Nachbereitung 1

Zahlenfolgen (x_n) und (y_n) mit $x_n = \frac{5n+1}{3n-4}$ und $y_n = 1 - e^{x_n}$

a) Untersuchung auf Monotonie:

▷ Für monoton steigende Zahlenfolge gilt: $x_{n+1} > x_n$, $x_{n+1} - x_n > 0$

$$x_n = \frac{5n+1}{3n-4} \qquad x_{n+1} = \frac{5(n+1)+1}{3(n+1)-4} = \frac{5n+5+1}{3n+3-4} = \frac{5n+6}{3n-1}$$

$$x_{n+1} - x_n > 0$$

$$\frac{5n+6}{3n-1} - \frac{5n+1}{3n-4} > 0$$

$$\frac{(5n+6)(3n-4) - (5n+1)(3n-1)}{(3n-1)(3n-4)} > 0$$

$$\frac{(15n^2 - 20n + 18n - 24) - (15n^2 - 5n + 3n - 1)}{9n^2 - 12n - 3n + 4} > 0$$

$$= \frac{-23}{9n^2 - 15n + 4} > 0$$

$$\frac{-23}{9n^2 - 15n + 4} > 0$$

Wann ist $9n^2 - 15n + 4$ negativ, damit das Term $\frac{-23}{9n^2-15n+4}$ insgesamt positiv wird.

$9n^2 - 15n + 4$ ist für $n = 1$ negativ.
$9n^2 - 15n + 4$ ist für alle anderen Werte von n immer positiv.

$\Rightarrow$ Ab $n = 2$ ist die Zahlenfolge x_n fallend

$X_1 = -6$, $X_2 = 5{,}5$, $X_3 = 3{,}2$, $X_4 = 2{,}625$, ...

$\triangleright$ $Y_n = 1 - e^{X_n}$ $\quad Y_1 = 1 - e^{-6} = 0{,}99$ $\quad Y_2 = 1 - e^{5{,}5} = -243{,}69$ $\quad Y_3 = 1 - e^{3{,}2} = -23{,}53$ $\quad Y_4 = 1 - e^{2{,}625} = -12{,}804$

X_n ist ab $n=2$ monoton fallend . Das bedeutet das exponent vom e wird bei jedem weiterfolgenden Glied kleiner und somit der Wert von e^{X_n} auch immer kleiner wird. (ab Betrag gesehen werden die Zahlen kleiner, aber da mit negativen Vorzeichen von e, wird $-e^{X_n}$ ab $n=2$ immer größer und somit $-e^{X_n}$ ist steigend)

$-e^{X_n}$ ist eine monoton steigende Folge, wie schon erklärt und das addieren eine Konstante ändert die Monotonie nicht.

$\Rightarrow Y_n = 1 - e^{X_n}$ ist ab $n=2$ eine Monoton Steigende Zahlenfolge b)

$$X_n = \frac{5n+1}{3n-4}$$

in a haben wir gezeigt, dass X_n ab $n=2$ eine monoton fallende Zahlenfolge ist. $X_2 = 5,5$ und alle nachfolgende Glieder sind kleiner als 5,5. $X_1 = -6$ ist und damit $|X_1|$ ist größerer Wert dass die Zahlenfolge einnehmen kann.

X_n ist somit von oben durch 5,5 beschränkt

und von unten durch −6 beschränkt.

$$-6 \leqslant X_n \leqslant 5,5$$

Somit ist X_n beschränkt.

$$Y_n = 1 - e^{X_n}$$

ist von oben durch 1 beschränkt.

da $-e^{X_n}$ immer größer wird und sich immer weiter an 0 nähert. Damit kann man 1 als obere Schranke nehmen, denn alle Glieder sind klier 1

$\Rightarrow Y_n \leqslant 1$

$Y_n > -244$

von unten wird die folge durch $-243,69 \approx -244$ beschränkt, da das das größt mögliche Betrag bildet und alle anderen folgen danach werden an sich größer (da negativ) aber als Betrag kleiner.