Beleg 2

Zufallsgrößen
Empirische Methoden für Informatiker

Nico Schramm

23INM-TZ

12. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

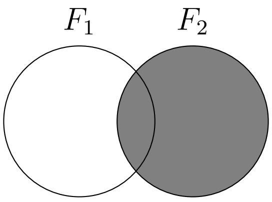
Aufgabe BII-1

> Es wird davon ausgegangen, dass bei einer gewissen Qualitätskontrolle die Werkstücke (genau) zwei Fehler aufweisen können, den Fehler F_1 und den Fehler F_2. Aus Erfahrung sei bekannt, dass mit Wahrscheinlichkeit 0,28 ein Werkstück Fehler F_2 besitzt, mit Wahrscheinlichkeit 0,68 hat es (mindestens) einen von beiden Fehlern und mit Wahrscheinlichkeit 0,12 beide Fehler. Bestimmen Sie unter diesen Gegebenheiten die nachfolgend dargelegten Wahrscheinlichkeiten.

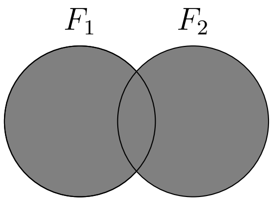
Modellierung der Ergebnisse wie folgt:

- $F_1 \mathrel{\hat{=}}$ „Fehler F_1 tritt auf"
- $F_2 \mathrel{\hat{=}}$ „Fehler F_2 tritt auf"

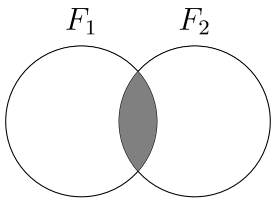
Somit sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten gegeben:



(a) $P(F_2) = 0{,}28$



(b) $P(F_1 \cup F_2) = 0{,}68$



(c) $P(F_1 \cap F_2) = 0{,}12$

> (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt ein Werkstück den Fehler F_1?

Dieses Ergebnis entspricht F_1. Somit folgt:

$$\begin{aligned} P(F_1) &= P(F_1 \cup F_2) - P(F_2) + P(F_1 \cap F_2) \\ &= 0{,}68 - 0{,}28 + 0{,}12 \\ \Rightarrow P(F_1) &= 0{,}52 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich, dass ein Werkstück den Fehler F_1 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,52 besitzt.

> (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt ein Werkstück nur den Fehler F_2?

Dieses Ergebnis entspricht $F_2 \setminus F_1$. Somit folgt:

$$\begin{aligned} P(F_2 \setminus F_1) &= P(F_1 \cup F_2) - P(F_1) \\ &= 0{,}68 - 0{,}52 \\ \Rightarrow P(F_2 \setminus F_1) &= 0{,}16 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich, dass ein Werkstück *nur* den Fehler F_2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,16 besitzt.

> (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt ein Werkstück genau einen der beiden Fehler?

Dieses Ergebnis entspricht $F_1 \Delta F_2$. Somit folgt:

$$\begin{aligned} P(F_1 \Delta F_2) &= P(F_1 \cup F_2) - P(F_1 \cap F_2) \\ &= 0{,}68 - 0{,}12 \\ \Rightarrow P(F_1 \Delta F_2) &= 0{,}56 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich, dass ein Werkstück *genau einen* der beiden Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,56 besitzt.

> (d) Bei einem Werkstück wurde Fehler F_1 festgestellt, während die Untersuchung auf Fehler F_2 noch nicht erfolgte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt jenes Werkstück auch Fehler F_2?

Dieses Ergebnis entspricht der bedingten Wahrscheinlichkeit des Eintretens von F_2 unter der Bedingung, dass F_1 eingetreten ist. Somit folgt:

$$\begin{aligned} P(F_2 | F_1) &= \frac{P(F_2 \cap F_1)}{P(F_1)} = \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_1)} \\ &= \frac{0{,}12}{0{,}52} \\ \Rightarrow P(F_2 | F_1) &\approx 0{,}2308 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0,2308.

> (e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Werkstück fehlerfrei, falls es Fehler F_2 nicht besitzt?

