
Mathematik 1 - WS2022/23 Übungsblatt 6

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Gegeben sei die Formel für eine endliche Summe

$$\sum_{k=0}^4 (e^{ikx}) = \frac{1 - (e^{ix})^5}{1 - e^{ix}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

worin $e = 2.7182818\dots$ die Eulernzahl und i die imaginäre Einheit bezeichnen, d. h. es gilt $i^2 = -1$.

- (a) Stellen Sie die linke Seite der Gleichung (1) ohne Verwendung des Summenzeichens dar.
- (b) Stellen Sie linke und rechte Seite der Gleichung (1) unter Benutzung der Formel von Moivre

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

als Summe $a(x) + i \cdot b(x)$ dar, worin $a(x)$ bzw. $b(x)$ den Real- bzw. Imaginärteil bezeichnen.

- (c) Leiten Sie aus der Formel (1) eine Formel für den Realteil ab.

Aufgabe 2: Gegeben ist die komplexe Zahl

$$w = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i$$

worin i mit $i^2 = -1$ die imaginäre Einheit darstellt.

- (a) Ermitteln Sie schriftlich die Potenz w^{10} und geben Sie das Ergebnis in kartesischer Form an.
- (b) Berechnen Sie schriftlich alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = w$ und geben Sie diese in Exponentialform bzw. Polarform an.
- (c) Stellen Sie die Lösungen aus Aufgabenteil (b) als Punktmenge in der Gaußschen Zahlenebene dar. Zeigen Sie, dass diese Punkte ein regelmäßiges n -Eck bilden.

Aufgabe 3: Gegeben sind die Zahlen $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ und $z_3 \in \mathbb{C}$ mit

$$z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1 \quad \text{und} \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| \quad (2)$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der nachstehenden beiden Aussagen.

- (i) Die Zahlen z_1 , z_2 und z_3 sind Lösungen einer Gleichung $z^3 = c$ mit $c \in \mathbb{C}$ in der Unbekannten z .
- (ii) Für die Zahlen z_1 , z_2 und z_3 gilt die Gleichheit $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Aufgabe 4: Gegeben sei eine Doppelkurbel mit den Drehgelenken A (ortsfest) und B (beweglich) sowie den Gliedern a, b mit den Längen $s_a = 4$ und $s_b = 5$, siehe Abbildung 1.

- (a) Identifizieren Sie die möglichen Lagen A, B und C mit komplexen Zahlen entsprechend Abbildung 1 und geben Sie diese in Abhängigkeit von α und β an.
- (b) Ermitteln Sie eine Betragsungleichung zur Beschreibung der Teilmenge M der komplexen Zahlen, die bei der Bewegung der Doppelkurbel durch C angenommen werden können. Skizzieren Sie die Menge M .
- (c) Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden komplexen Zahlen in M enthalten sind.
 - (i) $z_1 = -i$ (ii) $z_2 = 0$ (iii) $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (iv) $z_4 = -\frac{37}{4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$ (v) $z_5 = 9i$

Wie viele verschiedene Lagen der Doppelkurbel sind dabei möglich?

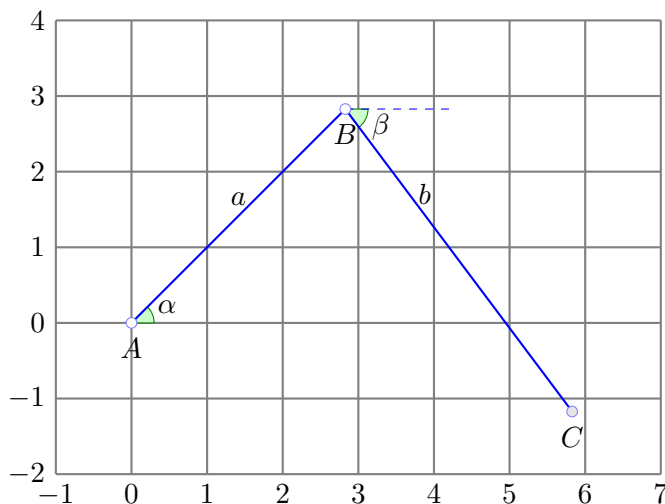


Abbildung 1: Doppelkurbel mit den Gliedern a und b und den Drehgelenken A und B .

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Geben Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen für $z \in \mathbb{C}$ an und skizzieren Sie diese in der Gausschen Zahlenebene.

- (a) $z^2 = -1$
- (b) $z^3 = 8i$
- (c) $z^5 = -1$

Aufgabe 6: Es seien p und q natürliche Zahlen, welche jeweils die Summe zweier Quadratzahlen sind. Das heißt es gibt natürliche Zahlen a_1, a_2 und b_1, b_2 mit $p = a_1^2 + a_2^2$ und $q = b_1^2 + b_2^2$.

- (a) Zeigen Sie, dass dann auch das Produkt $p \cdot q$ die Summe zweier Quadratzahlen ist.

Hinweis:

Betrachten Sie zu p bzw. q die komplexen Zahlen $z_p = a_1 + \mathbf{i} \cdot b_1$ bzw. $z_q = a_2 + \mathbf{i} \cdot b_2$ sowie deren Betragsquadrat $|z_p|^2$ bzw. $|z_q|^2$.

- (b) Es gilt $25 = 3^2 + 4^2$. Nach (a) ist dann auch 25^{10} Summe zweier Quadratzahlen, d.h. es gibt natürliche Zahlen a und b mit $25^{10} = a^2 + b^2$. Berechnen Sie a und b .

Aufgabe 7: Berechnen Sie die komplexen Lösungen z_1 und z_2 des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}(2 - \mathbf{i}) \cdot z_1 + (3 + \mathbf{i}) \cdot z_2 &= 4\mathbf{i} \\ z_1 - (8 - \mathbf{i}) \cdot z_2 &= 2 + \mathbf{i}.\end{aligned}$$

Aufgabe 8: Gegeben ist die imaginäre Einheit $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.

- (a) Weisen Sie unter Benutzung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion nach, dass für beliebige natürliche Exponenten $n \geq 1$ gilt

$$i^n = \begin{cases} i & \text{für } n = 4m + 1, m \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{für } n = 4m + 2, m \in \mathbb{N} \\ -i & \text{für } n = 4m + 3, m \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{für } n = 4m + 4, m \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3)$$

- (b) Berechnen Sie unter Benutzung von Formel (3) die Potenz i^{63} .

Aufgabe 9: Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z_1 = e^{-1 + \frac{\pi}{2}\mathbf{i}}$ und $z_2 = \mathbf{i}^{2015}$.