

### 3 Aufgabe 3.9

#### 3.1 Aufgabenstellung

Ein Einfeldträger wird durch eine Streckenlast sowie eine vertikale und eine horizontale Einzelkraft belastet.

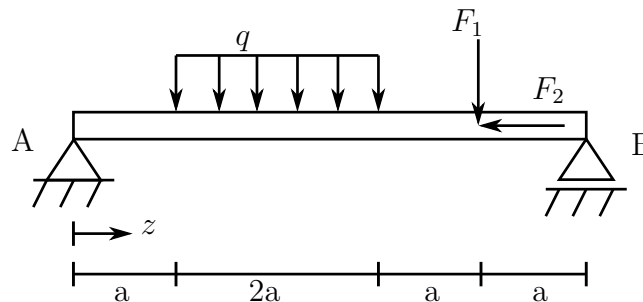


Abbildung 1: Gegebenes System

1. Gegeben:  $F_1 = 10qa$ ,  $F_2 = 5qa$ ,  $q$ ,  $a$
2. Gesucht:
  - a) Lagerreaktionen in A und B
  - b) Schnittreaktionen und deren graphische Darstellung (Schnittgrößenverläufe)
  - c) Maximaler Betrag des Biegemoments

#### 3.2 Lösungsvorschlag

Für die Lösung der Aufgabe wird folgendes Vorgehen vorgeschlagen:

1. Prüfung der Statischen Bestimmtheit  $n$
2. Freischnitt
3. Gleichgewichtsbedingungen und Berechnung der Lagerreaktionen
4. Schnittgrößenverläufe - Lösung mit bereichsweiser Betrachtung
5. Schnittgrößenverläufe - Alternative Lösung mit Superpositionsprinzip
6. Maximaler Betrag des Biegemoments

### 3.2.1 Prüfung der Statischen Bestimmtheit $n$

Die Statische Bestimmtheit eines Systems wird definiert durch

$$n = c + g - b \quad (1)$$

mit  $c$  der Anzahl an Lagerreaktionen,  $g$  der Anzahl an Gelenkreaktionen und  $b$  der Anzahl an Gleichgewichtsbedingungen.

Für das Gesamtsystem gilt

1. Anzahl an Lagerreaktionen: 1x2-wertiges Lager und 1x1-wertiges Lager  $c = 2 + 1 = 3$
2. Anzahl an Gelenkreaktionen: keine Gelenke vorhanden  $g = 0$
3. Anzahl an Gleichgewichtsbedingungen: Ebene Betrachtung, 1 Körper  $b = 3$

Die Statische Bestimmtheit des Gesamtsystems ergibt sich somit zu

$$n = c + g - b = 3 + 0 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{statisch bestimmt} \quad (2)$$

### 3.2.2 Freischnitt

Der Freischnitt ist in Abbildung 2 dargestellt. Das 2-wertige Lager in A besitzt eine horizontale und eine vertikale Kraftkomponente. Das 1-wertige Lager in B nur eine vertikale Lagerkraft. Statt der Streckenlast  $q$  wird die Resultierende  $F_R = q \cdot 2a$  angetragen. Da die Streckenlast konstant ist und über eine Länge  $2a$  wirkt, wird die Resultierende bei halber Streckenlastlänge  $a$  angesetzt, vgl. Tabelle Ersatzschaubilder Streckenlasten aus Kapitel 3.

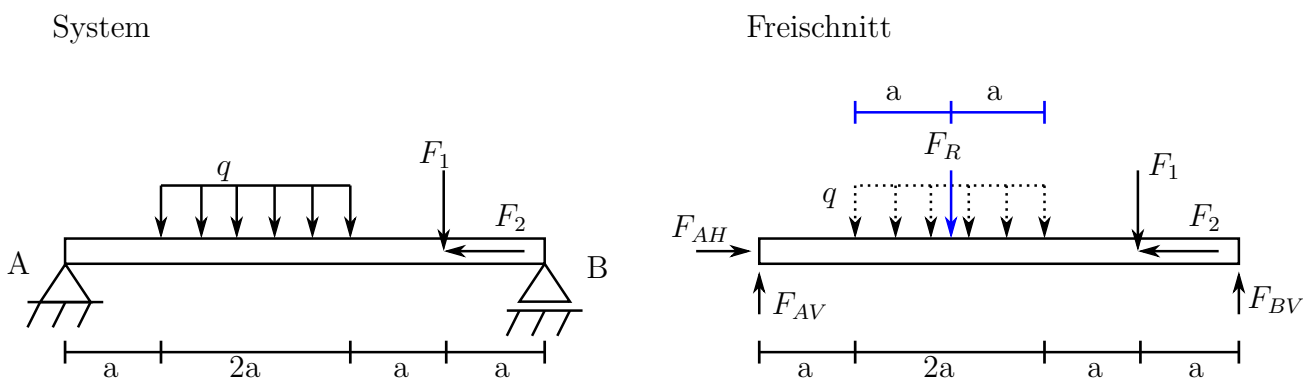


Abbildung 2: Freischnitt

### 3.2.3 Gleichgewichtsbedingungen und Berechnung der Lagerreaktionen

Für den in Abbildung 2 dargestellten Freischnitt können zunächst die Kräftegleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} \rightarrow: \quad & F_{AH} - F_2 = F_{AH} - 5qa = 0 \\ \uparrow: \quad & F_{AV} + F_{BV} - F_R - F_1 = F_{AV} + F_{BV} - 2qa - 10qa = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Wird das Momentengleichgewicht um Punkt A betrachtet, so gilt

$$\hat{A} : -F_R \cdot 2a - F_1 \cdot 4a + F_{BV} \cdot 5a = -4qa^2 - 40qa^2 + F_{BV} \cdot 5a = 0 \quad (4)$$

Lösen und Einsetzen liefert die Lagerreaktionen

$$\begin{aligned} F_{AH} &= 5qa \\ F_{BV} &= 8,8qa \\ F_{AV} &= 3,2qa \end{aligned} \quad (5)$$

### 3.2.4 Schnittgrößenverläufe - Lösung mit bereichsweiser Betrachtung

In diesem Lösungsvorschlag werden die Schnittgrößenverläufe ausgehend vom linken Balkenrand bestimmt. Prinzipiell ist es allerdings egal, ob die Schnittgrößenverläufe von links oder rechts anfangend bestimmt werden. Für die Berechnung der Schnittgrößenverläufe wird der Balken in