Dieses Ergebnis entspricht der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass weder F_1 noch F_2 eintritt, unter der Bedingung, dass nicht F_2 eingetreten ist. Somit folgt:

$$\begin{aligned} P(\overline{F_1 \cup F_2} | \overline{F_2}) &= \frac{P(\overline{F_1 \cup F_2} \cap \overline{F_2})}{P(\overline{F_2})} \\ &= \frac{P(\overline{F_1 \cup F_2})}{1 - P(F_2)} = \frac{1 - P(F_1 \cup F_2)}{1 - P(F_2)} \\ &= \frac{1 - 0{,}68}{1 - 0{,}28} = \frac{0{,}32}{0{,}72} \\ \Rightarrow P(\overline{F_1 \cup F_2} | \overline{F_2}) &= 0{,}\overline{4} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von ungefähr $0{,}\overline{4}$.

> (f) Sind die Ergebnisse „Fehler F_1 tritt auf“ und „Fehler F_2 tritt auf“ stochastisch unabhängig?

$$\begin{aligned} F_1, F_2 \text{ stochastisch unabhängig} &\iff P(F_1 \cap F_2) \stackrel{?}{=} P(F_1) \cdot P(F_2) \\ &\iff 0{,}12 \stackrel{?}{=} 0{,}52 \cdot 0{,}28 \\ &\iff 0{,}12 \stackrel{?}{=} 0{,}1456 \Rightarrow \text{falsche Aussage} \end{aligned}$$

Somit folgt, dass die beiden Ergebnisse *nicht* stochastisch unabhängig sind.

> (g) Von einem Werkstück sei bekannt, dass es nur einen Fehler aufweist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt ein solches Werkstück dann Fehler F_1?

Dieses Ergebnis entspricht der bedingten Wahrscheinlichkeit des Eintretens von F_1 unter der Bedingung, dass *entweder* F_1 *oder* F_2 eingetreten ist. Letzteres entspricht der symmetrischen Differenz der beiden Ereignisse. Somit folgt:

$$\begin{aligned} P(F_1|F_1 \Delta F_2) &= \frac{P\big(F_1 \cap (F_1 \Delta F_2)\big)}{P(F_1 \Delta F_2)} \\ &= \frac{P(F_1 \setminus F_2)}{P(F_1 \Delta F_2)} = \frac{P(F_1) - P(F_1 \cap F_2)}{P(F_1 \Delta F_2)} \\ &= \frac{0{,}52 - 0{,}12}{0{,}56} = \frac{0{,}4}{0{,}56} \\ \Rightarrow P(F_1|F_1 \Delta F_2) &\approx 0{,}7143 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt für dieses Ergebnis eine Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0,7143.

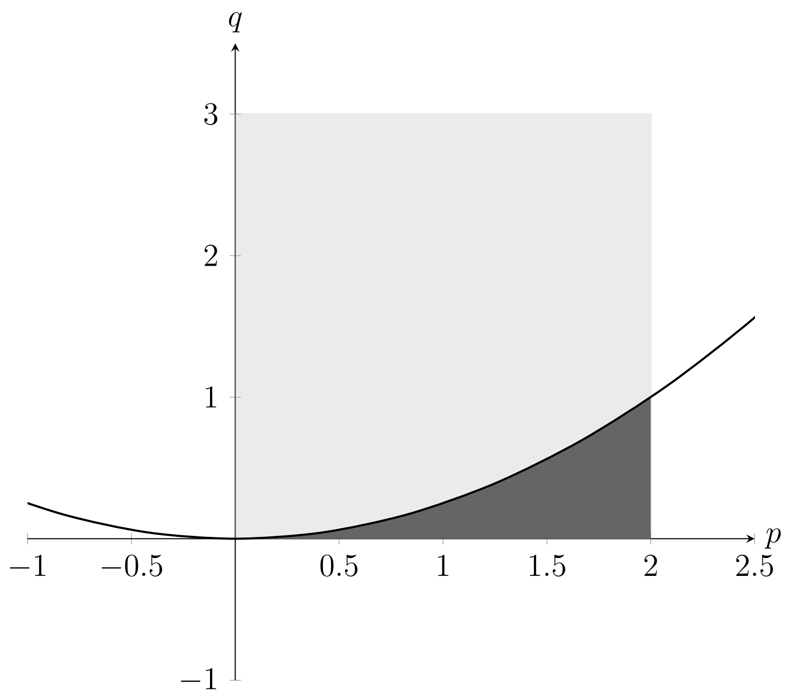
Aufgabe BII-2

> Die Koeffizienten p und q in der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ seien rein zufällig mit $p \in [0,\, 2]$ und $q \in [0,\, 3]$ gewählt (so dass jede Wahl einer reellen Zahl aus diesen Intervallen jeweils als gleichmöglich angesehen wird). Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Gleichung reelle Lösungen besitzt?
>
> Hinweis: Man denke an die p-q-Formel und nutze etwa geometrische Aspekte zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten gemäß Folie 21 von Vorlesung 5.

