

1.3 Renten- und Tilgungsrechnung

1.3.1 Renten und Raten

Definition 1.6: (Rente, Raten)

Ein Zahlungsstrom mit einer (endlichen oder unendlichen) Folge von periodischen Zahlungen wird als **Rente** (*engl.: annuity bzw. bond* für Rentenwertpapier) bezeichnet, die einzelnen Zahlungen als **Raten** (*engl.: annuity payment, rate*), ihre Fälligkeitstermine als **Ratentermine**.

Die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlungen heißt **Rentenperiode** oder **Ratenperiode**.

Besteht die Rente aus endlich vielen Zahlungen, so nennt man deren Anzahl **Terminzahl** der Rente.

Bemerkung:

1. Umgangssprachlich werden gelegentlich auch die einzelnen Zahlungen als Rente bezeichnet. Wir wollen darunter jedoch stets die Gesamtheit aller Zahlungen verstehen.
2. Nach Voraussetzung Z3 sind alle Zahlungen sicher, d. h. sowohl in ihrer Höhe als auch überhaupt in ihrem Eintreten sowie ihrer Anzahl werden sie nicht von zufälligen Ereignissen beeinflusst. Damit fallen z. B. sog. **Leibrenten** nicht unter diesen Rentenbegriff (Zahlung hängt vom Erleben des Zahlungstermins ab), ebenso wenig die gesetzlichen Altersrenten. Derartige Renten werden in der **Versicherungsmathematik** untersucht.

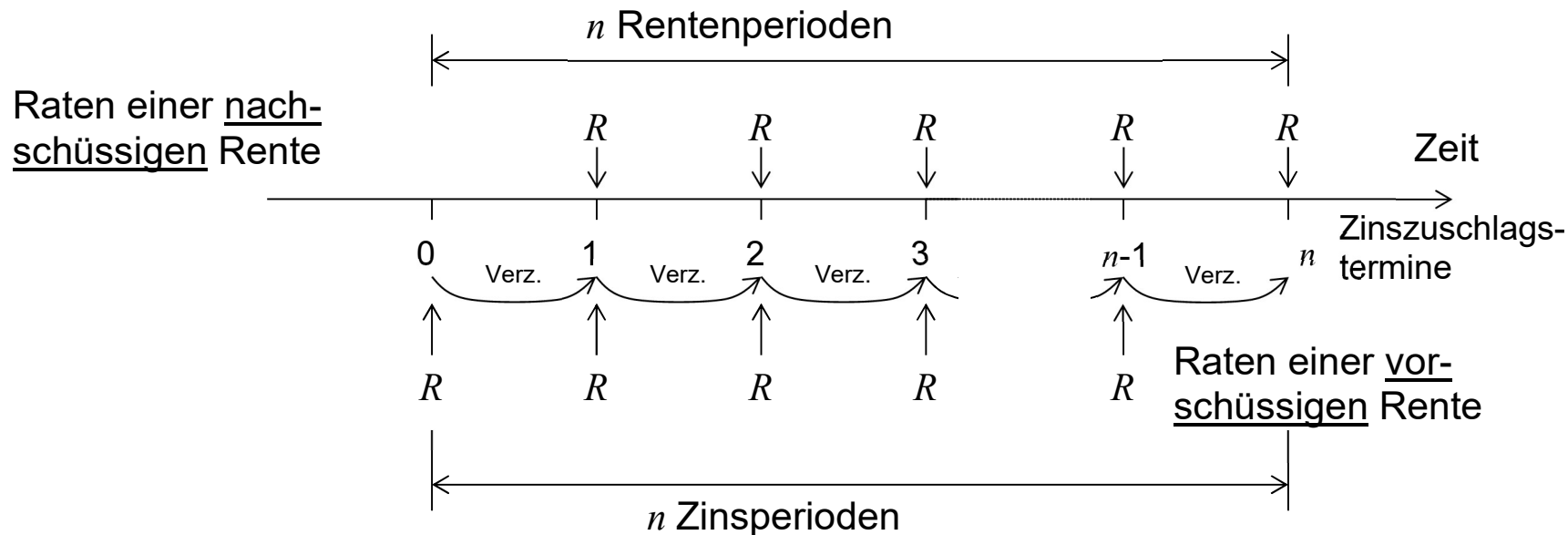
Wir setzen im Abschnitt 1.3 wieder Verzinsung mit Zinseszinsen mit konstantem Zinssatz i über n Perioden voraus, $n \in \mathbb{N}$.

