Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Frank Henschel, Michael Meinhold

Dresden, 20. Januar 2023

Mathematik 1 - WS2022/23
Übungsblatt 15

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Rollt ein Kreis k mit Radius r auf der Außenseite eines Kreises k_0 mit Radius $R > r$ ab, ensteht als Ortskurve eines mit k fest verbundenen Punktes P eine sogenannte *Epizykloide* c.

Die Rollkurve c wird durch die vektorwertige Funktion

$$f : x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(t) = (R+r) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - \mu r \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{R+r}{r}\, t\right) \\ \sin\left(\frac{R+r}{r}\, t\right) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

beschrieben, worin $\mu > 0$ die relative Lage von P zum Rollkreis k_0 angibt.

Speziell sind die Parameterwerte $R = 4$, $r = 1$ und $\mu = 1$ sowie $t \in [0; 2\pi)$ gewählt, siehe Abbildung 1.

(a) Berechnen Sie die Kurvenpunkte, in welchen die Momentangeschwindigkeit verschwindet.

(b) Stellen Sie ein bestimmtes Integral zur Berechnung der Bogenlänge s des Teilbogens $AB \subset c$ auf, siehe Abbildung 1 (magenta). Berechnen Sie s mithilfe eines schriftlichen Verfahrens.

Hinweis: Sollte das bestimmte Integral in (b) nicht bestimmt worden sein, verwenden Sie

$$s = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2t)| \, \mathrm{d}t$$

zur Berechnung der Bogenlänge.

Aufgabe 2: Gegeben sind die Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2 und P_3 einer Bézier-Kurve k dritter Ordnung

$$P_0(-2,0,0), \quad P_1(-2,0,+2), \quad P_2(0,+1,+1), \quad P_3(+1,+1,+1).$$

(a) Geben Sie die Bézier-Darstellung von $k \subset \mathbb{R}^3$ unter Verwendung der Bernstein-Polynome dritten Grades an (letztere sind explizit anzugeben).

(b) Berechnen Sie mithilfe von Aufgabenteil ((a)) einen Richtungsvektor der Kurventangente an die Bézier-Kurve in einem beliebigen Kurvenpunkt.

Zeigen Sie, dass die Richtungsvektoren im Start- und Endpunkt der Bézier-Kurve durch das Kontrollpolygon $P_0 - P_1 - P_2 - P_3$ bestimmt sind.

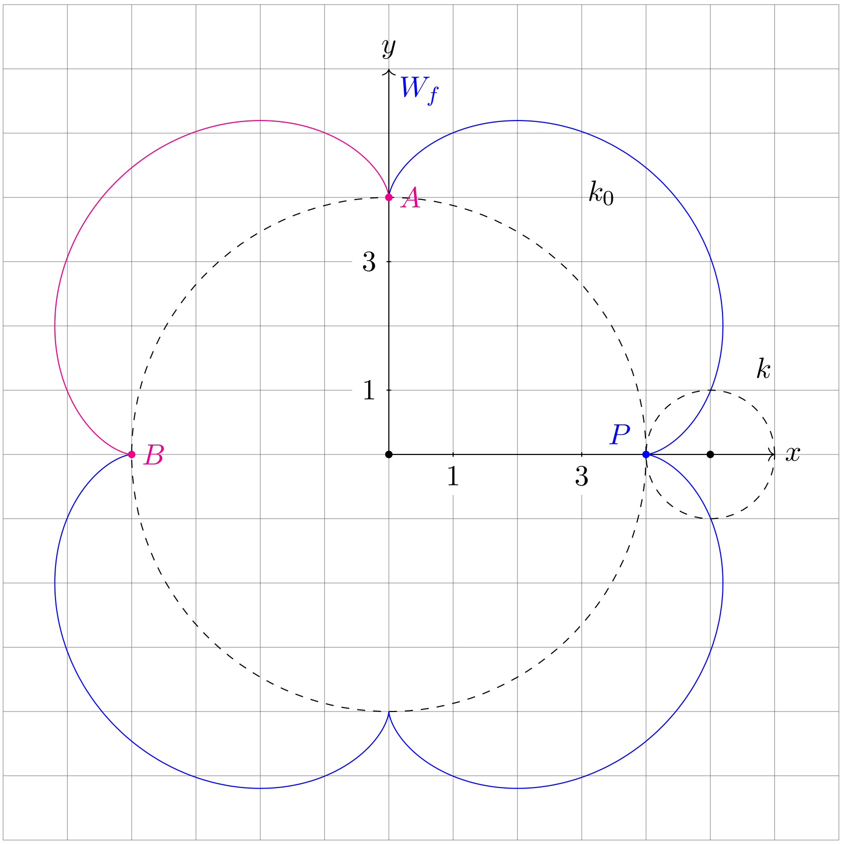

Abbildung 1: Epizykloide für Kreisradien $R = 4$, $r = 1$, Lageparameter $\mu = 1$ eines mit k verbundenen Punktes P.