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + px + q \\
\Rightarrow x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
\Rightarrow x_{1,2} \in \mathbb{R} &\iff \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0 \\
&\iff \left(\frac{p}{2}\right)^2 \geq q \\
&\iff \frac{p^2}{4} \geq q \\
&\iff p^2 \geq 4q \\
&\iff q \leq \frac{1}{4}p^2
\end{aligned}$$

Grundmenge: $\Omega = [0,\, 2] \times [0,\, 3]$

Interessierendes Ereignis: $A = \left\{(p,\, q) \in \Omega : q \leq \frac{1}{4}p^2\right\}$



$$\begin{aligned} I(\Omega) &= 2 \cdot 3 = 6 \\ I(A) &= \int_0^2 \frac{1}{4} p^2 \,\mathrm{d}\,p = \left[\frac{1}{12} p^3\right]_0^2 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{I(A)}{I(\Omega)} = \frac{\frac{2}{3}}{6} = \frac{1}{9} = 0{,}\overline{1} \end{aligned}$$

Somit liegt die Wahrscheinlichkeit, dass die Gleichung eine reelle Lösung besitzt, bei $\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$.

Aufgabe BII-3

> Die Belegschaft der Firma WIJZIGING setze sich aus 65% Arbeiter, 30% Angestellte und 5% leitende Führungskräfte zusammen. Aus Erfahrung sei bekannt, dass während eines Jahres ein Arbeiter mit Wahrscheinlichkeit 0,5, ein Angestellter mit Wahrscheinlichkeit 0,2 und eine leitende Führungskraft mit Wahrscheinlichkeit 0,1 die Firma verlässt. Bestimmen Sie unter diesen Gegebenheiten die nachfolgend dargelegten Wahrscheinlichkeiten.

$A_1 \mathrel{\hat{=}}$ „Belegschaftsmitglied ist Arbeiter“

$A_2 \mathrel{\hat{=}}$ „Belegschaftsmitglied ist Angestellter“

$A_3 \mathrel{\hat{=}}$ „Belegschaftsmitglied ist leitende Führungskraft“

$V \mathrel{\hat{=}}$ „Belegschaftsmitglied verlässt Firma“

Daraus ergeben sich folgende gegebene Wahrscheinlichkeiten:

$P(A_1) = 0{,}65, \quad P(A_2) = 0{,}3, \quad P(A_3) = 0{,}05$

$P(V|A_1) = 0{,}5, \quad P(V|A_2) = 0{,}2, \quad P(V|A_3) = 0{,}1$

> (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Belegschaftsmitglied während eines Jahres die Firma verlässt?

Mittels Formel der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} P(V) &= \sum_{j=1}^{3} P(V|A_j) \cdot P(A_j) \\ &= 0{,}65 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}05 \cdot 0{,}1 \\ \Rightarrow P(V) &= 0{,}39 \end{aligned}$$

Somit liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig gewähltes Belegschaftsmitglied während eines Jahres die Firma verlässt, bei 0,39.

> (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig gewähltes Belegschaftsmitglied, welches die Firma während eines Jahres verlässt, kein Arbeiter?

$$\begin{aligned} P(\overline{A_1}|V) &= \frac{P(\overline{A_1} \cap V)}{P(V)} = \frac{P\big((A_2 \cap V) \cup (A_3 \cap V)\big)}{P(V)} \\ &= \frac{P(V|A_2) \cdot P(A_2) + P(V|A_3) \cdot P(A_3)}{P(V)} \\ &= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}05}{0{,}39} \\ \Rightarrow P(\overline{A_1}|V) &= \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} \end{aligned}$$

Da für alle $j \in \{1{,}2{,}3\}$ jeweils $V \subseteq A_j$ gilt und alle A_j paarweise disjunkt sind, ist alternativ die Formel von Bayes (B) anwendbar.