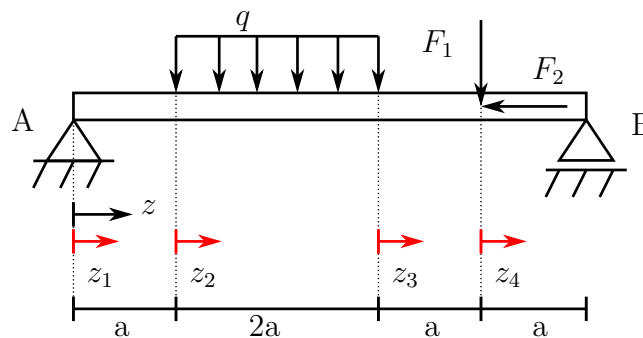


Abbildung 3: Absteckung der Bereiche 1) bis 4)

vier Abschnitte aufgeteilt, vgl. Abbildung 3. Teilbereiche sind erforderlich bei Änderungen in der Belastung (Beginn oder Ende Streckenlast, Angriffspunkt Einzellast), Lagern und Änderungen in der Geometrie (hier nicht vorhanden). Für jeden einzelnen Bereich wird ein neues Koordinatensystem  $z_i$  definiert. Die Bereiche werden einzeln freigeschnitten und die Schnittgrößen angetragen, Abbildung 4. Bereichsweise werden dann die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt

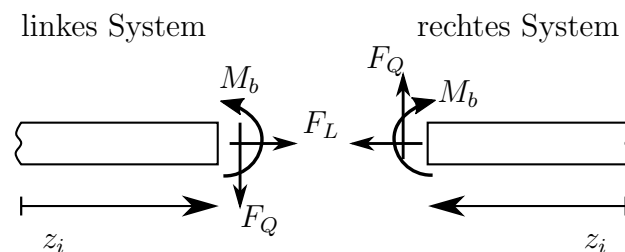


Abbildung 4: Linkes und rechtes System

und die Schnittgrößen so berechnet. Wird das Momentengleichgewicht um das Schnittufer aufgestellt, so wird dies mit  $\hat{P}$  bezeichnet. Innerhalb dieses Lösungsvorschlags wird immer das linke System betrachtet.

**Bereich 1)  $0 \leq z < a$  bzw.  $0 \leq z_1 \leq a$** 

## 1. Freischnitt + Gleichgewicht

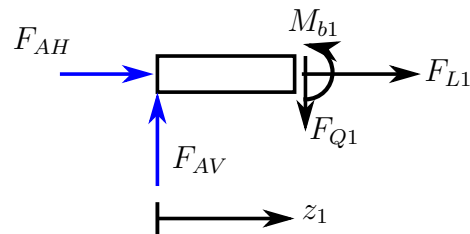


Abbildung 5: Freischnitt Bereich 1)

$$\begin{aligned}
 \rightarrow: \quad F_{AH} + F_{L1} &= 0 \Rightarrow F_{L1} = -F_{AH} = -5qa \\
 \uparrow: \quad F_{AV} - F_{Q1} &= 0 \Rightarrow F_{Q1} = F_{AV} = 3,2qa \\
 \widehat{P}: \quad F_{AV} \cdot z_1 - M_{b1} &= 0 \Rightarrow M_{b1} = F_{AV} \cdot z_1 = 3,2qa \cdot z_1
 \end{aligned} \tag{6}$$

## 2. Bereichsgrenzen betrachten

 Bereichsgrenze bei  $z_1 = 0$ 

$$\begin{aligned}
 \rightarrow: \quad F_{L1}(z_1 = 0) &= -5qa \\
 \uparrow: \quad F_{Q1}(z_1 = 0) &= 3,2qa \\
 \widehat{P}: \quad M_{b1}(z_1 = 0) &= 3,2qa \cdot 0 = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

Hinweis: Da am linken Rand des Balkens ein Festlager angesetzt ist, **muss** der Biegemomentenverlauf hier null ergeben, da Festlager keine Biegemomente aufnehmen können.

 Bereichsgrenze bei  $z_1 = a$ 

$$\begin{aligned}
 \rightarrow: \quad F_{L1}(z_1 = a) &= -5qa \\
 \uparrow: \quad F_{Q1}(z_1 = a) &= 3,2qa \\
 \widehat{P}: \quad M_{b1}(z_1 = a) &= 3,2qa \cdot a = 3,2qa^2
 \end{aligned} \tag{8}$$

## 3. Schnittgrößenverläufe zeichnen

- Längskraftverlauf:  $F_{L1} = -5qa = \text{konstant}$ . Die Funktion hängt nicht von der Variablen  $z_1$  ab und ist deshalb konstant.
- Querkraftverlauf:  $F_{Q1} = 3,2qa = \text{konstant}$ . Die Funktion hängt nicht von der Variablen  $z_1$  ab und ist deshalb konstant.
- Momentenverlauf:  $M_{b1} = 3,2qa \cdot z_1 = \text{linear}$ . Die Funktion hängt linear von der Variablen  $z_1$  ab.

Hinweis: Innerhalb dieses Lösungsvorschlags werden die Schnittgrößenverläufe zunächst für jeden Bereich einzeln gezeichnet. Dies geschieht lediglich, um den Aufbau der graphischen Schnittgrößenverläufe übersichtlicher darstellen zu können. Die komplette Darstellung der Schnittgrößenverläufe wie in Abbildung 15, ist ausreichend, um die Aufgabenstellung zu erfüllen. Eine einzelne Bereichsdarstellung muss nicht gemacht werden, außer es wird ausdrücklich in der Aufgabenstellung verlangt.

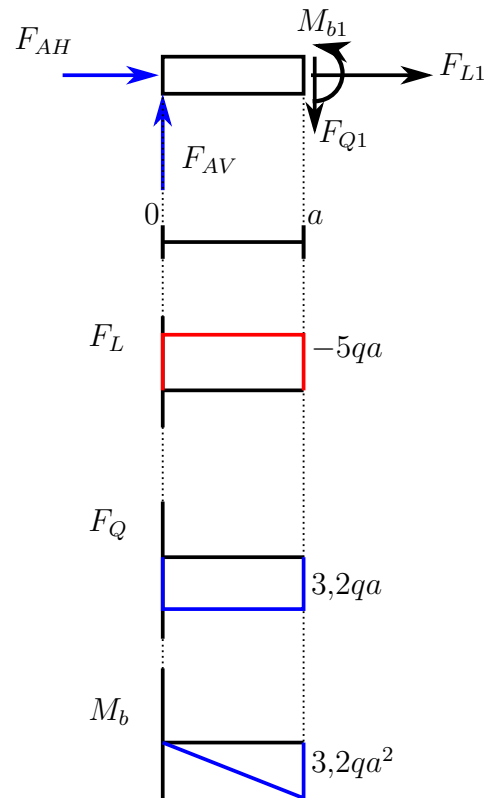


Abbildung 6: Schnittgrößenverläufe Bereich 1)

Hinweis: Wo am Balken die positiven und negativen Anteile der Schnittgrößen angetragen werden, ist abhängig von der Definition der Teilbereiche und vom gewählten Freischnitt, Abbildung 7.