Aufgabe 3: Die Lissajous-Figur c ist beschrieben durch die vektorwertige Funktion

$$f : t \mapsto (x, y) = (f_1(t), f_2(t)) = \left(\frac{3}{2} \cdot \cos(3 \cdot t), 2 \cdot \sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi)$$

(a) Bestimmen Sie die Amplituden der durch die Koordinatenfunktionen f_1 und f_2 beschriebenen Schwingungen sowie deren Frequenzverhältnis.

(b) Berechnen Sie die Kurvenpunkte von c mit vertikalen Tangenten (parallel zur y-Achse). Geben Sie die (tangentialen) Ableitungsvektoren in diesen Punkten an.

(c) Zeigen Sie, dass die Punkte $A(0, 2)$ und $B(0, -2)$ sowie $C(0, 1)$ und $D(0, -1)$ alle zum Wertebereich W_f der Funktion f gehören. Entscheiden Sie, in welchen dieser Punkte horizontale Tangenten an die Lissajous-Figur existieren.

(d) Skizzieren Sie den Wertebereich der Funktion f.

Hinweis: In einem Kurvenpunkt von c mit Ortsvektor $f(t_0)$, $t_0 \in [0, 2\pi)$ existiert eine horizontale - / vertikale Tangente, wenn die Richtung $\dot{f}(t_0)$ parallel zur ersten - / zweiten Koordinatenachse ist, d. h.

$$\dot{f}_1(t_0) \neq 0 \ \wedge \ \dot{f}_2(t_0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{f}_1(t_0) = 0 \ \wedge \ \dot{f}_2(t_0) \neq 0$$

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 4: Ermitteln Sie für folgende Kurven, die Stelle an welchen die Funktion die stärkste Krümmung aufweist. Geben Sie den zugehörigen Krümmungskreis an und fertigen Sie eine Skizze an (per Hand oder mit einer Software ihrer Wahl).

(a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x)$ (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

Aufgabe 5: Gegeben sind die vektorwertigen Funktionen $t \mapsto f(t)$ und $t \mapsto g(t)$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{3}{2} \cdot \sin(3t) \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \tag{1}$$

über derselben reellen Variable $t \geq 0$.

(a) Ordnen Sie den vektorwertigen Funktionen in Formel (1) die Lissajous-Figuren in Abbildung 2 zu.

Begründen Sie graphisch mithilfe der Amplituden der in den Koordinatenfunktionen beschriebenen Schwingungen und/oder der Frequenzverhältnisse.

(b) Berechnen Sie für die Funktion f aus Formel (1) in $[0, 2\pi)$ alle horizontalen und vertikalen Tangenten an die Lissajous-Figuren und geben Sie diese in Punkt-Richtungsform an.

(c) Bestimmen Sie aus der Lissajous-Figur zur Funktion g die Phasendifferenz zwischen den Schwingungen in den Koordinatenfunktionen.

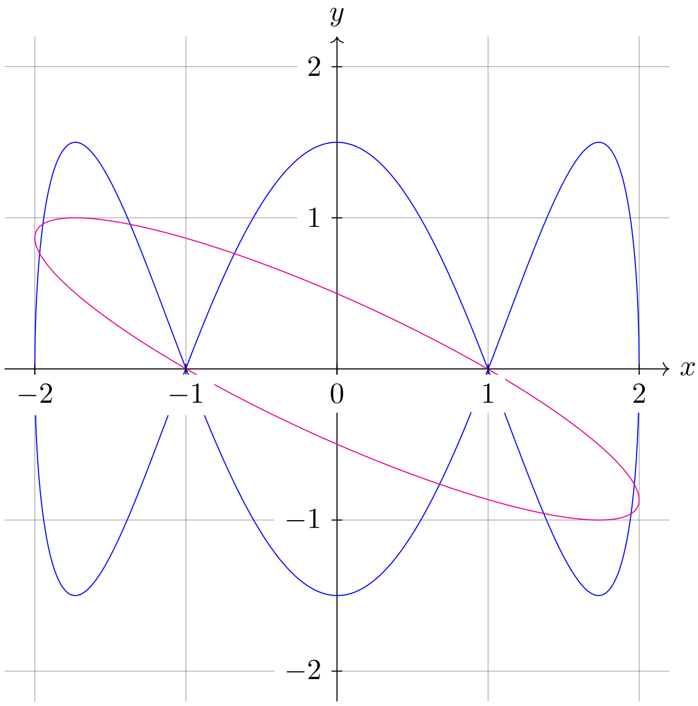

Abbildung 2: Lissajous-Figuren zu den vektorwertigen Funktionen f und g in Formel (1).