$$\begin{aligned} P(\overline{A_1}|V) &= 1 - P(A_1|V) \\ &\overset{\text{(B)}}{=} 1 - \frac{P(V|A_1) \cdot P(A_1)}{P(V)} \\ &= 1 - \frac{0{,}5 \cdot 0{,}65}{0{,}39} = 1 - 0{,}8\overline{3} \\ \Rightarrow P(\overline{A_1}|V) &= \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich insgesamt eine Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliges Belegschaftsmitglied, welches die Firma verlässt, kein Arbeiter ist von $0{,}1\overline{6}$.

> (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig gewähltes Belegschaftsmitglied, welches die Firma während eines Jahres nicht verlässt, ein Arbeiter?

$$\begin{aligned} P(A_1|\overline{V}) &= \frac{P(\overline{V}|A_1) \cdot P(A_1)}{P(\overline{V})} \\ &= \frac{\big(1 - P(V|A_1)\big) \cdot P(A_1)}{1 - P(V)} \\ &= \frac{(1 - 0{,}5) \cdot 0{,}65}{1 - P(0{,}39)} = \frac{0{,}325}{0{,}61} \\ \Rightarrow P(A_1|\overline{V}) &\approx 0{,}5328 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Belegschaftsmitglied, welches die Firma während eines Jahres *nicht* verlässt, kein Arbeiter ist, von ungefähr 0,5328.

Aufgabe BII-4

Ein verfälschter Würfel lasse sich durch die Zufallsgröße X mit Einzelwahrscheinlichkeiten gemäß der Verteilungstabelle (bei einem Einzelwurf)

Augenzahl k	1	2	3	4	5	6
$p_k = P(\{X = k\})$	0,42	0,28	0,15	0,1	0,05	p

mit einer gewissen nichtnegativen reellen Zahl p beschreiben.

(a) Ermitteln Sie den konkreten Wert von p.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6} p_k = 1 \Rightarrow p &= 1 - \sum_{k=1}^{5} p_k \\ &= 1 - 0{,}42 - 0{,}28 - 0{,}15 - 0{,}1 - 0{,}05 \\ \Rightarrow p &= 0\end{aligned}$$

Es folgt $p = 0$. Somit ist es unmöglich eine 6 zu würfeln.

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an und skizzieren Sie diese.

Aus der Verteilungstabelle und Aufgabe (a) ergibt sich folgende Verteilungsfunktion F:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \\ 0{,}42 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 0{,}7 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 0{,}85 & \text{für } 3 \leq x < 4 \\ 0{,}95 & \text{für } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{für } 5 \leq x \end{cases}$$