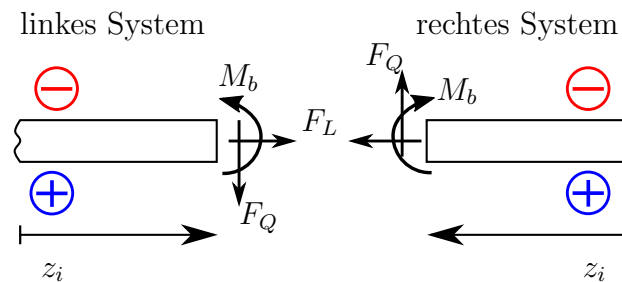


Abbildung 7: Positive und negative Auftragungsbereiche am linken und rechten System

**Bereich 2)  $0 \leq z \leq 3a$  und  $0 \leq z_2 \leq 2a$** 

## 1. Freischnitt + Gleichgewicht

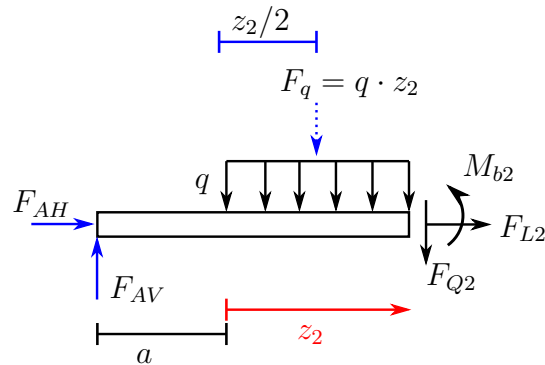


Abbildung 8: Freischnitt Bereich 2)

$$\begin{aligned}
 \rightarrow: \quad & F_{AH} + F_{L2} = 0 \Rightarrow F_{L2} = -5qa \\
 \uparrow: \quad & F_{AV} - F_q - F_{Q2} = 0 \Rightarrow F_{Q2} = 3,2qa - q \cdot z_2 \\
 \hat{P}: \quad & F_{AV} \cdot (a + z_2) - F_q \cdot \frac{z_2}{2} - M_{b2} = 0 \Rightarrow M_{b2} = 3,2qaz_2 + 3,2qa^2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2}
 \end{aligned} \quad (9)$$

## 2. Bereichsgrenzen betrachten

 Bereichsgrenze bei  $z_2 = 0$ 

$$F_{L2}(z_2 = 0) = -5qa \quad (10)$$

$$F_{Q2}(z_2 = 0) = 3,2qa \quad (11)$$

$$M_{b2}(z_2 = 0) = 3,2qa^2 \quad (12)$$

Hinweis: Die Schnittgrößenverläufe an den Bereichsgrenzen  $z_1 = a$  und  $z_2 = 0$  müssen übereinstimmen, da hier keine Einzel- oder Lagerkräfte angreifen.

 Bereichsgrenze bei  $z_2 = 2a$ 

$$F_{L2}(z_2 = 2a) = -5qa \quad (13)$$

$$F_{Q2}(z_2 = 2a) = 1,2qa \quad (14)$$

$$M_{b2}(z_2 = 2a) = 7,6qa^2 \quad (15)$$

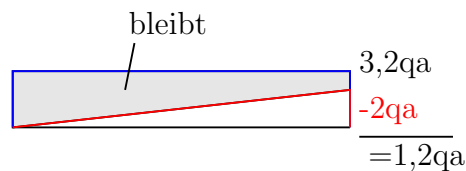
## 3. Schnittgrößenverläufe zeichnen

- Längskraftverlauf:  $F_{L2} = -5qa = \text{konstant}$ . Die Funktion hängt nicht von der Variablen  $z_2$  ab und ist deshalb konstant.
- Querkraftverlauf:  $F_{Q2} = 3,2qa - q \cdot z_2 = \text{konstant} - \text{linear}$ . Die Funktion besitzt einen konstanten und einen linearen Anteil.
- Momentenverlauf:  $M_{b2} = 3,2qa^2 + 3,2qaz_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = \text{konstant} + \text{linear} - \text{quadratisch}$ .

Da die Verläufe der Querkraft und des Moments aus mehreren Anteilen bestehen, werden Schaubilder gezeichnet, um den Verlauf der Schnittgrößen nachvollziehen zu können. Für den endgültigen Schnittgrößenverlauf ist die Verwendung eines **Schaubildes** hilfreich. Hierfür werden alle positiven Schnittgrößenanteile zusammengezählt und als blaue Linie über der z-Achse aufgetragen. Anschließend werden alle negativen Schnittgrößenanteile zusammengezählt und als rote Linie über der z-Achse aufgetragen. Dabei wird das Vorzeichen vernachlässigt. Der Abstand zwischen der roten und blauen Linie ist in Abbildung 9 grau dargestellt. Die graue Fläche entspricht dabei der resultierenden Fläche der Schnittgrößenverlauf infolge der Superposition und kann einen Hinweis auf den Schnittgrößenverlauf geben.

Querkraftverlauf

$$F_{Q2} = 3,2qa - q \cdot z_2 = \text{konstant-linear}$$



Momentenverlauf

$$M_{b2} = 3,2qa^2 + 3,2qa \cdot z_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = \text{konstant+linear-quadratisch}$$

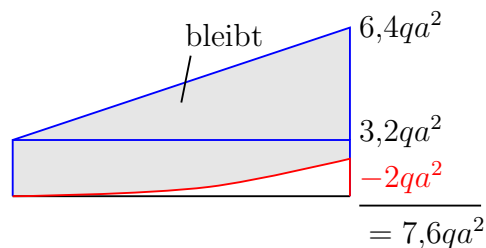


Abbildung 9: Schaubilder Bereich 2)

Hinweis: Das Zeichnen von Schaubildern kann eine Hilfestellung sein, um den Schnittgrößenverlauf zu bestimmen. Alternativ kann der Schnittgrößenverlauf auch direkt bestimmt werden oder indem mehrere Punkte in die Funktion, z.B.  $M_b(z)$ , eingesetzt und ausgewertet werden und zwischen den berechneten Funktionswerten der Schnittgrößenverlauf extrapoliert wird. Wichtig ist, dass aus der Skizze der Schnittgrößenverläufe klar hervorgeht,

- ob der Verlauf im betrachteten Bereich konstant, linear oder nichtlinear ist.
- bei nichtlinearem Verlauf: ob der Verlauf konkav oder konvex ist.
- wo die Extremwerte (Minimum, Maximum) liegen und deren Zahlenwerte.