Voraussetzungen Renten:

R1. Die Raten der Rente sind gleich hoch, also konstant.

R2. Die Rente besteht aus endlich vielen Raten.

R3. Zinsperiode und Rentenperiode sind synchron (Lage und Länge gleich).



1.3.2 Barwert, Endwert und Gesamtwert einer Rente

Aus Kap 1.2:
$$K_0 = \sum_{t=1}^n \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=1}^n \frac{R}{q^t} = \frac{R}{q^n} \sum_{k=0}^{n-1} q^k.$$

Summe bildet eine *geometrische Reihe* mit $1/q \leq 1$, der Barwert ergibt sich demnach als n -te Partialsumme

Nachschüssige Renten:

$$K_0 = \begin{cases} \frac{R}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{falls } q \neq 1 \Leftrightarrow i \neq 0 \\ Rn & \text{falls } q = 1 \Leftrightarrow i = 0 \end{cases} \quad (\text{Barwert nachschüssige Rente})$$

$$K_n = K_0 \cdot q^n = \begin{cases} R \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{falls } q \neq 1 \Leftrightarrow i \neq 0 \\ Rn & \text{falls } q = 1 \Leftrightarrow i = 0 \end{cases} \quad (\text{Endwert nachsch. Rente})$$

Vorschüssigen Renten:

$$K'_0 = \begin{cases} \frac{R}{q^{n-1}} \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{falls } q \neq 1 \Leftrightarrow i \neq 0 \\ Rn & \text{falls } q = 1 \Leftrightarrow i = 0 \end{cases} \quad (\text{Barwert vorschüssige Rente})$$

$$K'_n = K'_0 \cdot q^n = \begin{cases} Rq \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{falls } q \neq 1 \Leftrightarrow i \neq 0 \\ Rn & \text{falls } q = 1 \Leftrightarrow i = 0 \end{cases} \quad (\text{Endwert vorsch. Rente})$$

Definition 1.7: (Gesamtwert)

Den Wert einer Rente unmittelbar nach der letzten Ratenzahlung bezeichnet man als **Gesamtwert** R_n der Rente (einheitlich für nach- und vorschüssige Renten).

$$R_n = \begin{cases} R \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{falls } q \neq 1 \Leftrightarrow i \neq 0 \\ Rn & \text{falls } q = 1 \Leftrightarrow i = 0 \end{cases}$$

Beispiel 1.13: (Gesamtwert)

Ein Sparer zahlt insgesamt 15-mal jeweils zu Jahresbeginn 10.000 € auf ein jährlich mit 5,4% verzinstes Sparkonto ein. Über welchen Betrag kann er am Tag der letzten Einzahlung (inkl. der 15. Rate) verfügen?

$$q =$$

$$R_{15} =$$

□

Wie muss man die Formeln anwenden, wenn die Voraussetzungen R1-R3 verletzt sind?

1. Wechselnde Ratenhöhe: Zerlegung Rente in Teilrenten mit jeweils konstanter Rate. Dann bildet man die Zeitwerte der einzelnen Teilrenten zu festgelegten Stichtag (z. B. Beginn der Rente) und addiert sie. (Erlaubt aufgrund des Äquivalenzprinzips).
2. Raten ändern sich nach bestimmter Gesetzmäßigkeit (wachsen bswp. in Form einer arithmetischen oder geometrischen Folge): geschlossene, aber kompliziertere Formeln für Bar- und Endwerte → Literatur
3. Zinsperioden länger oder kürzer als Rentenperioden: geschlossene, kompliziertere Formeln → Literatur
4. konstante, aber unendlich viele Raten → **ewigen Rente**. Natürlich kein Endwert, für positiven Zinssatz $i > 0$ aber Barwert. Bei nachschüssigen Raten

$$K_0^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R q^n - 1}{q^n (q - 1)} = \frac{R}{q - 1} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^{-n})}_{=1} = \frac{R}{i}$$

und analog bei vorschüssigen Raten

$$K_0'^\infty = \frac{Rq}{i}$$

Beispiel 1.14: (Ewige Rente)

Eine Stiftung soll (auf ewige Zeiten) jährlich einen Betrag von 160.000 € ausschütten. Welches Stiftungskapital ist dafür bei einem Zinssatz von 8% p.a. am Tag der ersten Ausschüttung erforderlich? $K_0'^\infty =$

1.3.3 Kapitalaufbau und -verzehr

Wir setzen in diesem Abschnitt positive Verzinsung $i > 0$ voraus.
Die Raten der Rente werden nachschüssig gezahlt.

