auswählen.

Übung: Sequenzieller Algorithmus



Input	Graph G.
Output	Knotenfärbung mit maximal $\Delta(G) + 1$ Farben.
Schritt 1	a) Knoten mit kleinstem Grad → v_n b) Für $i = n-1, n-2, \dots, 1$ Knoten mit kleinstem Grad im knotengelöschten Untergraphen $G - \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}\}$ wählen → v_i
Schritt 2	v_1 mit Farbe 1 färben.
Schritt 3	Knoten der Reihe nach betrachten und für jeden die kleinste unbenutzte Farbe in Bezug auf die bereits eingefärbten Nachbarn auswählen.

Vergleich der Klausurenpläne

Tag	beliebig	einfacher	Welsh-Powell	sequentieller
Deu	1	1	1	1
Bio	2	2	2	3
Mat	3	3	3	3
Gesch	4	2	2	2
Lat	5	2	2	2
Eng	6	3	3	2
Phy	7	1	1	1

Anwendungsbeispiele

- Stundenplanerstellung
- Klausurenplanung
- Zuordnung von Bandbreiten, sodass keine Überschneidungen

Abbildungsquellen

Folie 1

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dresden_Johannstadt_Bertolt-Brecht-Gymnasium_I.JPG

https://get.pxhere.com/photo/man-person-hair-view-male-meeting-portrait-young-human-business-hairstyle-beard-jumper-senior-citizen-social-media-face-startup-bart-logo-cool-glasses-head-moustache-eyewear-blond-independence-presentation-businessman-bold-optimistic-consider-self-employed-unshaven-facial-hair-vision-care-looking-for-a-job-gmbh-1207001.jpg

Klausurenplan Bertolt-Brecht-Gymnasium Dresden

Folie 4

Büsing, 2010, S. 110

Folie 8

Büsing, 2010, S. 112

Folie 12

Büsing, 2010, S. 113

Folie 17

Clark & Holton, 1994, S. 220

Folie 19

Clark & Holton, 1994, S. 222

Literaturquellen

Büsing, C. (2010). *Graphen- und Netzwerkoptimierung*. Spektrum Akademischer Verlag.

Clark, J., & Holton, J. C. (1994). *Graphentheorie. Grundlagen und Anwendungen*. Spektrum Akademischer Verlag.

Cranston, D. W., & Rabern, L. (2014). *Brooks' Theorem and Beyond* (arXiv:1403.0479). arXiv. http://arxiv.org/abs/1403.0479