Die Schnittgrößenverläufe setzen sich zusammen aus den Schnittgrößenverläufen von Bereich 1) für  $0 \leq z \leq a$  und den Schnittgrößenverläufen für Bereich 2) für  $a \leq z \leq 3a$ .

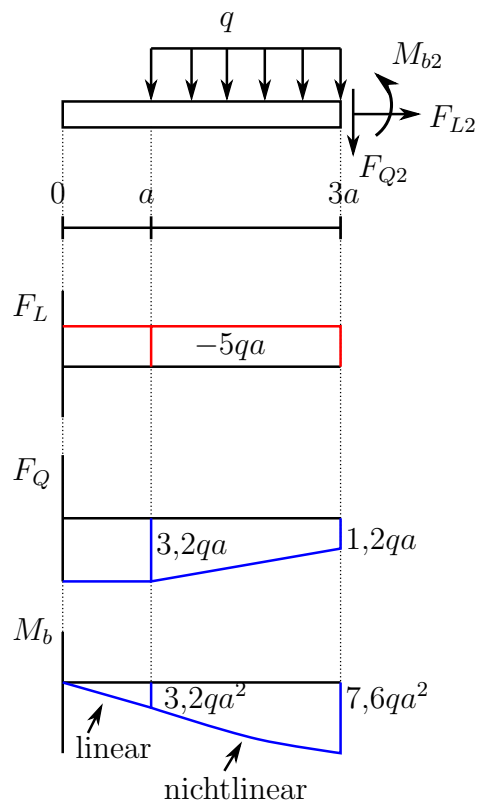


Abbildung 10: Schnittgrößenverläufe Bereich 2)

**Bereich 3)  $0 \leq z \leq 4a$  bzw.  $0 \leq z_3 \leq a$** 

## 1. Freischnitt + Gleichgewicht

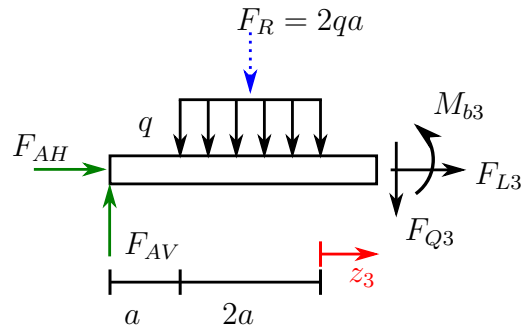


Abbildung 11: Schnittreaktionen Bereich 3)

$$\begin{aligned}
 \rightarrow: \quad & F_{AH} + F_{L3} = 0 \Rightarrow F_{L3} = -F_{AH} = -5qa \\
 \uparrow: \quad & F_{AV} - F_R - F_{Q3} = 0 \Rightarrow F_{Q3} = F_{AV} - F_R = 1,2qa \\
 \overset{\sim}{P}: \quad & F_{AV} \cdot (3a + z_3) - F_R \cdot (a + z_3) - M_{b3} = 0 \Rightarrow M_{b3} = 1,2qaz_3 + 7,6qa^2 \quad (16)
 \end{aligned}$$

## 2. Bereichsgrenzen betrachten

 Bereichsgrenze bei  $z_3 = 0$ 

$$F_{L3}(z_3 = 0) = -5qa \quad (17)$$

$$F_{Q3}(z_3 = 0) = 1,2qa \quad (18)$$

$$M_{b3}(z_3 = 0) = 7,6qa^2 \quad (19)$$

Hinweis: Die Schnittgrößenverläufe an den Bereichsgrenzen  $z_2 = 2a$  und  $z_3 = 0$  müssen übereinstimmen, da hier keine Einzel- oder Lagerkräfte angreifen.

 Bereichsgrenze bei  $z_3 = a$ 

$$F_{L3}(z_3 = a) = -5qa \quad (20)$$

$$F_{Q3}(z_3 = a) = 1,2qa \quad (21)$$

$$M_{b3}(z_3 = a) = 8,8qa^2 \quad (22)$$

## 3. Schnittgrößenverläufe zeichnen

- Längskraftverlauf:  $F_{L3} = -5qa = \text{konstant}$ . Die Funktion hängt nicht von der Variablen  $z_3$  ab und ist deshalb konstant.
- Querkraftverlauf:  $F_{Q3} = 1,2qa = \text{konstant}$ . Die Funktion hängt nicht von der Variablen  $z_3$  ab und ist deshalb konstant.
- Momentenverlauf:  $M_{b3} = 7,6qa^2 + 1,2qaz_3 = \text{konstant+linear}$ .

Da der Verlauf des Biegemoments aus mehreren Anteilen besteht, wird ein Schaubild gezeichnet, um die Form des Verlaufs besser abschätzen zu können.

Momentenverlauf

$$M_{b3} = 7,6qa^2 + 1,2qa \cdot z_3 = \text{konstant} + \text{linear}$$

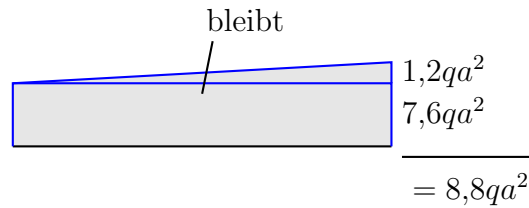


Abbildung 12: Schaubild Bereich 3)