Ziel: Kombination von einmaligem (Anfangs-)Kapital $K > 0$
und einer Rente mit nachschüssigen Raten R .

Kapitalaufbau Kapital wächst durch die Rente

Kapitalverzehr Kapital verringert sich durch die Rente

Endwert nach n Raten:

$$K_n = Kq^n + R \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (\text{Sparkassenformel}) \quad = \text{Kontostand unmittelbar nach der } n\text{-ten Rate}$$

$$R = -Kq^n \frac{q - 1}{q^n - 1} \quad (\text{Rate einer nachschüssigen Rente bei Kapitalverzehr})$$

$$n = \log_q \frac{R}{Ki + R} = \frac{\ln \frac{R}{Ki + R}}{\ln q} \quad (\text{Dauer einer nachsch. Rente bei Kapitalverzehr})$$

Fallunterscheidung:

- **Kapitalverzehr:** $K_i + R < 0 \Leftrightarrow R < -K_i$.
- **Kapitalaufbaus:** $K_i + R > 0 \Leftrightarrow R > -K_i$
- **Kapitalerhaltung** $K_i + R = 0 \Leftrightarrow R = -K_i$

Beispiel 1.15: (*Kapitalverzehr*)

Frau Glücklich erbt 200.000 € und legt den Betrag am 1.1.2023 auf einem Bankkonto an, das monatlich mit dem zu 6% p.a. linear proportionalen Zinssatz verzinst wird. Sie gibt daraufhin ihre Berufstätigkeit auf und entnimmt dem Konto jeweils am Monatsende 2.000 €, erstmalig Ende Januar 2023.

a) Wie lautet der Kontostand am 1.1.2028?

Anzahl Raten bis 1.1.2028: _____

$K_{60} =$

b) Wie viel Raten zu 2.000 € können abgehoben werden, bis das Konto erschöpft ist?

$n =$

c) Skizzieren Sie den Verlauf des Kontostandes in Abhängigkeit von der Zeit! Durch welchen Funktionstyp wird er charakterisiert?

1.3.4 Tilgung einer Schuld

Voraussetzungen Tilgung:

T1. Die Leistungen des Gläubigers und Gegenleistungen des Schuldners erfolgen als Zahlungsstrom, sie bestehen aus endlich vielen Zahlungen.

T2. Alle Zahlungen werden sofort verrechnet, d. h. sind unmittelbar konto- und damit zinswirksam.

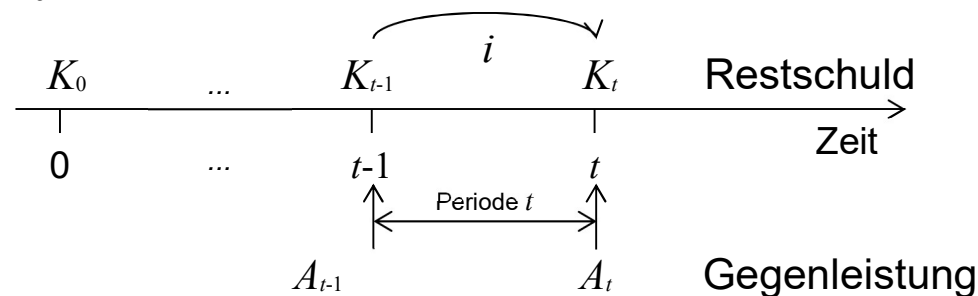
T3. Es erfolgt Verzinsung mit Zinseszinsen bei positivem Zinssatz $i > 0$.