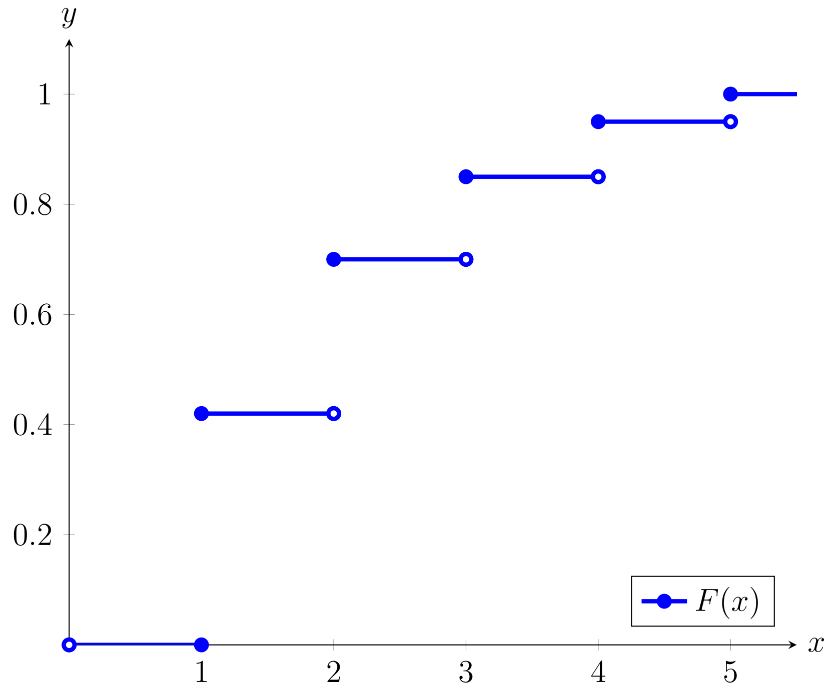


Abbildung 2: Verteilungsfunktion F

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{6} x_k p_k \\
&= 1 \cdot 0{,}42 + 2 \cdot 0{,}28 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0 \\
\Rightarrow \mathrm{E}(X) &= 2{,}08
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_{k=1}^{6} \big(x - \mathrm{E}(X)\big)^2 \cdot p_k \\
&= (1 - 2{,}08)^2 \cdot 0{,}42 + (2 - 2{,}08)^2 \cdot 0{,}28 + (3 - 2{,}08)^2 \cdot 0{,}15 \\
&\quad + (4 - 2{,}08)^2 \cdot 0{,}1 + (5 - 2{,}08)^2 \cdot 0{,}05 + (6 - 2{,}08)^2 \cdot 0 \\
\Rightarrow \mathrm{Var}(X) &= 1{,}4136
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(X) &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{1{,}4136} \\
\Rightarrow \sigma(X) &\approx 1{,}1889
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich ein Erwartungswert von $\mathrm{E}(X) = 2{,}08$ und eine Standardabweichung von $\sigma(X) \approx 1{,}1889$.

> (d) Ermitteln Sie Modus, Median und 0,75-Quantil von X.

Der Modus x_{mod} ergibt sich aus dem Wert $x \in W_X$, welcher die größte Einzelwahrscheinlichkeit hat. Somit folgt $x_{\text{mod}} = 1$.

Der Median x_{med} ergibt sich durch den ersten Wert (Augenzahl), bei dem eine Wahrscheinlichkeit von $q = 0{,}5$ überschritten wird. Somit folgt $x_{\text{med}} = 2$.

Analog ergibt sich das 0,75-Quantil bei dem Wert, an dem eine Wahrscheinlichkeit von $q = 0{,}75$ erstmalig überschritten wird. Somit folgt $x_{0{,}75} = 3$.

Aufgabe BII-5

> In Transsilvanien haben 4,5% der Bevölkerung die Blutgruppe AB. Der dort ansässige Graf wählt rein zufällig 160 Personen aus Transsilvanien aus und bestimmt deren Blutgruppe. Die Anzahl der dabei erwischten Personen mit Blutgruppe AB lasse sich hinreichend genau durch durch eine Binomialverteilung beschreiben. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:

$X \mathrel{\widehat{=}}$ „Anzahl der Personen, die Blutgruppe AB haben“

Einzelwahrscheinlichkeit $p = 0{,}045$; Stichprobenumfang $n = 160$

$X \sim \mathrm{Bin}(160; 0{,}045)$

> (a) keiner der vom Graf gewählten Personen die Blutgruppe AB hat?

$$\begin{aligned} P(\{X=0\}) &= \binom{160}{0} \cdot 0{,}045^0 \cdot (1-0{,}045)^{160-0} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0{,}955^{160} \\ \Rightarrow P(\{X=0\}) &\approx 0{,}0006 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keine der vom Grafen gewählten Personen die Blutgruppe AB hat, liegt bei annähernd 0,0006.

> (b) genau einer der vom Graf gewählten Personen die Blutgruppe AB hat?

$$\begin{aligned} P(\{X=1\}) &= \binom{160}{1} \cdot 0{,}045^1 \cdot (1-0{,}045)^{160-1} \\ &= 160 \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}955^{159} \\ \Rightarrow P(\{X=1\}) &\approx 0{,}0048 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine der vom Grafen gewählten Personen die Blutgruppe AB hat, liegt bei annähernd 0,0048.

> (c) mehr als einer der vom Graf gewählten Personen die Blutgruppe AB hat?

$$\begin{aligned} P(\{X>1\}) &= 1 - P(\{X \leq 1\}) \\ &= 1 - P(\{X=0\}) - P(\{X=1\}) \\ &\approx 1 - 0{,}0006 - 0{,}0048 \\ \Rightarrow P(\{X>1\}) &\approx 0{,}9946 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als eine der vom Grafen gewählten Personen die Blutgruppe AB hat, liegt bei annähernd 0,9946.