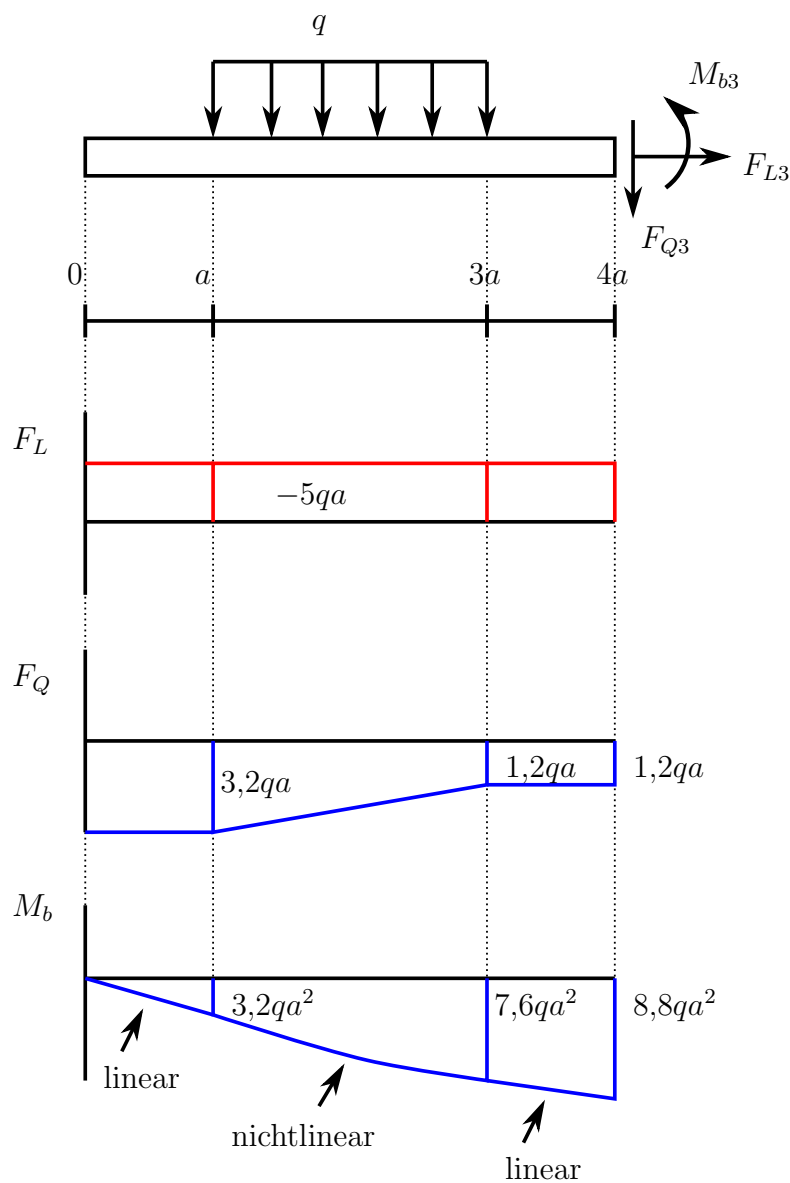


Abbildung 13: Schnittgrößenverläufe Bereich 3)

**Bereich 4)**  $0 \leq z < 5a$  bzw.  $0 \leq z_4 < a$ 

## 1. Freischnitt + Gleichgewicht

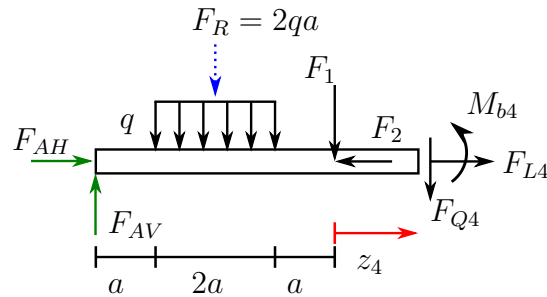


Abbildung 14: Freischnitt Bereich 4)

$$\begin{aligned}
 \rightarrow: \quad & F_{AH} - F_2 + F_{L4} = 0 \Rightarrow F_{L4} = -5qa + 5qa = 0 \\
 \uparrow: \quad & F_{AV} - F_R - F_1 - F_{Q4} = 0 \Rightarrow F_{Q4} = -8,8qa \\
 \widehat{P}: \quad & F_{AV} \cdot (4a + z_4) - F_R \cdot (2a + z_4) - F_1 \cdot z_4 - M_{b4} = 0 \Rightarrow M_{b4} = 8,8qa^2 - 8,8qaz_4
 \end{aligned} \tag{23}$$

## 2. Bereichsgrenzen betrachten

 Bereichsgrenze bei  $z_4 = 0$ 

$$F_{L4}(z_4 = 0) = 0 \tag{24}$$

$$F_{Q4}(z_4 = 0) = -8,8qa \tag{25}$$

$$M_{b4}(z_4 = 0) = 8,8qa^2 \tag{26}$$

Hinweis: Die Schnittgrößenverläufe an den Bereichsgrenzen  $z_3 = a$  und  $z_4 = 0$  müssen für  $F_Q$  und  $F_L$  nicht übereinstimmen, da hier Einzellasten angreifen.

 Bereichsgrenze bei  $z_4 = a$ 

$$F_{L4}(z_4 = a) = 0 \tag{27}$$

$$F_{Q4}(z_4 = a) = -8,8qa \tag{28}$$

$$M_{b4}(z_4 = a) = 0 \tag{29}$$

Hinweis: Die Schnittgrößenverläufe an der Bereichsgrenze  $z_4 = a$  müssen von dem angeschlossenen Lager aufgenommen werden können. Da am rechten Balkenrand ein Loslager angreift, kann dieses nur Querkräfte aufnehmen. Der Biegemomentenverlauf und der Längskraftverlauf müssen hier deshalb gleich null sein.

## 3. Schnittgrößenverläufe zeichnen

- Längskraftverlauf:  $F_{L4} = 0 = \text{konstant}$ . Die Funktion hängt nicht von der Variablen  $z_4$  ab und ist deshalb konstant.
- Querkraftverlauf:  $F_{Q4} = -8,8qa = \text{konstant}$ . Die Funktion hängt nicht von der Variablen  $z_4$  ab und ist deshalb konstant.
- Momentenverlauf:  $M_{b4} = 8,8qa^2 - 8,8qa \cdot z_4 = \text{konstant-linear}$ .