Definition 1.8: (Restschuld)

Den Zeitwert der bis zu einem Zeitpunkt t erbrachten Leistungen des Gläubigers abzüglich der bis zu diesem Zeitpunkt erbrachten Gegenleistungen des Schuldners bezeichnet man als **Restschuld** (bzw. **Kontostand**) K_t zum Zeitpunkt t . Der Kontostand K_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ heißt auch schlicht (**anfängliche**) **Schuld**.

Definition 1.9: (Annuität, Zins- und Tilgungsanteil)

Die Gegenleistung (Zahlung) A_t des Schuldners zum Zeitpunkt t bezeichnet man als **Annuität** zum Zeitpunkt t , $Z_t = K_{t-1} \cdot i$ als **Zinsanteil** in Periode t (Fälligkeitstermin dieser Zinsen ist der Zeitpunkt t) und die Differenz $T_t = A_t - Z_t$ als **Tilgungsanteil** der Annuität zum Zeitpunkt t . $\rightarrow A_t = Z_t + T_t, t = 1, \dots, n$.

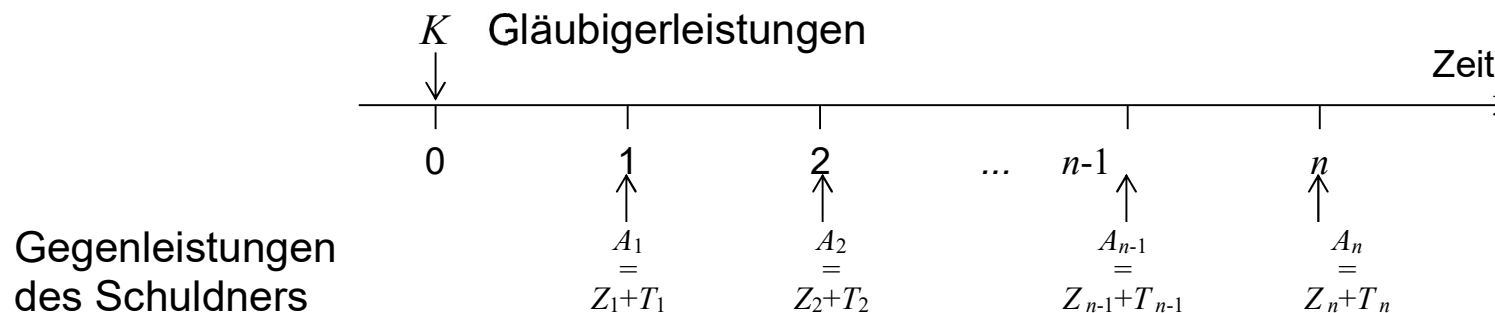


Bemerkungen:

1. Die Bezeichnung Annuität ist von „annum“ (lat.: Jahr) abgeleitet und soll auf die jährlich vom Schuldner zu erbringende Zahlung hindeuten. Wir arbeiten jedoch (allgemeiner) mit einer Zahlung des Schuldners je Periode.
2. Außer Zinsen und Tilgung könnte die Annuität weitere Bestandteile enthalten, z. B. Provisionen oder Gebühren G_t . Dann müsste man die Zusammensetzung der Annuität modifizieren zu $A_t = Z_t + T_t + G_t$, $t = 1, \dots, n$ und die Definition entsprechend anpassen.

Voraussetzung Tilgung:

T4. Der Gläubiger stellt ausschließlich bei $t=0$ ein Kapital zur Verfügung, die Gegenleistungen des Schuldners können nur bei $t=1, \dots, n$ erfolgen.



$$K_t = K_0 - \sum_{k=1}^t T_k, \quad t = 1, \dots, n.$$

Vollständigen Tilgung nach n Perioden: $K_n = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n T_k = K_0$

Tilgungsplan tabellarischer Form des Tilgungsprozesses mit Angabe von Zins- und Tilgungsanteilen

Beispiel 1.16: (Tilgungsplan)

Ein Kredit über 100.000 € wird mit 10% p.a. jährlich verzinst. Außer den Zinsen sollen zusätzlich 20.000 € p.a. getilgt werden. Geben Sie die Annuitäten sowie die Kontostände bis zur vollständigen Tilgung durch einen Tilgungsplan an!