> Welche Wahrscheinlichkeiten würden sich in (a), (b) und (c) ergeben, wenn man anstelle der Binomialverteilung eine Approximation durch eine Poisson-Verteilung benutzen würde?

$\eta = n \cdot p = 160 \cdot 0{,}045 = 7{,}2 \leq 10$

$\Rightarrow$ Approximation $X \sim \text{Poi}(7{,}2)$

Nach Faustregel $\eta \leq 10$ eine „gute“ Approximation

Durch die Poisson-Approximation ergeben sich die folgenden Schätzungen:

$$\begin{aligned}
P(\{X = 0\}) &\approx \frac{\eta^k}{k!} \exp(-\eta) \\
&= \frac{7{,}2^0}{0!} \exp(-7{,}2) \\
\Rightarrow P(\{X = 0\}) &\approx 0{,}0007
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\{X = 1\}) &\approx \frac{7{,}2^1}{1!} \exp(-7{,}2) \\
\Rightarrow P(\{X = 1\}) &\approx 0{,}0054
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\{X > 1\}) &= 1 - P(\{X = 0\}) - P(\{X = 1\}) \\
&\approx 1 - 0{,}0007 - 0{,}0054 \\
\Rightarrow P(\{X > 1\}) &\approx 0{,}9939
\end{aligned}$$

Aufgabe BII-6

Es liege eine stetige Zufallsgröße X mit einer Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Vorschrift

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < a \\ (2x + \frac{1}{9})^2, & \text{für } a \leq x < b \\ 1, & \text{für } b \leq x \end{cases}$$

mit gewissen fest fixierten Zahlen a, $b \in \mathbb{R}$ zugrunde.

(a) Ermitteln Sie die konkreten Werte von a und b (so dass F tatsächlich die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgröße X ist).

Die Werte a, $b \in \mathbb{R}$ müssen so bestimmt sein, dass die Verteilungsfunktion F stetig ist. Somit müssen die Argumente bestimmt werden, sodass $F(a) = 0$ und $F(b) = 1$ ist.

$$\begin{aligned} 0 &= \left(2 \cdot a + \frac{1}{9}\right)^2 \\ \implies 0 &= 2a + \frac{1}{9} \\ \iff -\frac{1}{9} &= 2a \\ \iff a &= -\frac{1}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \left(2 \cdot b + \frac{1}{9}\right)^2 \\ \iff \pm 1 &= \sqrt{2 \cdot b + \frac{1}{9}} \\ \iff b &\in \left\{ -\frac{5}{9}; \frac{4}{9} \right\} \\ \xRightarrow{b \geq a} b &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $a = -\frac{1}{18}$ und $b = \frac{4}{9}$, sodass die Verteilungsfunktion F wie folgt definiert ist und wie in Abbildung 3 dargestellt verläuft.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < -\frac{1}{18} \\ (2x + \frac{1}{9})^2, & \text{für } -\frac{1}{18} \leq x < \frac{4}{9} \\ 1, & \text{für } \frac{4}{9} \leq x \end{cases}$$

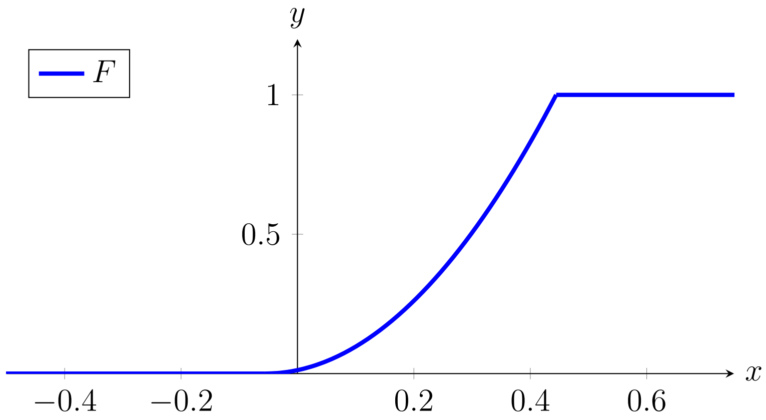


Abbildung 3: Verteilungsfunktion F der Zufallsgröße X

(b) Geben Sie eine Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die stetige Zufallsgröße X an.