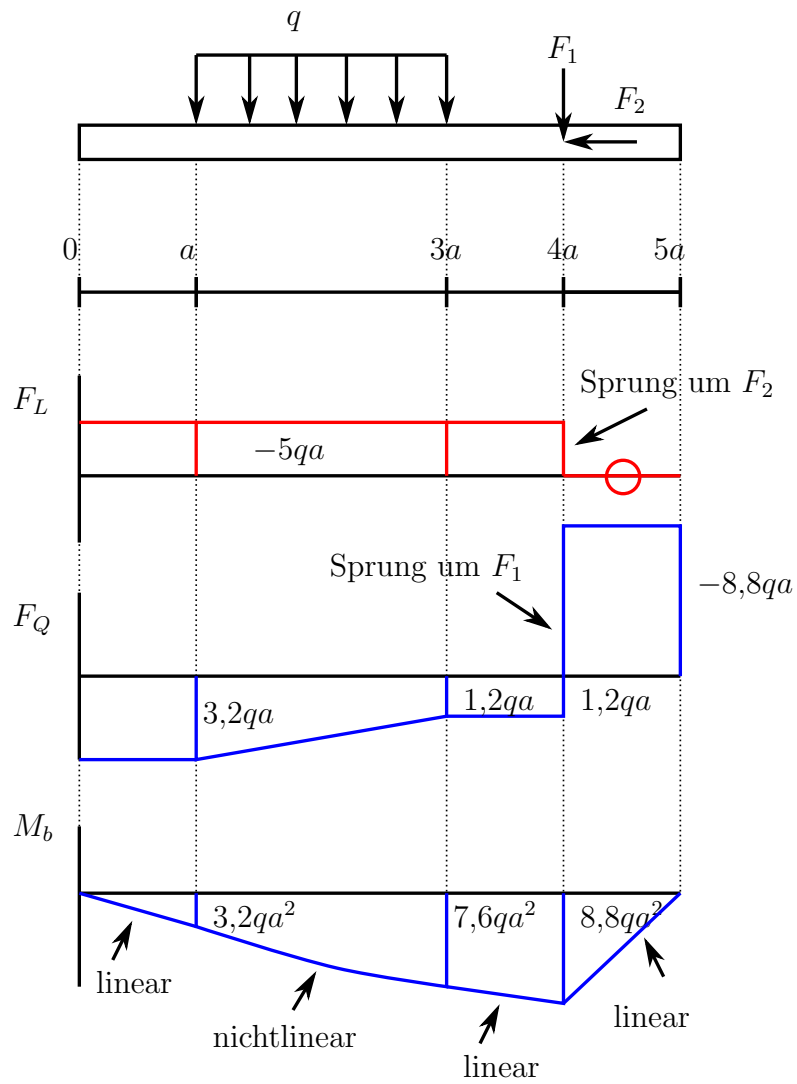


Abbildung 15: Schnittgrößenverläufe komplett

### 3.2.5 Schnittgrößenverläufe - Alternative Lösung mit Superpositionsprinzip

Für Systeme mit mehreren angreifenden Lasten ist die Darstellung der Schnittgrößenverläufe nicht immer ganz einfach. In solchen komplexen Systemen kann es hilfreich sein, die Schnittgrößen getrennt nach den verschiedenen Lasten aufzustellen und sie anschließend zu einem Gesamtverlauf zu **superponieren**.

#### Längskraft

Die Längskraft  $F_L$  wird aus dem Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung bestimmt. Die Längskraft setzt sich somit aus einem Anteil  $F_{LAH}$  aus der horizontalen Lagerkraft  $F_{AH}$  und einem Anteil  $F_{L2}$  aus der horizontalen Einzelkraft  $F_2$  zusammen.

$$F_L = F_{LAH} + F_{L2} \quad (30)$$

Nach dem **Superpositionsprinzip** werden die Anteile  $F_{LAH}$  und  $F_{L2}$  dafür zunächst getrennt über das Kräftegleichgewicht aufgestellt und anschließend superponiert.

1. Wird nur die horizontale Lagerkomponente  $F_{AH}$  betrachtet, so gilt über die komplette Balkenlänge

$$\rightarrow: F_{AH} + F_{LAH} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{LAH} = -F_{AH} = -5qa \quad (31)$$

Der Verlauf der Längskraft infolge  $F_{AH}$  ist konstant über die komplette Balkenlänge, vgl. Abbildung 16.

2. Wird nur die horizontale Einzelkraft  $F_2$  betrachtet, so greift diese erst im Angriffspunkt  $z = 4a$  an und beeinflusst den Längskraftverlauf vorher nicht.

$$\rightarrow: F_{L2} = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 4a \\ F_2 & \text{für } z \geq 4a \end{cases} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{L2} = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 4a \\ 5qa & \text{für } z \geq 4a \end{cases} \quad (32)$$

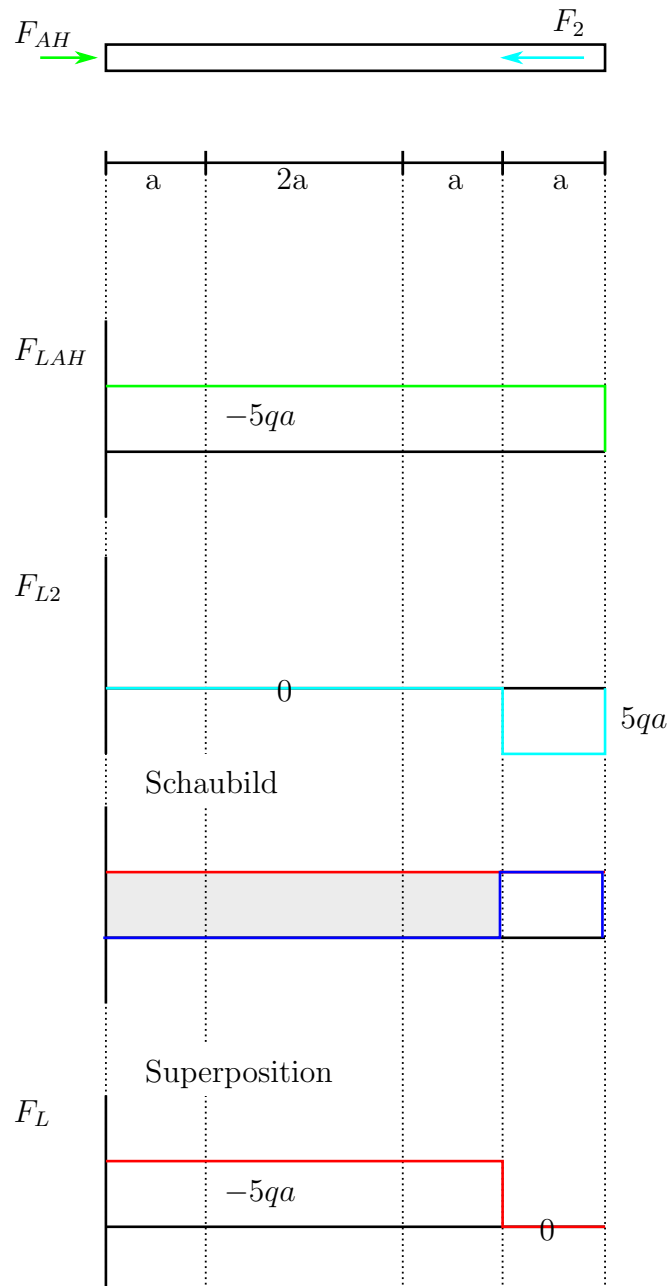
Der Verlauf der Längskraft infolge  $F_2$  ist somit zunächst 0 und ab  $z \geq 4a$  über die Balkenlänge konstant, vgl. Abbildung 16.