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Periode t	Restschuld K_{t-1} $= (2)_{\text{Vorzeile}} - (4)_{\text{Vorzeile}}$	Zinsen Z_t $= (2) \cdot i$	Tilgung T_t	Annuität A_t $= (3) + (4)$
1	100.000 €			
2				
3				
4				
5				
6	0 €		$\Sigma = K_0$	

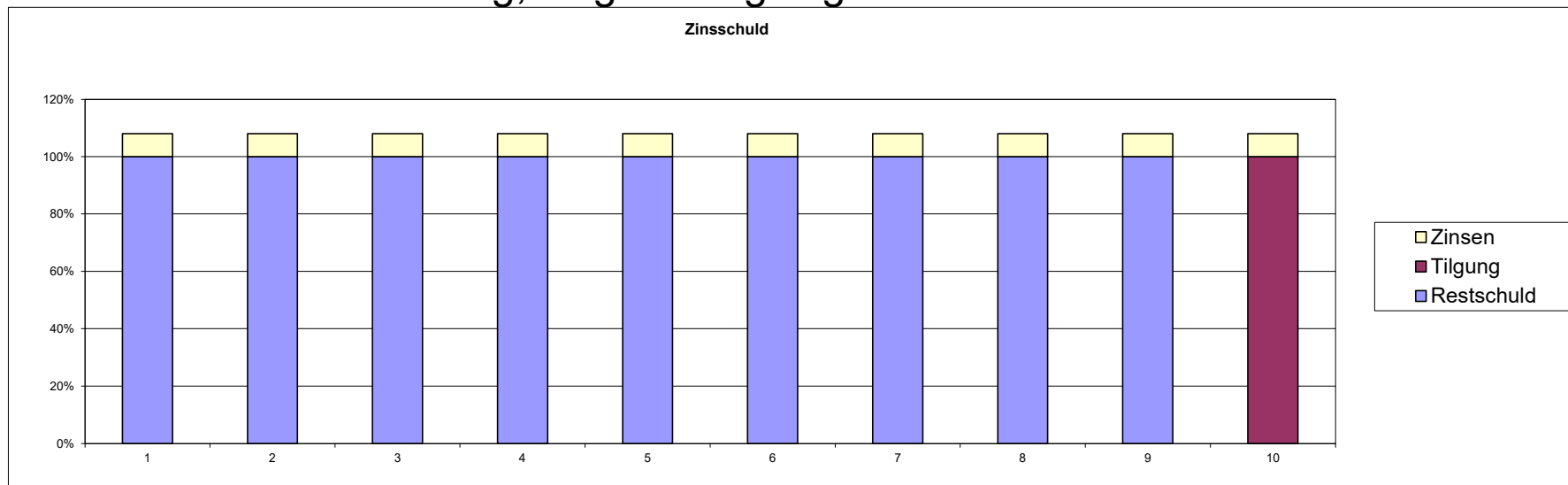
Tilgungsstreckung in einer Periode werden nur Zinsen gezahlt, die Restschuld bleibt konstant
 $\rightarrow A_t = Z_t, T_t = 0$

Zahlungsaufschub in einer Periode werden keine Zahlungen geleistet, die Restschuld erhöht sich i.d.R.
 $\rightarrow A_t = 0, T_t = -Z_t$

Die 4 wichtigsten Formen von Tilgungsprozessen:

1. Zinsschuld

Mit Ausnahme der letzten Periode werden stets nur Zinsen gezahlt (Tilgungsstreckung). Die anfängliche Schuld bleibt dadurch unverändert. Sie wird erst am Ende, zusammen mit der letzten Zinszahlung, insgesamt getilgt.

