1.4 Kurs und Rendite

1.4.1 Nominal- und Realzinssatz

***Voraussetzungen Kurs und Rendite*:**
K1. Die Verzinsung erfolgt mit Zinseszinsen zu konstanten positiven Zinssätzen.
K2. Die Zinsperiode ist ein Jahr.
K3. Die Zahlungen erfolgen ebenfalls jährlich.

$i > 0$ **Nominalzinssatz** (der zwischen Schuldner und Gläubiger vereinbarten Zinssatz)

$q = 1 + i$ zugehöriger (nomineller) Aufzinsfaktor

i^* **Realzinssatz** oder **Marktzinssatz** (marktüblichen Zinssatz, zu dem Investoren Kapital mit gleicher Laufzeit anlegen können)

$q^* = 1 + i^*$ zugehöriger (realer) Aufzinsfaktor

$K > 0$ Kapital, das der Schuldner bei $t = 0$ vom Gläubiger erhält

$(A_t)_{t=1,2,\dots,n}$ Zahlungsstrom der Rückzahlungen (Annuitäten eines Tilgungsprozesses) des Schuldners

➔ **Nominalbarwert** $K_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{q^t}$

➔ **Realbarwert** $K_0^* = K_0^*(i^*) = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(q^*)^t}$ (realer Barwert aus Marktsicht)

<u>Beispiel 1.18</u>: *(Realbarwert)*

Eine Anleihe mit 6-jähriger Restlaufzeit über 1.000 € liefert ihrem Besitzer jährlich 5% Zinsen. Welche Realbarwerte ergeben sich bei Marktzinssätzen von 4% bzw. 6%?

$A_1 = A_2 = \cdots = A_5 =$ ____________

$K_0^*(4\%) =$

$K_0^*(6\%) =$

Nomineller Barwert: $K_0 =$

□

➔ Im Falle von Wertpapieren wie im Beispiel heißt der Nominalbarwert auch **Nennwert** K (des Wertpapiers)

1.4.2 Der Zusammenhang von Kurs und Rendite

Definition 1.10: *(Kurs)*

Man bezeichnet das Verhältnis von Real- und Nominalbarwert

$$C_0 = C_0(i^*) = \frac{K_0^*(i^*)}{K}$$

als **Kurs** des Zahlungsstroms zum (konstanten) Realzinssatz i^*.

Bemerkung:

Während Barwerte (Währungs-)Einheiten besitzen, ist der Kurs ohne Einheit. Er wird in der Regel als Prozentwert angegeben. Gelegentlich wird auch der Prozentfuß $100C_0$ als Kurs bezeichnet.

Beispiel 1.18 (Forts.): *(Kurs)*

$K_0^*(4\%) = 1.052{,}42$€; $K_0^*(6\%) = 950{,}83$€; K_0=1.000€

Kurs der Anleihe: $C_0(4\%) =$

$C_0(6\%) =$

Weitere Begriffe:

Agio Differenz $K_0^* - K$ zwischen Nominalbarwert und Nennwert, sofern positiv

Agiosatz Verhältnis von Agio zum Nennwert: $\frac{K_0^* - K}{K} = \frac{K_0^*}{K} - 1$

Disagio Differenz $K - K_0^*$ zwischen Nennwert und Nominalbarwert, sofern positiv

Disagiosatz Verhältnis von Disagio zum Nennwert: $\frac{K - K_0^*}{K} = 1 - \frac{K_0^*}{K}$

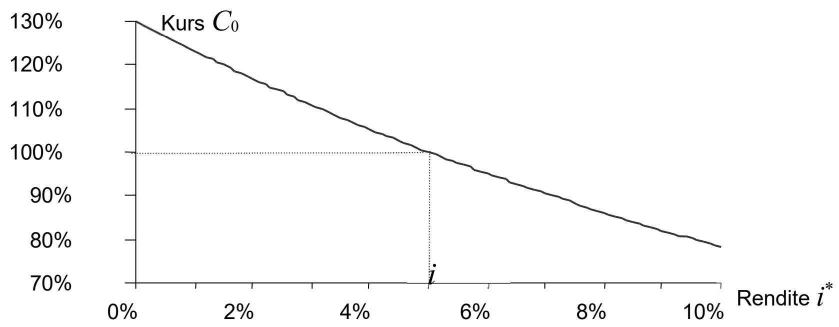
Beispiel 1.18 (Forts.): *(Agio/Disagio)*

$K_0^*(4\%) = 1.052{,}42€;\ K_0^*(6\%) = 950{,}83€;\ K_0 = 1.000€$

Bei $i^* = 4\%$ ergibt sich ein Agio von 52,42€ und ein Agiosatz von ....%.
Bei $i^* = 6\%$ ergibt sich ein Disagio von 49,17€ und ein Disagiosatz von ....%.

□

Voraussetzung Kurs und Rendite:
K4. Die Zahlungen des Schuldners bilden einen <u>nicht negativen</u> Zahlungsstrom,
$A_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \ldots, n$.