3. Für die Längskraft  $F_L$  gilt somit durch Superposition

$$F_L = F_{LAH} + F_{L2} = -5qa + \begin{cases} 0 & \text{für } z < 4a \\ 5qa & \text{für } z \geq 4a \end{cases} = \begin{cases} -5qa & \text{für } z < 4a \\ 0 & \text{für } z \geq 4a \end{cases} \quad (33)$$

Für den endgültigen Schnittgrößenverlauf ist die Verwendung eines **Schaubildes** hilfreich. Hierfür werden alle positiven Schnittgrößenanteile zusammengezählt und als blaue Linie über der  $z$ -Achse aufgetragen. Anschließend werden alle negativen Schnittgrößenanteile zusammengezählt und als rote Linie über der  $z$ -Achse aufgetragen. Dabei wird das Vorzeichen vernachlässigt. Der Abstand zwischen der roten und blauen Linie ist in Abbildung 16 grau dargestellt. Die graue Fläche entspricht dabei dem resultierenden Fläche der Schnittgröße infolge der Superposition und kann einen Hinweis auf den Schnittgrößenverlauf geben. In den Abbildungen 17 und 18 sind die Verläufe von Querkraft und Moment aufgetragen. In Abbildung 19 sind alle Verläufe dargestellt.

## Freischnitt Horizontalkräfte


 Abbildung 16: Verlauf Längskraft  $F_L$

## Freischnitt Vertikalkräfte

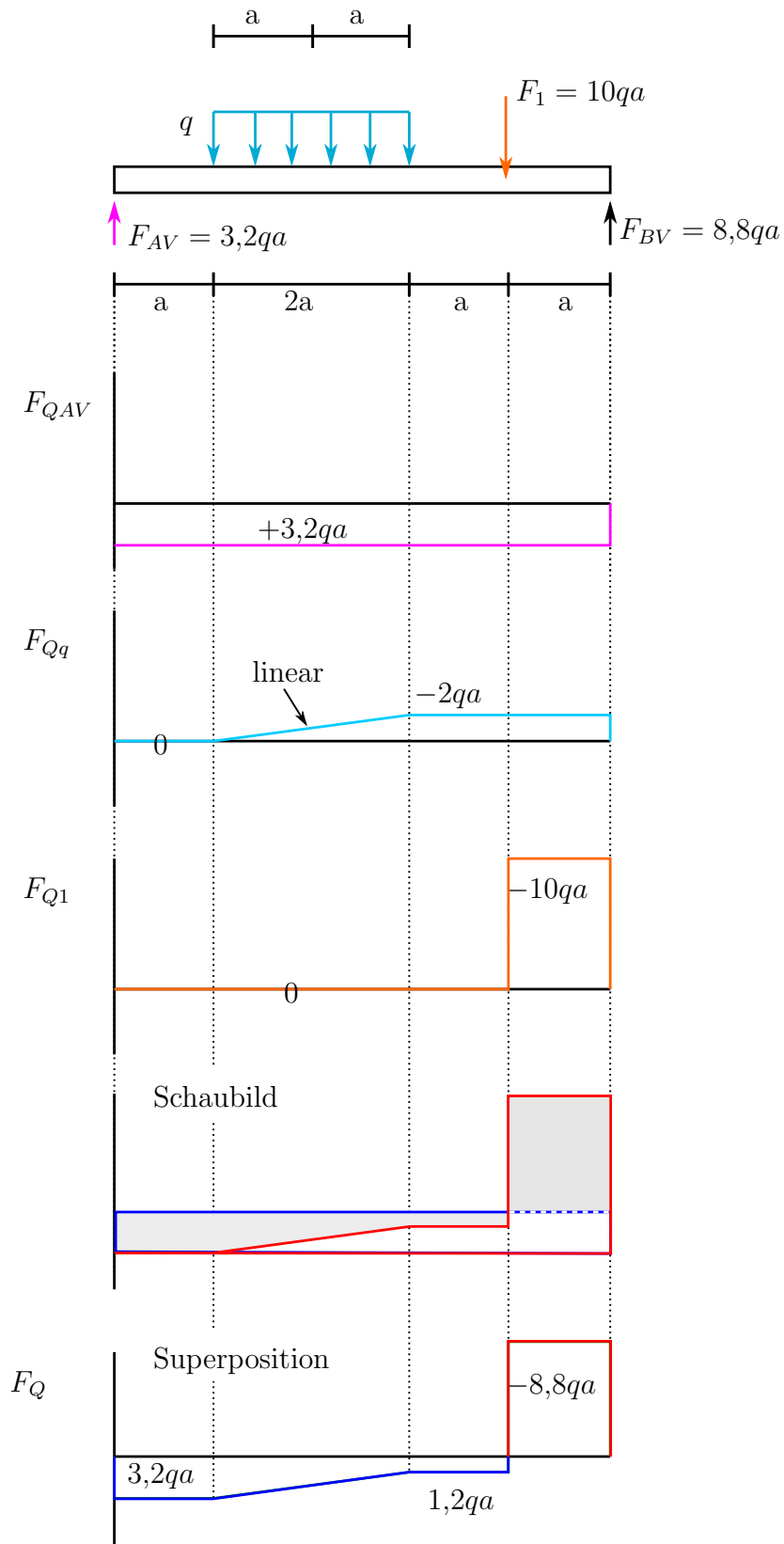


Abbildung 17: Querkraftverläufe

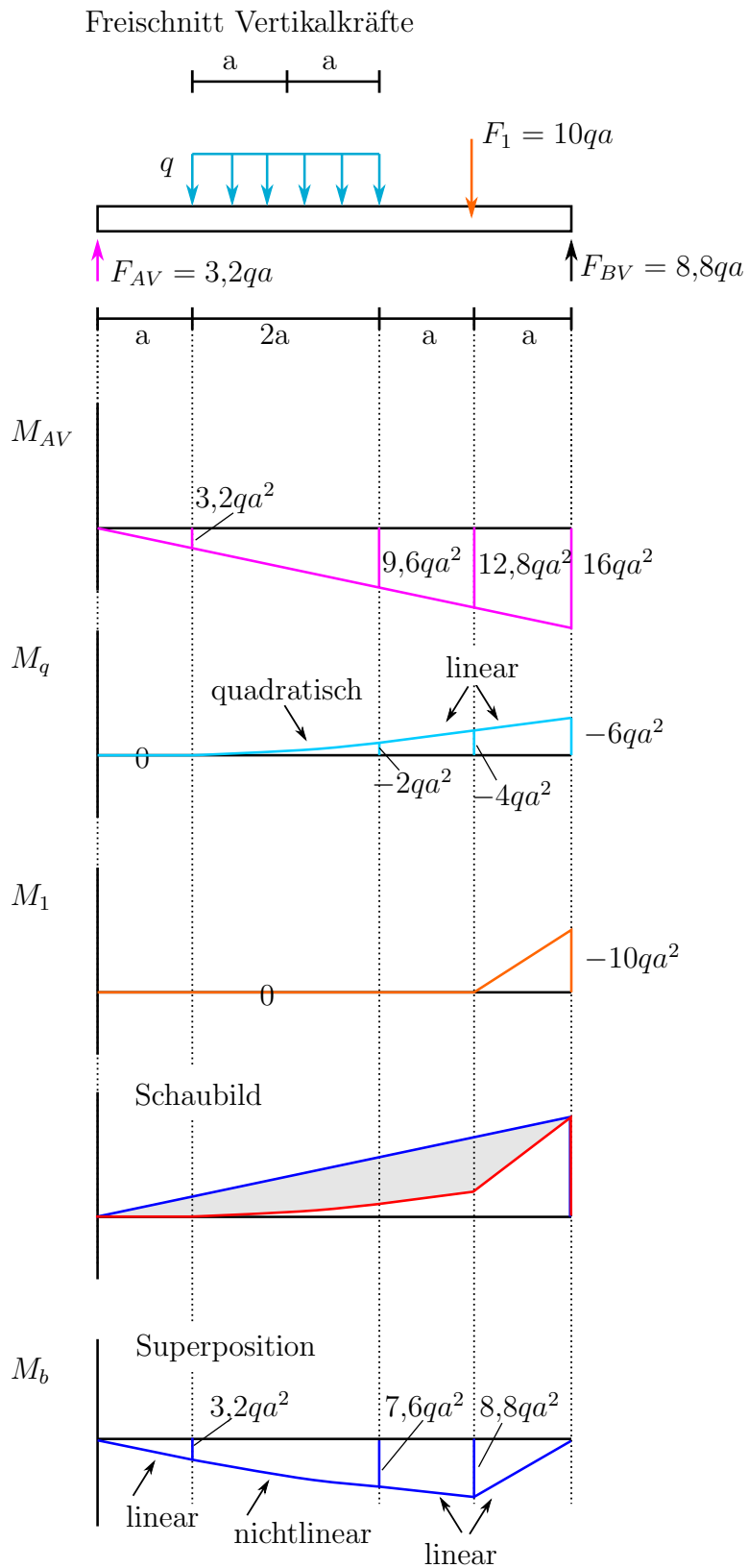


Abbildung 18: Momentenverläufe

## Freischnitt

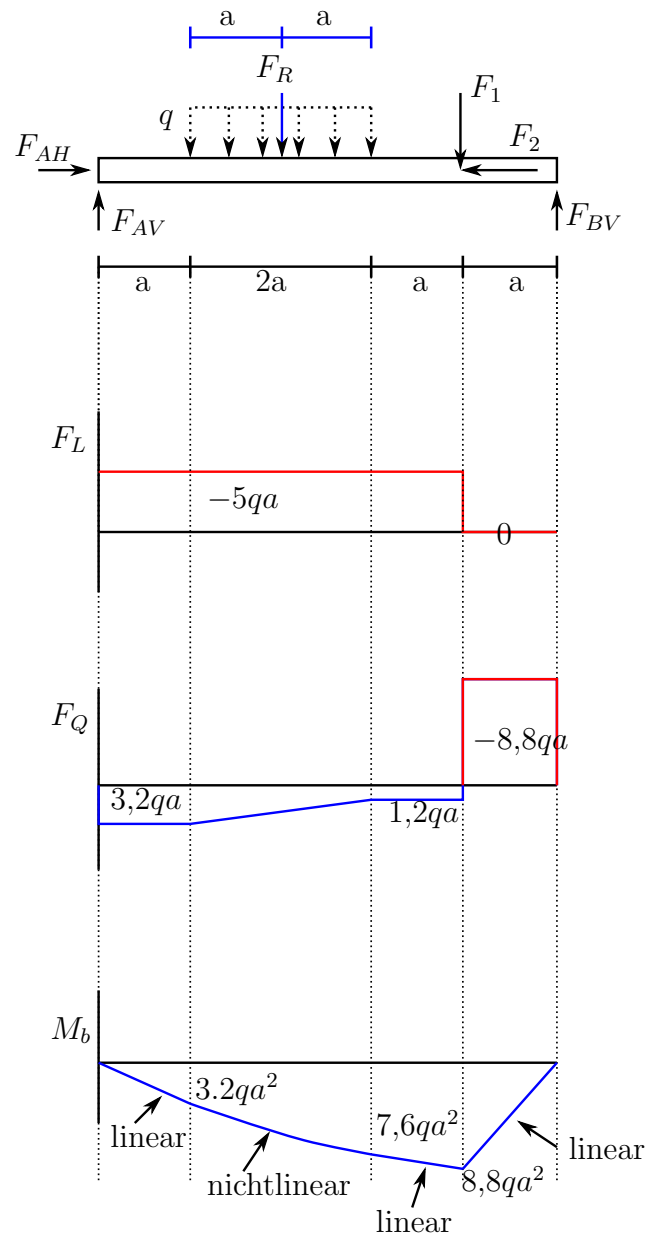


Abbildung 19: Schnittgrößenverläufe

Hinweis:

Die Lösungsansätze der bereichswise Betrachtung und der Superposition können bei Bedarf auch kombiniert werden.

**3.2.6 Maximaler Betrag des Biegemoments**

Das betragsmäßig größte Biegemoment beträgt  $8,8qa^2$  und tritt bei  $z = 4a$  auf.