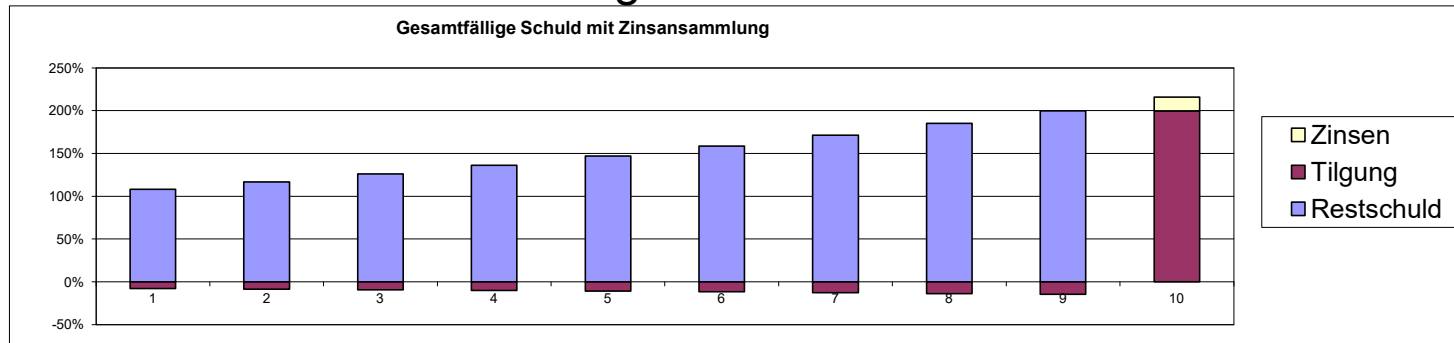


2. Gesamtfällige Schuld mit Zinsansammlung

Schuldner zahlt nichts mit Ausnahme der letzten Periode (Zahlungsaufschub).

Restschuld erhöht sich ständig um die nicht gezahlten Zinsen (negative Tilgung!).

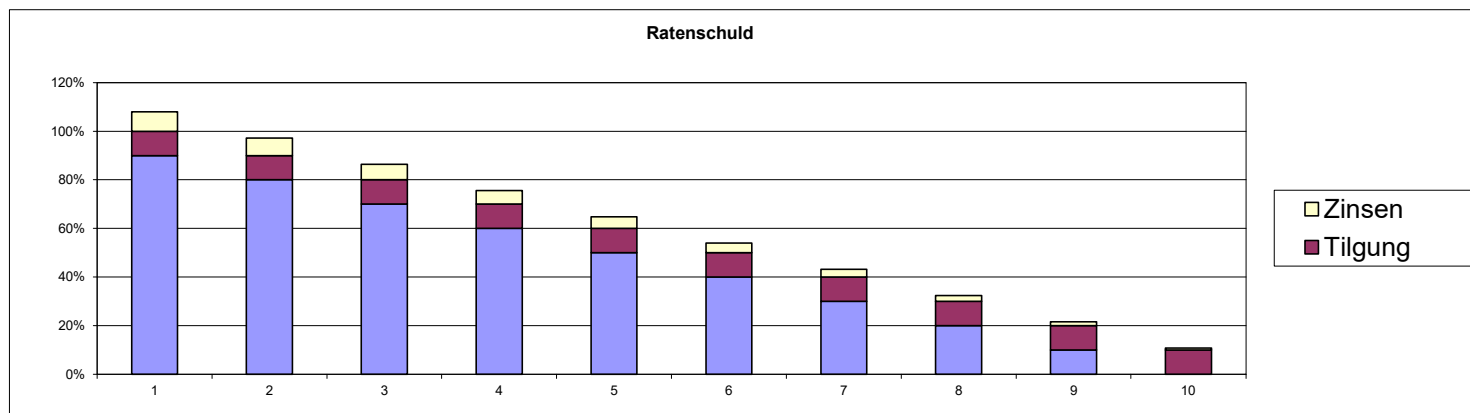
Am Ende der letzten Periode sind deshalb neben der Anfangsschuld alle aufgelaufenen Zinsen und Zinseszinsen insgesamt zu zahlen.