Nebenrechnung: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(2x + \frac{1}{9})^2 = 2 \cdot (2x + \frac{1}{9}) \cdot 2 = 4 \cdot (2x + \frac{1}{9}) = 8x + \frac{4}{9}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$
$$\implies f(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < -\frac{1}{18} \\ 8t + \frac{4}{9}, & \text{für } -\frac{1}{18} \leq t < \frac{4}{9} \\ 0, & \text{für } \frac{4}{9} \leq t \end{cases}$$

Somit ergibt sich oben aufgestellte Dichtefunktion f für die Zufallsgröße X. Zu prüfen ist, ob die beiden folgenden notwendigen Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\forall t \in \mathbb{R} : f(t) \geq 0$ (Nichtnegativität)

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$

Bedingung (1) kann aus dem Verlauf der Dichtefunktion f, welcher in Abbildung 4 dargestellt ist, abgelesen werden. Für Bedingung (2) ergibt sich Folgendes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \underbrace{\int_{-\infty}^{-\frac{1}{18}} 0\,\mathrm{d}\,t}_{=0} + \int_{-\frac{1}{18}}^{\frac{4}{9}} 8t + \frac{4}{9}\,\mathrm{d}\,t + \underbrace{\int_{\frac{4}{9}}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}\,t}_{=0}$$
$$= \left[4t^2 + \frac{4}{9}t\right]_{-\frac{1}{18}}^{\frac{4}{9}} = \frac{80}{81} + \frac{1}{81}$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$$

Somit erfüllt die aufgestellte Dichtefunktion f beiden notwendigen Bedingungen.

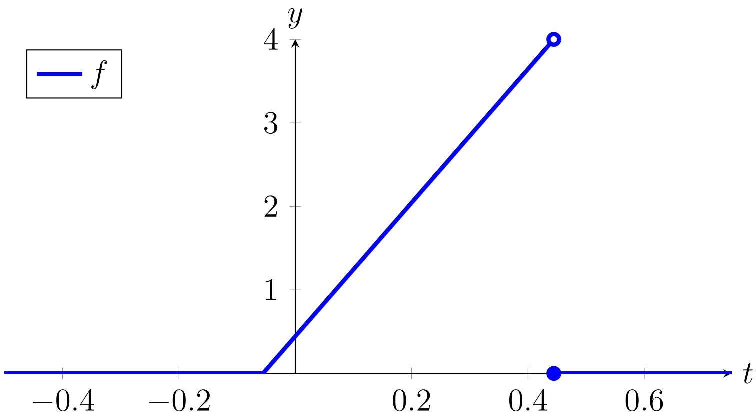


Abbildung 4: Dichtefunktion f der Zufallsgröße X

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{-\frac{1}{18}} t \cdot 0\,\mathrm{d}\,t}_{=\,0} + \int_{-\frac{1}{18}}^{\frac{4}{9}} t \cdot \left(8t + \frac{4}{9}\right)\mathrm{d}\,t + \underbrace{\int_{\frac{4}{9}}^{+\infty} t \cdot 0\,\mathrm{d}\,t}_{=\,0} \\
&= \int_{-\frac{1}{18}}^{\frac{4}{9}} 8t^2 + \frac{4}{9}t\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{8}{3}t^3 + \frac{2}{9}t^2\right]_{-\frac{1}{18}}^{\frac{4}{9}} = \frac{608}{2187} - \frac{1}{4374} \\
\Rightarrow \mathrm{E}(X) &= \frac{5}{18} \approx 0{,}2778
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \mathrm{E}(X)\right)^2 \cdot f(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-\frac{1}{18}}^{\frac{4}{9}} \left(t - \frac{5}{18}\right)^2 \cdot \left(8t + \frac{4}{9}\right)\mathrm{d}\,t = \int_{-\frac{1}{18}}^{\frac{4}{9}} t^2 + \frac{67}{9}t + \frac{169}{324}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[2t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{5}{27}t^2 + \frac{25}{729}t\right]_{-\frac{1}{18}}^{\frac{4}{9}} = \frac{28}{2187} + \frac{19}{17496} \\
\Rightarrow \mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{72} \approx 0{,}0139
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich ein Erwartungswert von $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{18} \approx 0{,}2778$ und eine Varianz von $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{72} \approx 0{,}0139$.

