Aufgabe 2:

Prüfen Sie für die folgenden Kraftfelder jeweils, ob es sich um eine *Zentralkraft* und ob es sich um eine *konservative Kraft* handelt. Bestimmen Sie gegebenenfalls das Potential.

(a) $\vec{F} = -k\vec{r}$

(b) $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r}$

(c) $\vec{F} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

(d) $\vec{F} = -c\dot{r}^2\vec{r}$

(e) $\vec{F} = (\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r}$

Hinweis: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

konservative Kraft: siehe A1

Zentralkraft: $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\hat{r}$, also $\vec{F}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$

(a) $\vec{F} = -k\vec{r} = -\frac{k}{r}\hat{r}$

Zentralkraft

konservativ, denn

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -k\, \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$$

Potential:

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r_0}) + \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot (-k\vec{r})$$

Wähle für jedes feste (θ, φ) [Kugelkoordinaten] den Weg von $\vec{r_0} = 0$ nach $\vec{r}(r, \theta, \varphi) = r\hat{r}(\theta, \varphi)$ mit

$$\vec{r}'(r'; \underbrace{\theta, \varphi}_{\text{feste Parameter}}) = r'\hat{r}(\theta, \varphi) \text{ mit } r' \in [0, r]$$

$$\Rightarrow d\vec{r}' = \hat{r}\, dr'$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}(r; \theta, \varphi)) = V(0) + \int_0^r dr'\hat{r} \cdot (-kr'\hat{r})$$

$$= V(0) - k\int_0^r dr'\, r' = V(0) - \frac{k}{2}\vec{r}^2$$

b) $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r}$ ist keine Zentralkraft, da $\vec{F}(\vec{r}) \perp \vec{r}$.

Konservativ?

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{r}) = \vec{a} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{r})}_{=3} - \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}}_{=\vec{a}} = 2\vec{a} \neq 0$$

c) $\vec{F} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ ist keine Zentralkraft, da $\vec{F} \parallel \vec{r}$ höchstens in der Ebene $\perp$ zu $\vec{\omega}$ sein kann

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r}) - \vec{r}\,\vec{\omega}^2\right)$$

$$= \vec{\nabla}(\vec{\omega}\vec{r}) \times \vec{\omega} - \vec{\omega}^2 \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{r}}_{=0}$$

$$= \underbrace{(\vec{\nabla} \circ \vec{r})\vec{\omega}}_{=\vec{\omega}} \times \vec{\omega} = 0 \quad \rightarrow \text{konservativ}$$

Potential mit $\vec{r}_0 = 0$, $V(\vec{r}_0) = 0$:

$$V(\vec{r}) = m \int_0^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}\,') = m \int_0^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \left[(\vec{\omega} \cdot \vec{r}\,')\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}\,' \right]$$

Parametrisiere nun in Kugelkoordinaten $\vec{r}\,'(r'; \theta, \varphi) = r'\hat{r}(\theta, \varphi)$

mit $r' \in [0, r]$, $d\vec{r}\,' = \hat{r}\,dr'$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = m \int_0^r dr' (\hat{r} \cdot \vec{\omega}) \cdot (\vec{\omega} \cdot r'\hat{r}) - m\omega^2 \int_0^r dr'\, \hat{r} \cdot (r'\hat{r})$$

$$= m(\hat{r} \cdot \vec{\omega})^2 \int_0^r dr'\, r' - m\omega^2 \int_0^r dr'\, r'$$

$$= \frac{1}{2} m \left((\hat{r} \cdot \vec{\omega})^2 r^2 - \omega^2 r^2 (\hat{r} \cdot \hat{r}) \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left((\vec{r} \cdot \vec{\omega})^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(\vec{r} \cdot \vec{r}) \right) = -\frac{1}{2} m (\vec{r} \times \vec{\omega})^2$$

d) $\vec{F} = -c\,\dot{\vec{r}}^2\,\vec{r}$

Ist nicht konservativ, da geschwindigkeitsabhängig!
Ist aber eine Zentralkraft

e) $\vec{F} = (\vec{a}\cdot\vec{r})\,\vec{r}$

Zentralkraft

konservativ?

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r} = -\vec{r}\times\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{a}\,\vec{r})}_{=\vec{a}} + (\vec{a}\cdot\vec{r})\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{r})}_{=0}$$

$$= \vec{a}\times\vec{r} \neq 0$$