3. Ratenschuld

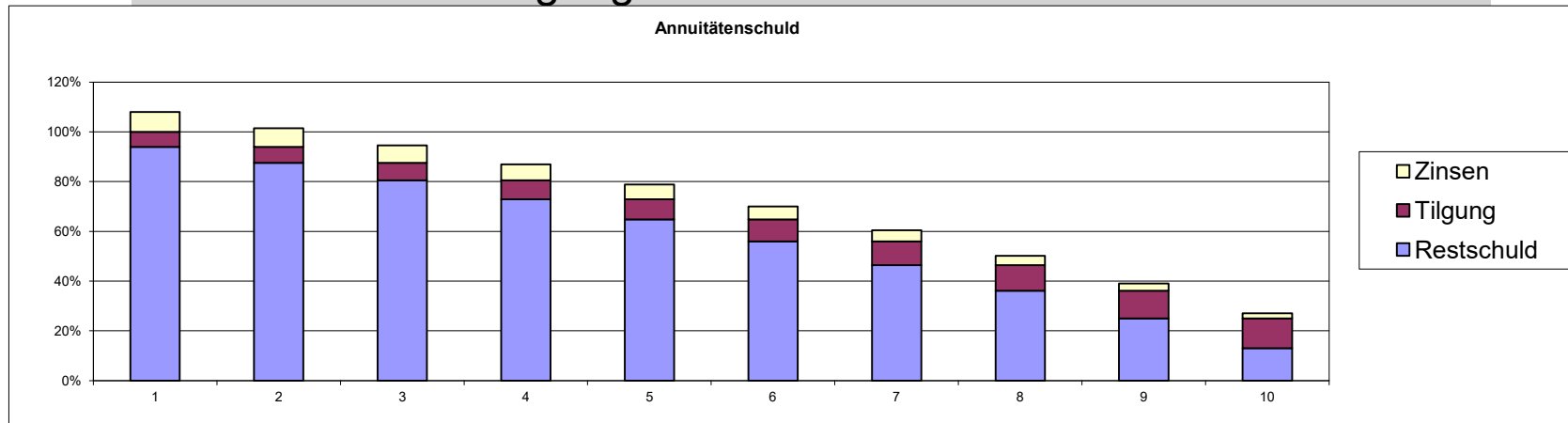
Die Tilgung wird gleichmäßig über alle Perioden verteilt, die Tilgungsanteile sind also

konstant gleich $T = T_t = \frac{K}{n}$. Damit nimmt die Restschuld linear ab, ebenso die zu zahlenden Zinsen und damit auch die Annuitäten.



4. Annuitätenschuld bzw. Annuitätentilgung

Im Gegensatz zu allen anderen Formen sind hier die Annuitäten, also die Zahlungen konstant $A = A_t$. Dadurch bleibt die finanzielle Belastung des Schuldners immer gleich hoch. Deshalb ist diese Tilgungsform mit Abstand am weitesten verbreitet.