(Alternativ: Berechnung der Varianz mittels Formel von Steiner)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(d_1) die Zufallsgröße X einen Wert (echt) größer als 0 annimmt?

(d_2) die Zufallsgröße X einen Wert annimmt, der zwischen 0,2 und 0,5 liegt?

$$(d_1) \qquad \begin{aligned} P(\{X > 0\}) &= 1 - P(\{X \leq 0\}) = 1 - \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= 1 - \underbrace{\int_{-\infty}^{-\frac{1}{18}} 0\,\mathrm{d}\,t}_{=\,0} - \int_{-\frac{1}{18}}^{0} 8t + \frac{4}{9}\,\mathrm{d}\,t \\ &= 1 - \left[4t^2 + \frac{4}{9}t\right]_{-\frac{1}{18}}^{0} = 1 - \left(0 + \frac{1}{81}\right) = 1 - \frac{1}{81} \\ \Rightarrow P(\{X > 0\}) &= \frac{80}{81} \approx 0{,}9877 \end{aligned}$$

$$(d_2) \qquad \begin{aligned} P(\{0{,}2 \leq X \leq 0{,}5\}) &= \int_{0{,}2}^{0{,}5} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{0{,}2}^{\frac{4}{9}} 8t + \frac{4}{9}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[4t^2 + \frac{4}{9}t\right]_{0{,}2}^{\frac{4}{9}} \approx \frac{80}{81} - 0{,}2249 \\ \Rightarrow P(\{0{,}2 \leq X \leq 0{,}5\}) &\approx 0{,}7388 \end{aligned}$$

Somit ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Wert (echt) größer als 0 ist, von ungefähr 0,9877 sowie, dass ein Wert zwischen 0,2 und 0,5 angenommen wird, von ungefähr 0,7388.

(e) Berechnen Sie Modus, Median und $\frac{1}{9}$-Quantil von X.

Der Modus der Zufallsgröße X besteht in der lokalen Maximalstelle der zugehörigen Dichte f, wobei zumindest einseitige Stetigkeit vorliegen muss. Aus Abbildung 4 ist erkennbar, dass die Dichte f eine lokale Maximalstelle bei $\lim\limits_{t \to \frac{4}{9} - 0} f(t) = 4$ besitzt. Die Stelle $t = \frac{4}{9}$ ist zumindest linksseitig stetig. Somit ergibt sich als Modus $x_{\text{mod}} = \frac{4}{9}$.

Wenn für die Zufallsgröße X für jede reelle Zahl $q \in (0,\, 1)$ folgendes gilt

$$\lim_{x \to x_q - 0} F(x) \leq q \leq F(x_q),$$

heißt x_q Quantil der Ordnung q. Der Median $x_{\text{med}} = x_{0{,}5}$ (d.h. $q = 0{,}5$) ergibt sich aus

$$x_{\text{med}} = \frac{x_{0{,}5}^{[1]} + x_{0{,}5}^{[2]}}{2}.$$

Aufgrund des Verlaufs der Verteilungsfunktion F folgt für die konkrete Zufallsgröße X für den Median x_{med} sowie das $\frac{1}{9}$-Quantil $x_{\frac{1}{9}}$:

$$
\begin{aligned}
x_{\text{med}}: \qquad & 0{,}5 = F(x_{\text{med}}) = \left(2 \cdot x_{\text{med}} + \frac{1}{9}\right)^2 \\
& \xRightarrow{\text{Solver}} 0{,}5 = 4(x_{\text{med}})^2 + \frac{4}{9}x_{\text{med}} + \frac{1}{81} \\
& \Longrightarrow x_{\text{med}} \approx \{-0{,}4091;\ 0{,}2980\} \\
& \xRightarrow{D_F} x_{\text{med}} \approx 0{,}2980
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{\frac{1}{9}}: \qquad & \frac{1}{9} = F(x_{\frac{1}{9}}) = \left(2 \cdot x_{\frac{1}{9}} + \frac{1}{9}\right)^2 \\
& \xRightarrow{\text{Solver}} x_{\frac{1}{9}} = \left\{ -\frac{2}{9}\ ;\ \frac{1}{9} \right\} \\
& \xRightarrow{D_F} x_{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich ein Median von $x_{\text{med}} \approx 0{,}2980$ und ein $\frac{1}{9}$-Quantil von $x_{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}$.