Kurs als Funktion der Rendite

- $C_0 = C_0(i^*)$ eine <u>positive, stetige, streng monoton fallende und streng konvexe</u> Funktion.
- Der Definitionsbereich besteht aus dem Intervall $(-1, \infty)$. Man könnte also sogar negative Realzinssätze zulassen, allerdings nur bis -100%.
- $C_0(0) = \frac{K_0^*(0)}{K} = \frac{1}{K} \sum_{t=1}^{n} A_t \geq 0, C_0(i) = \frac{K_0^*(i)}{K} = \frac{K}{K} = 1 = 100\%$
- $\lim_{i^* \searrow -1} C_0(i^*) = \lim_{i^* \searrow -1} \frac{K_0^*(i^*)}{K} = \frac{1}{K} \sum_{t=1}^{n} \lim_{q^* \searrow 0} \frac{A_t}{(q^*)^t} = +\infty$
- $\lim_{i^* \to \infty} C_0(i^*) = \lim_{i^* \to \infty} \frac{K_0^*(i^*)}{K} = \frac{1}{K} \sum_{t=1}^{n} \lim_{i^* \to \infty} \frac{A_t}{(q^*)^t} = 0.$

➔ Es existiert die Umkehrfunktion (auch wenn wir sie nicht explizit angeben können).
D. h. zu jedem positiven Kurs C_0 gibt es einen passenden Realzinssatz i^*, so dass C_0 der zugehörige Funktionswert ist.

Definition 1.11: *(Rendite)*

Gegeben sei ein Kurs $C_0 > 0$. Der unter den Voraussetzungen K1-K4 eindeutig bestimmte Realzinssatz i^* mit $C_0 = C_0(i^*)$ heißt **Rendite** zum Kurs C_0.

1.4.3 Kurse spezieller Tilgungsprozesse

1. **Zinsschuld**

$$C_0 = \begin{cases} \frac{1}{(q^*)^n}\left(\frac{i}{i^*}((q^*)^n - 1) + 1\right) & \text{falls } i^* \neq 0, \\ ni + 1 & \text{falls } i^* = 0 \end{cases}$$

Beispiel 1.19: *(Kurs einer Zinsschuld)*

Aus einer Kuponanleihe (*engl.: bond*) mit einer Restlaufzeit von 8 Jahren erhält der Gläubiger jährlich 5,5% Zinsen, am Ende wird der Nennwert zurückgezahlt. Der Marktzinssatz beträgt 6,2% p.a. Zu welchem Kurs kann die Anleihe gekauft werden?

$C_0 =$

2. **Gesamtfällige Schuld mit Zinsansammlung**.

$$C_0 = \left(\frac{q}{q^*}\right)^n \Leftrightarrow i^* = \frac{q}{\sqrt[n]{C_0}} - 1$$

<u>Beispiel 1.20</u>: *(Kurs und Rendite einer gesamtfälligen Schuld)*
Eine Nullkuponanleihe über 7 Jahre (*engl.: zero bond*, keine Auszahlung während der Anlagedauer) wird mit einem Zinssatz von 4,2% p.a. verzinst.
a) Wie lautet der Kurs bei einer Rendite von 6% p.a.?

$C_0 =$

b) Wie hoch ist die Rendite bei einem Kurs von 107%

$i^* =$

3. **Ratenschuld**

$$C_0 = \begin{cases} \dfrac{i}{i^*} + \dfrac{(i^* - i)((q^*)^n - 1)}{n(q^*)^n (i^*)^2} & \text{falls } i^* \neq 0, \\ 1 + i\dfrac{n+1}{2} & \text{falls } i^* = 0 \end{cases}$$

Beispiel 1.21: *(Kurs einer Ratenschuld)*

Ein Darlehen über 60.000 € wird als Ratenschuld über 10 Jahre zum Zinssatz von 8% p.a. getilgt. Bei einer Restlaufzeit von 3 Jahren besteht noch eine Restschuld von 18.000 €. Mit welcher sofortigen Zahlung kann der Schuldner das Darlehen zu diesem Zeitpunkt ablösen, wenn der gegenwärtige Marktzinssatz 6,5% p.a. beträgt.

$C_0 =$

Realbarwert: $K_0^* =$

4. **Annuitätenschuld** bzw. **Annuitätentilgung**

$$C_0 = \begin{cases} \frac{i}{i^*}\left(\frac{q}{q^*}\right)^n \frac{(q^*)^n - 1}{q^n - 1} & \text{falls } i^* \neq 0, \\ nq^n \frac{i}{q^n - 1} & \text{falls } i^* = 0 \end{cases}$$

<u>Beispiel 1.22</u>: *(Kurs einer Annuitätenschuld)*

Eine Bank bietet Darlehen mit 6,39% p.a. Verzinsung bei 10-jähriger Zinsbindung und einem Disagiosatz von 5% an.
Es kommt also nicht die gesamte Darlehenssumme K zur Auszahlung, sondern nur $0{,}95K$, Zinsen werden allerdings auf die volle Darlehenssumme K erhoben.

a) Welche Rendite erzielt die Bank mit diesem Angebot?
Auszahlungsbetrag: _______________

Ansatz: ____ (*)

ggf. umstellen: ____

Numerische Lösung: $q^* =$ ______ $\Rightarrow i^* =$ ______

b) Welchen Nominalzinssatz müsste die Bank bei einem Darlehen verlangen, das unter sonst gleichen Bedingungen einen Disagiosatz von 10% enthält, jedoch die gleiche Rendite wie a) erzielt?

Ansatz (*) ggf. umstellen: ____

Numerische Lösung: $q =$ ______ $\Rightarrow$ $i =$ ______