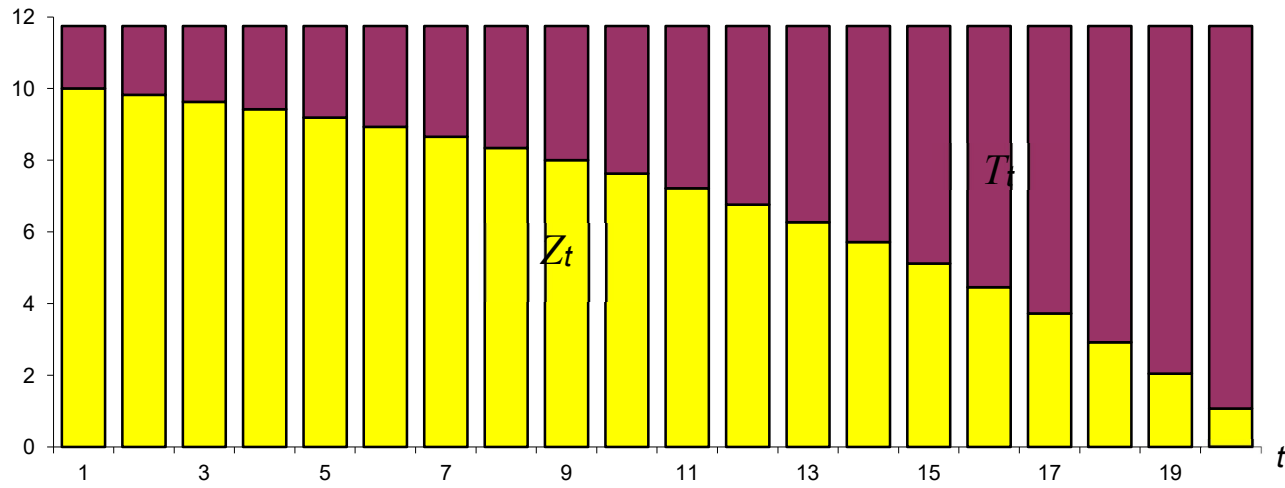


$$A = Kq^n \frac{q-1}{q^n-1} \quad (\text{Annuitätenformel})$$

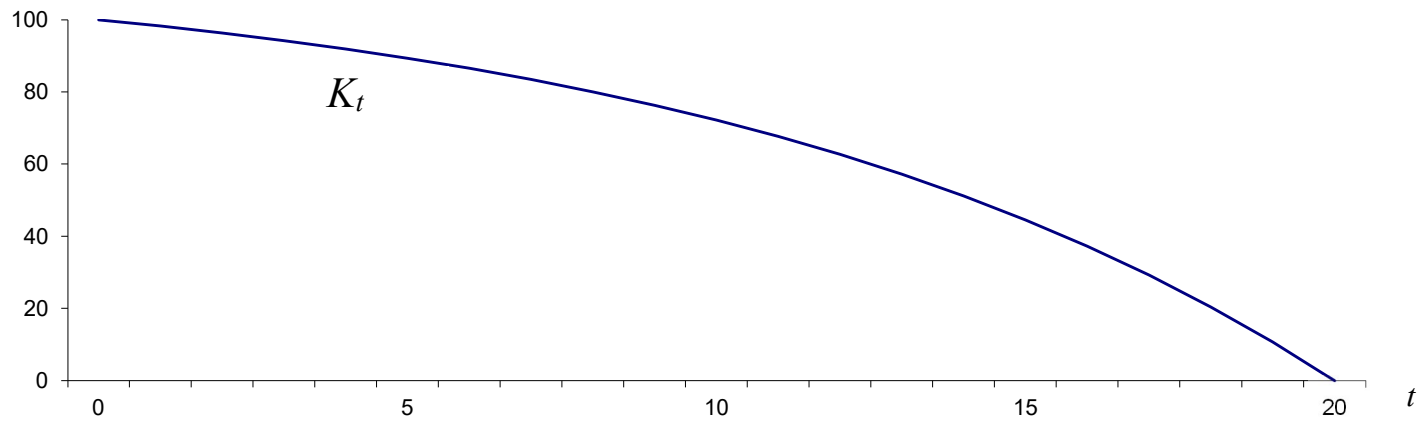
$$\text{Restschuld nach } t \text{ Perioden: } K_t = Kq^t - A \frac{q^t-1}{q-1} = K \frac{q^n - q^t}{q^n-1}$$

$$\text{Dauer bis zur vollständige Tilgung: } n = \frac{\ln \frac{A}{A-Ki}}{\ln q}$$

➔ Die Annuitäten sind zwar immer gleich groß, ihre Zusammensetzung ändert sich aber: Die Zinsanteile nehmen allmählich ab zugunsten der Tilgungsanteile.



Die Restschuld bildet in Abhängigkeit von der Zeit t ein Exponentialfunktion, die streng monoton fallend und konkav ist.



Beispiel 1.17: (Annuitätenschuld)

Ein Kredit über 100.000 € soll bei 6% p.a. Verzinsung mit jährlichen konstanten Annuitäten zurückgezahlt werden.

a) Wie lauten Annuität und Tilgungsplan bei einer Laufzeit von 8 Jahren?

(1)	(3)	(4)	(5)	(6)
Jahr t	Restschuld K_{t-1} (Beginn t)	Zinsen Z_t (Ende t)	Tilgung T_t (Ende t)	Annuität A_t (Ende t)
1	100.000,00 €	6.000,00 €	10.103,59 €	16.103,59 €
2	89.896,41 €	5.393,78 €	10.709,81 €	16.103,59 €
3	79.186,60 €	4.751,20 €	11.352,39 €	16.103,59 €
4	67.834,21 €	4.070,05 €	12.033,54 €	16.103,59 €
5	55.800,67 €	3.348,04 €	12.755,55 €	16.103,59 €
6	43.045,12 €	2.582,71 €	13.520,88 €	16.103,59 €
7	29.524,24 €	1.771,45 €	14.332,14 €	16.103,59 €
8	15.192,10 €	911,53 €	15.192,06 €	16.103,59 €
9	0,04 €		$\Sigma =$ 99.999,96 €	

b) Wann wäre der Kredit abgelöst, wenn jährlich 10.000 € gezahlt würden?